Исследование операций

1

Методологические основы и математические методы

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

Handbook of Operations Research

Foundations and Fundamentals

Edited by

Joseph J. Moder, Ph.D.
Department of Management Science
University of Miami

and

Salah E. Elmaghraby, Ph.D.
Graduate Program in Operations Research
North Carolina State University

Van Nostrand Reinhold Company
New York, Cincinnati, Atlanta, Dallas, San Francisco,
London, Toronto, Melbourne 1978

Исследование операций

В 2-х томах

1

Методологические основы и математические методы

Под редакцией
Дж. Моудера,
С. Элмаграби

Перевод с английского
под редакцией
чл.-корр. АН СССР И. М. Макарова,
д-ра техн. наук И. М. Бескровного

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1981

ББК 22.18
И88
УДК 35.073.5

Авторы: Майзер Х., Эйджин Н., Тролл Р. и др.

Исследование операций: В 2-х томах. Пер. с англ./Под
И88 ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби.— М.: Мир, 1981. Т. 1.
712 с., ил.

В первом томе приводятся теоретические основы исследования операций и ряд детерминированных и стохастических моделей, используемых для оптимизации систем. В качестве математического аппарата для анализа детерминированных моделей применяются методы линейного, нелинейного, целочисленного и геометрического программирования. При рассмотрении стохастических моделей используются методы теорий массового обслуживания и полезности, принятия решений, теории игр, имитационного моделирования и динамического программирования.

Для специалистов в области исследования операций, теории управления, экономистов, инженеров-конструкторов, разработчиков АСУ, а также для студентов соответствующих специальностей.

И $\frac{30501\text{-}144}{041(01)\text{-}81}$ 144-81, ч. 1 1502000000 ББК 22.18

Редакция литературы по новой технике

Московский химико-технологический ин-тут им. Д. И. Менделеева
БИБЛИОТЕКА
511215

© 1978 by Litton Educational Publishing, Inc.
© Перевод на русский язык, с сокращениями, «Мир», 1981.

Оглавление

Предисловие к русскому переводу 5
Предисловие 7

Часть I

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

I-1. История развития и использование методов исследования операций, *Х. Майзер* 13

1. Начальный период 13
2. Научная сущность исследования операций 16
3. Практические применения методов исследования операций 19
4. Развитие методов исследования операций в период с 1945 по 1975 г. 21
5. Дальнейшее развитие методов исследования операций 32
6. Перспективы развития методов исследования операций 33

Литература 33

I-2. Методика проведения исследований операций, *Н. Эйджин* . . . 37

1. Введение 37
2. Определение целей 38
3. Составление плана разработки проекта 40
4. Формулировка проблемы 44
5. Построение модели 52
6. Разработка вычислительного метода 55
7. Разработка технического задания на программирование; программирование и отладка 57
8. Сбор данных 59
9. Проверка модели 61
10. Реализация результатов исследования операций 64

Литература 65

I-3. Подготовка специалистов по исследованию операций, *Р. Тролл*

1. Введение 66
2. Структура системы подготовки специалистов по исследованию операций 67
3. Уровни научной квалификации специалистов по исследованию операций 72
4. Учебные программы 76
5. Привлечение кадров в сферу исследования операций 79

Литература 80

Часть II

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ (ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ)

II-1. Линейное программирование, *Х. Таха* 81

1. Введение 81
2. Применение моделей линейного программирования 82

3. Свойства решений задач линейного программирования . . . 89
4. Симплекс-метод 93
5. Теория двойственности 105
6. Анализ моделей на чувствительность 115
7. Линейные задачи, допускающие декомпозицию 117
8. Заключительные замечания 118
Литература 118

II-2. Целочисленное программирование и комбинаторика, *Ф. Гловер*

1. Введение 122
2. Примеры задач ЦП 126
3. Методы решения задач целочисленного программирования 136
4. Задачи целочисленного программирования, обладающие особыми свойствами 147
Литература 150

II-3. Теория графов: некоторые методы и приложения, *Т. Саати*

1. Введение 153
2. Основные определения 156
3. Связность 159
4. Экстремальные графы 168
5. Укладка 174
6. Некоторые из основных теорем 183
7. Матрицы 184
8. Два примера приложений 189
9. Заключительные замечания 191
Литература 191

II-4. Потоки в сетях, *Э. Джонсон* 194

1. Введение 194
2. Кратчайшие пути 194
3. Максимальные потоки 197
4. Прямо-двойственный алгоритм 201
5. Кратчайшие пути и отрицательные циклы 207
6. Линейное программирование 208
7. Приложения 218
8. Потоки с выигрышами 220
9. Многополюсные и многопродуктовые потоки 220
Литература 222

II-5. Геометрическое программирование, *Э. Питерсон* 225

1. Введение 225
2. Формулировка задачи и примеры 226
3. Основы теории 236
Литература 265

II-6. Нелинейное программирование, *О. Мангасариан* 267

1. Введение 267
2. Условия оптимальности 269
3. Двойственность 274
4. Алгоритмы минимизации в одномерном случае 275
5. Алгоритмы безусловной минимизации 278
6. Алгоритмы минимизации при наличии ограничений 281
Литература 288

II-7. Математическое программирование задач большой размерности, *Л. Лэсдон* 291

1. Введение 291
2. Решение задач линейного программирования большой размерности модифицированным симплекс-методом (МСМ) . . . 292
3. Метод обобщенных ограничений сверху 297
4. Метод генерации столбцов 304
5. Метод декомпозиции Данцига—Вулфа 311
6. Нелинейные задачи большой размерности 319
7. Перспективы развития 322

Литература 324

II-8. Оптимальное управление, *Г. Саган* 327

1. Постановка задачи 327
2. Необходимые условия 330
3. Синтез 337
4. Достаточные условия 341
5. Заключительные замечания 345

Литература 347

Часть III

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ (СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ)

III-1. Стохастические процессы, *В. Смит* 349

1. Введение 349
2. Случайные блуждания 357
3. Простое случайное блуждание 361
4. Рекуррентные события (процессы) 363
5. Цепи Маркова 366
6. Мартингалы 371
7. Процессы восстановления 373
8. Кумулятивные процессы 376
9. Ветвящиеся процессы 379
10. Обобщенные процессы рождения и гибели 380
11. Временные ряды и стационарные процессы 383

Литература 389

III-2. Теория массового обслуживания, *Ю. Бхат* 391

1. Введение 391
2. Задачи, терминология и обозначения 393
3. Области применения 396
4. Анализ поведения систем 399
5. Статистический анализ 414
6. Операционный анализ 419
7. Методы теоретического анализа . . . . .
8. Вычислительные проблемы 436
9. Основные направления современных исследований 439
10. Заключение 440

Литература 441

III-3. Теория полезности, *П. Фишберн* 448

1. Введение 448
2. Предпочтение и полезность 452

3. Теория ожидаемой полезности 460
4. Многофакторная теория полезности 468
5. Субъективная вероятность и ожидаемая полезность 473
6. Заключительные замечания 477
Литература 477

III-4. Теория принятия решений, *Р. Кини* 481

1. Введение 481
2. Аксиомы теории принятия решений 486
3. Методологические основы теории принятия решений 489
4. Числовая форма представления неопределенности суждений. 495
5. Оценка полезности 500
6. Успехи теории принятия решений 506
7. Будущее теории принятия решений 509
Литература 509

III-5. Теория игр и игровое моделирование, *Г. Оуэн* 513

Некоторые исторические сведения 513
1. Позиционные игры и нормальная форма игры 513
2. Игры двух лиц с нулевой суммой 516
3. Игры двух лиц с ненулевой суммой 534
4. Игры *n* лиц 537
5. Игровое моделирование 546
Литература 548

III-6. Теория поиска, *Ф. Морз* 549

Введение 549
1. Основные понятия 551
2. Движение наблюдателя 557
3. Выявление зоны поиска 567
4. Оптимальное распределение поисковых усилий 576
5. Поиск в случае движущейся мишени 594
6. Поиск дискретно локализованных объектов 611
7. Поиск активно ускользающей мишени 623
8. Вопросы практического применения 627
Литература 628

III-7. Имитационное моделирование, *Д. Гэйвер* 630

1. Введение 630
2. Этапы имитационного эксперимента 630
3. Формирование модели 632
4. Методы генерации случайных чисел 634
5. Построение имитационной модели и методы уменьшения дисперсии 640
6. Статистический анализ данных 648
Литература 653

III-8. Вычислительные аспекты имитационного моделирования, *Д. Гордон* 655

1. Имитационное моделирование системы 655
2. Модели систем 657
3. Модель механического цеха 660
4. Отображение системы 661
5. Процесс имитации (имитационный эксперимент) 663
6. Накопление статистических данных 664
7. Обработка списков 664

8. Языки имитационного моделирования 666
9. Алгоритмы управления имитационными моделями 666
10. Способ организации языка GPSS 667
11. Модели механического цеха на языке GPSS 670
12. Структура системы SIMSCRIPT 671
13. Модель механического цеха на языке SIMSCRIPT 672
14. Сравнительные характеристики языков имитационного моделирования 674
Литература 675

III-9. Динамическое программирование, *Э. Денардо* 680

1. Введение 680
2. Прототип многошагового процесса принятия решений . . . 681
3. Некоторые принципы динамического программирования . . 684
4. Пример 686
5. Состояния 688
6. Неопределенность 690
7. Язык для описания многошаговых процессов принятия решений 692
8. Марковская модель процесса принятия решений 696
9. Заключение 702
Литература 703

Предметный указатель 704

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
В 2-х ТОМАХ

1

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Старший научный редактор Л. П. Якименко
Младший научный редактор Н. И. Сивилева
Художник В. А. Медников. Художественный редактор Л. Е. Безрученков
Технический редактор Е. С. Потапенкова. Корректор В. И. Постнова

ИБ № 2219

Сдано в набор 25.11.80 г. Подписано к печати 15.05.81 г.
Формат 60 × 90¹/₁₆. Бумага типографская № 1
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Объем 22,25 бум. л.
Усл. печ. л. 44,50. Усл. кр. отт. 44,50. Уч.-изд. л. 46,78. Изд. № 20/0697
Тираж 20 000 экз. Зак. 01121. Цена 3 р. 60 к.
ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7
«Искра революции» Союзполиграфпрома Государственного Комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва 103001, Трехпрудный пер., 9

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

В настоящее время методы исследования операций широко применяются в самых различных областях человеческой деятельности. В нашей стране теоретическим аспектам и практическим применениям методов исследования операций придается исключительно большое значение, о чем свидетельствует значительное количество публикаций по этим вопросам. Однако очень важно иметь руководство, в котором были бы отражены все направления теории исследования операций. Поэтому издание на русском языке двухтомника по исследованию операций, написанного группой ведущих американских специалистов под редакцией Дж. Моудера и С. Элмаграби, представляет значительный интерес.

Исследование операций как самостоятельное научное направление возникло из потребностей наилучшей организации боевых действий, а также прогнозирования их исхода при принятии командованием различных решений. С помощью методов исследования операций можно планировать стратегические и тактические военные операции, в частности, в условиях неполного знания о состоянии вооруженных сил противника.

Математические методы этой науки используются при проектировании сложных авиационных, ракетных и космических комплексов. Основу математического аппарата проектирования составляют линейное и нелинейное программирование, способы принятия решений, теория массового обслуживания, теория игр и имитационное моделирование.

После второй мировой войны методы исследования операций получили широкое применение при перспективном и текущем планировании научно-исследовательских работ, проектировании различных объектов, управлении производственными и технологическими процессами, прогнозировании развития отдельных отраслей промышленности и сельского хозяйства. Особенно часто к ним обращаются при решении задач распределения трудовых ресурсов и запасов, назначения сроков профилактического ремонта оборудования, выбора средств транспортировки грузов, составления графиков расписаний перевозок, размещения новых заводов и складов, сбора информации в автоматизированных системах управления и целого ряда других. В таких задачах в качестве критериев эффективности применяются различные целевые функции. Для нахождения оптимальных решений производится максимизация (минимизация) целевой функции. Следует отметить, что при решении таких задач наряду со строгим математическим аппаратом программирования, теории графов, потоков в сетях и оптимального управления применяются эвристические методы, основанные на интуиции разработчиков.

В решении задач проектирования принимают участие группы людей, которые оказывают большое влияние как на сам процесс проектирования, так и на принятие решения на отдельных этапах выполнения проекта. Естественно, что при принятии решения проектировщики учитывают не только рекомендации, полученные на основе расчетов на цифровых вычислительных машинах, но и свои соображения, зачастую носящие качественный характер. Этим вопросам в данном двухтомнике уделяется значительное внимание, так как создаваемые в настоящее время системы автоматизированного проектирования и конструирования представляют собой человеко-машинные комплексы, где принятие окончательного решения возлагается на человека.

Широкий охват направлений в книге не мог не отразиться на уровне написания отдельных глав. В большинстве глав достаточно подробно рассмотрены основные методы решения задач и приведены конкретные примеры. Однако в некоторых из них изложение проведено лишь в общем виде на уровне обзора литературы. Каждая глава заканчивается обширной библиографией, знакомящей читателя с зарубежными работами в области исследования операций.

В первом томе изложены методы исследования операций на базе детерминированных и стохастических моделей. Детерминированные модели анализируются с помощью методов линейного, нелинейного, целочисленного и геометрического программирования, потоков в сетях и оптимального управления. Не оставлены без внимания и задачи большой размерности. Стохастические модели исследуются методами теорий массового обслуживания, полезности, принятия решений и динамического программирования.

Второй том посвящен применению методов исследования операций для решения конкретных практических задач, связанных с оценками надежности систем и объектов, определением глубины их резервирования. Значительное внимание уделено методам системного анализа, моделирования систем и прогнозирования их обобщенных характеристик при планировании проектно-конструкторских работ. Описаны различные модели принятия оптимальных решений в конкретных задачах. Во втором томе дается много практических советов, которые могут помочь читателю ставить и решать собственные задачи. Этому способствует большое количество приведенных примеров из областей промышленности, транспорта, здравоохранения, образования, охраны окружающей среды, туризма и спорта.

Книга предназначена для специалистов, работающих в области исследования операций, автоматизированных систем управления и автоматизации проектирования. Она будет полезна аспирантам и студентам высших технических учебных заведений.

Перевод первого тома выполнен канд. физ.-мат. наук Б. Т. Вавиловым (гл. I-6, III-1, III-2, III-6), канд. техн. наук В. С. Даниличиным (гл. I-1, I-2, I-3, II-1, II-2, II-3, II-4) и канд. физ.-мат. наук Ю. Е. Малашенко (гл. II-5, II-7, II-8, III-3, III-4, III-5, III-7, III-8, III-9); перевод второго тома выполнен канд. техн. наук М. Б. Кацнельсоном (гл. I-1—I-5), В. М. Хранкиным (гл. I-6—I-10), канд. техн. наук В. С. Даниличиным (гл. II-1, II-6, II-7) и канд. техн. наук М. И. Рубинштейном (гл. II-2—II-5, II-8).

Чл.-корр. АН СССР
И. М. Макаров

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первые попытки практического использования системного анализа были предприняты в Великобритании до начала второй мировой войны. Однако становление исследования операций как научной дисциплины относится к 1952 г. и связывается с организацией Американского общества по исследованию операций. Интересно отметить, что к моменту официального рождения нового научного направления были опубликованы всего лишь две работы на эту тему — брошюра П. Блекетта «Исследование операций», появившаяся в свет в 1948 г., и книга Ф. Морза и Д. Кимбелла «Методы исследования операций», опубликованная в 1952 г., и не существовало ни одного специального научного журнала. В последующие годы появился ряд публикаций, которые представляли собой либо труды конференций по исследованию операций (1954, 1957), либо специальные выпуски различных институтов и организаций (The Midwest Research Institute, The Railway Systems and Procedures Association, The American Management Association. The National Industrial Conference Board). В этот же период вышла в свет книга «Исследование операций и административное управление» (Operations Research for Management, 1956) под редакцией Т. Мак-Класки и А. Трифтина и изданы два библиографических указателя, один из которых был подготовлен группой исследования операций Кейсовского технологического института (в 1956 г., с дополнением в 1957 г.), а другой составлен Н. Райли (1953). В 1957 г. была опубликована книга «Исследование операций» под редакцией К. Черчмена, Р. Акофа и Е. Арнофа, в работе над которой принимали участие 14 авторов. В этой книге по общему мнению специалистов нашли отражение самые современные для того времени концепции исследования операций. В течение следующих пяти лет (с 1957 по 1962 г.) по исследованию операций было опубликовано мало работ, их буквально можно перечислить по пальцам.

После 1962 г. положение резко изменилось; появились сотни книг по исследованию операций. Среди них книги, знакомящие читателя лишь с основами исследования операций, монографии по различным специальным вопросам, работы обзорного и библиографического характера, научно-популярные издания и т. д. Но вспышка активности в области исследования операций не ограничилась только выпуском новых книг; во много раз увеличилось число специальных научных журналов, с неимоверной быстротой возросло число научных обществ соответствующей профессиональной ориентации и, что важнее всего, очень быстрыми темпами увеличилось количество научных публикаций, посвященных актуальным проблемам исследования операций. Были опубликованы работы самого разного характера — от сугубо теоретических (некоторые из них помещались в узкоспециализированных математических журналах) до сугубо прикладных (которые иногда печатались в журналах чисто коммерческой направленности). В настоящее время функционируют по крайней мере три организации, занимающиеся реферированием опубликованных работ по исследованию операций.

При таком обилии разнообразных публикаций, действительно относящихся к делу и чисто конъюнктурных, теоретических и прикладных, созданных с целью освещения лишь основ предмета и характеризующихся новизной

рассматриваемых проблем и сложностью представленного материала, необходима книга, написанная ведущими специалистами и представляющая собой краткий и в то же время достаточно полный обзор работ в области исследования операций с учетом тех, которые выполнены в самое последнее время. Такая книга может оказаться в равной степени полезной как для специалистов в данной области, так и для тех, кто хочет использовать результаты исследования операций при решении той или иной конкретной практической задачи, но не желает разбираться в тонкостях теоретических обоснований этих результатов.

Вероятно, наилучший способ представить читателю настоящее издание — это указать цели, которые преследовались авторами при его написании, и отметить те вопросы, которые не были включены в рассмотрение. Прежде всего следует иметь в виду, что это не учебник, поскольку, как правило, авторы приводят окончательные результаты без подробного описания способов их получения. Вместе с тем эта работа не является и обзором (хотя авторы и пытаются осветить широкий круг проблем), поскольку не содержит критического анализа и подробного описания достигнутых результатов и направлений будущих исследований. Наконец, это издание нельзя причислить и к справочникам, поскольку авторы не ограничиваются простым перечислением результатов, полученных в области исследования операций, а прослеживают связь между теорией и практикой.

Книга предназначена как для высококвалифицированных специалистов, теоретиков и практиков, так и для тех, кто только приступает к освоению методов исследования операций. Она издана в двух томах. Первый том снабжен подзаголовком «Методологические основы и математические методы», а второй том имеет подзаголовок «Модели и применения».

В первом томе представлены основные понятия и методы исследования операций. Он состоит из трех частей, материалы для которых подготовлены 21 ведущим специалистом по соответствующим вопросам.

Первая часть носит вводный характер. В ней приводятся сведения по истории развития исследования операций. Возможно, что изложение данного вопроса является наиболее полным по сравнению с другими источниками. В этой части затронуты также вопросы обучения методам исследования операций.

Вторая и третья части посвящены классификации и краткому описанию постановок типовых задач исследования операций и методам их решения. Здесь дан обзор наиболее значительных результатов, связанных с совершенствованием методов исследования операций; существенные теоретические результаты изложены в доступной и краткой форме. Первый уровень классификации рассматриваемых задач нашел отражение уже при формировании частей тома: часть II относится к детерминированным моделям, а часть III — к стохастическим. Эти две части охватывают все виды математического программирования (линейное, целочисленное, нелинейное, «крупномасштабное», геометрическое и динамическое), теорию случайных процессов и теорию массового обслуживания, теорию графов и потоков в сетях, вопросы оптимального управления, теорию полезности и методы принятия решений, теорию игр и методы игрового моделирования, теорию поиска, имитационное моделирование. Для тех, кто не является специалистом в области исследования операций, эти части послужат хорошим введением в данный предмет и помогут им практически освоить конкретные методы и модели. С другой стороны, для специалистов они будут удобным справочником по теоретическим аспектам исследования операций и в ряде случаев помогут им увидеть направления будущих исследований, связанных с нерешенными задачами. Приведенные в конце каждой главы библиографические списки будут полезны читателям обеих категорий.

Второй том посвящен вопросам практического применения теории исследования операций. В его подготовке приняли участие 27 авторов, каждый

из которых имеет опыт использования методов исследования операций в конкретной области организационного управления. Помимо описания конкретных применений методов исследования операций этот том, состоящий из двух частей, содержит материал, касающийся перспективных направлений исследований с использованием таких методов.

Первая часть второго тома посвящена методологии моделирования типичных функциональных систем и способам оценки получаемых при этом результатов. Диапазон исследуемых приложений простирается от таких областей, как прогнозирование, планирование и контроль, до сферы управления трудовыми ресурсами, которой до сих пор уделялось недостаточное внимание в литературе по исследованию операций.

Во второй части рассматривается применение методов исследования операций для решения проблем, возникающих в самых различных областях деятельности человека (здравоохранение, просвещение, эксплуатация транспорта, бытовое обслуживание, организация досуга, энергоснабжение, производственно-технологические процессы).

Хотя в данном двухтомнике освещен широкий круг проблем, ряд вопросов как теоретического, так и прикладного характера не рассматривается. Например, в первом томе даже не упоминается о теории так называемых размытых систем, хотя идеи, положенные в основу этой теории, можно отнести к числу самых новаторских и многообещающих из появившихся за последние 10 лет [1]). Кроме того, во втором томе не рассматриваются такие области, как сельское хозяйство и железнодорожный транспорт.

Следует принести извинения за упомянутые «пробелы» и объяснить, чем они вызваны. Извинения мы приносим читателям, которые хотели бы получить справочные данные по тем или иным вопросам и не нашли их в нашей книге. Оправданием является то, что, как всегда, из-за ограниченного объема книги возникла необходимость в строгом отборе материала, в результате чего упомянутые выше вопросы (как, впрочем, и многие другие) оказались исключенными из окончательного варианта. Мы полагаем, что отбор материала проведен правильно или хотя бы удовлетворительно.

Теперь можно более конкретно определить круг читателей, на которых рассчитан данный двухтомник. Прежде всего он предназначен для научных работников, занимающихся проблемами исследования операций, а также вопросами теории управления и системным анализом, для инженеров-технологов, административных работников и специалистов других профилей, использующих количественные методы анализа при совершенствовании конкретных функциональных систем. Этой книгой могут пользоваться как опытные специалисты, так и начинающие. Для специалистов первый том полезен в двух отношениях: во-первых, они могут найти в нем краткие резюме по тем вопросам, которыми они занимаются, и, во-вторых, получить информацию по другим вопросам и ознакомиться с относящейся к ним библиографией. Этот том полезен и для тех, кто хочет найти метод исследования, пригодный для конкретной ситуации. Для начинающих, которые только приступают к изучению методов исследования операций, первый том также полезен, поскольку в каждой его главе имеется вводный раздел, в котором излагается существо рассматриваемых вопросов в легко доступной форме. Предполагается, что так называемый «начинающий» имеет предварительную подготовку по крайней мере в объеме следующих университетских курсов: стандартного (двухгодичного) курса по математическому анализу и матрич-

---

[1]) Интересующиеся этими вопросами могут обратиться к книге Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive Decision Processes, Zadeh et al., eds., Academic Press, 1975. Исчерпывающий список литературы по данным вопросам приведен в библиографическом указателе Gaines B. R., Kohout L. J., A Bibliography of Fuzzy Systems Theory and Closely Related Topics, University of Essex, Colchester, Essex, U.K.

ному исчислению; одногодичного курса по теории вероятностей и математической статистике; элементарного курса по ЭВМ и программированию; одногодичного курса по методам исследования операций.

Первый том может оказаться полезным также специалистам в области прикладной математики, статистикам, разработчикам ЭВМ и инженерам, занимающимся вопросами анализа и синтеза сложных систем. В настоящее время все большее число математиков начинают видеть в исследовании операций весьма перспективную сферу приложения своих знаний, опыта и интуиции. С другой стороны, даже в таких традиционных дисциплинах, как проектирование технических систем и архитектурных комплексов, важное значение приобретают вопросы оптимизации инженерных решений.

Второй том, содержащий обширный материал по использованию методов исследования операций в самых различных ситуациях, должен заинтересовать как теоретиков, так и «прикладников».

При использовании настоящей книги в целях обучения рекомендуется исходить из следующих соображений. Оба тома можно рассматривать как учебное пособие для студентов, посещающих обычный одногодичный курс лекций по методам исследования операций: эти курсы читают на факультетах организации производства и системного проектирования, исследования операций и, в несколько меньшем объеме, на факультетах, готовящих специалистов в области административного управления, прикладной математики и вычислительной техники.

Полезность данного двухтомника для студентов указанных выше специализаций очевидна, поскольку в первом томе дано всестороннее и в то же время сжатое изложение основ и методов исследования операций, а во втором — указаны разнообразные приложения этих методов, многие из которых нельзя найти в других пособиях. Второй том может быть также использован в качестве дополнения к курсам лекций по количественным методам, которые организуются для предпринимателей. Главная цель подобных лекций состоит в том, чтобы показать, как используются (или могут быть использованы) методы исследования операций при решении коммерческих проблем.

В книге, написанной 48 видными специалистами, подведен итог достигнутому в области исследования операций к середине 70-х годов. На содержании материала, разумеется, отразилось субъективное отношение авторов к излагаемым вопросам. Мы полагаем, что от этого книга только выиграла: читатели получили не «приглаженный» и бесцветный обзорный материал, а оригинальное и порой спорное изложение затрагиваемых вопросов. Очевидно, что не весь материал будет одобрен читателями, кто-то может и не согласиться с некоторыми подходами к классификации и оценке отдельных результатов. Но если читатель все же извлечет полезную информацию и заинтересуется какой-либо проблемой, то мы будем считать нашу задачу выполненной.

Индивидуальные особенности авторов проявились во многом. Например, в некоторых главах ссылки даются лишь на учебные пособия, в которых соответствующие проблемы обсуждаются более детально, а в отдельных главах приводится исчерпывающая библиография. Одни авторы ограничиваются лишь кратким эвристическим обоснованием своих результатов, тогда как другие приводят формальные доказательства. Некоторые авторы воздерживаются от категорических суждений по поводу «перспективности» того или иного метода с точки зрения его практической применимости, но есть и такие, которые менее сдержаны при изложении своих взглядов. Мы как редакторы не пытались «усреднить» стиль и точки зрения авторов и убеждены, что такая политика «невмешательства» только способствовала тому, чтобы материалы книги были не только содержательны, но и достаточно интересно и оригинально изложены.

Не стремясь к исчерпывающему формальному определению исследования операций, мы можем с уверенностью утверждать, что эта наука занимается

анализом функциональных систем, т. е. систем, работа которых определяется решениями людей (в противоположность, например, звездным системам, которые находятся вне сферы управляющих воздействий человека и подчиняются лишь законам природы). Но тогда может возникнуть вопрос: не тождественно ли исследование операций теории систем? На наш взгляд, ответ на этот вопрос может быть только отрицательным, поскольку между указанными дисциплинами имеются определенные различия. Иногда они проявляются лишь в деталях, иногда имеют весьма принципиальный характер. При этом содержание обеих дисциплин в значительной степени обусловлено историей их развития.

Теория систем традиционно всегда была тесно связана с конструированием сложных технических систем (первая разработка в этой области предпринята для телефонии), тогда как исследование операций обеспечивало математическое описание процессов управления. Исследование операций ориентировано на решение задач, для которых можно построить математические модели, позволяющие получать оптимальные решения. Что касается теории систем, то она, используя формальные построения, имеет дело с более сложными задачами и ее методы являются более глобальными и абстрактными. В теории систем применяются количественные методы анализа, а также учитываются социальные и биологические факторы, которые пока трудно количественно оценить. Исследование операций связано с задачами меньшего масштаба по сравнению с теорией систем, причем эти задачи возникают в уже существующих системах, тогда как в теории систем рассматриваются системы, создание которых предполагается лишь в перспективе.

Под системой понимается совокупность динамически взаимосвязанных элементов. Каждая система что-нибудь «выполняет», и то, что она выполняет, можно считать ее конечной целью. Теория систем занимается прежде всего выявлением механизма достижения этой цели, а также механизмов саморегулирования и перехода в состояние равновесия. Исследование операций, ориентированное на построение количественных моделей упомянутых выше механизмов функционирования сложных систем, способно внести в эту теорию важный вклад. Таким образом, вполне правомерно рассматривать исследование операций как одну из дисциплин, способствующих развитию общей теории систем.

Эта книга является результатом усилий большого числа людей, которым мы с удовольствием выражаем нашу признательность. Члены редакционной консультативной комиссии, в частности д-р Р. Феттер и д-р Д. Герц, оказали нам неоценимую помощь на стадии разработки общего плана книги. Хочется выразить благодарность всем авторам, проявившим удивительное терпение и полное понимание по отношению к редакторам, которые иногда были слишком нетерпеливыми, а иногда, как могло показаться, и слишком требовательными. Мы также признательны нашим коллегам, любезно согласившимся просмотреть отдельные главы, в особенности докторам Католического университета в г. Льювене Ж. Иккену и В. Гочету, а также профессорам университета шт. Северная Каролина Марианне Гардиер и Г. Л. Нэттлу.

Джозеф Дж. Моудер
Майами, Флорида

Саллах Е. Элмаграби
Рэйли, Северная Каролина

Часть I
Теоретические основы исследования операций

I-1. История развития и использование методов исследования операций

Х. Майзер[1)]

1. НАЧАЛЬНЫЙ ПЕРИОД

В 1935 г. в Великобритании с целью подготовки эффективных средств противодействия возрастающей угрозе со стороны военно-воздушных сил Германии ученые начали форсированную подготовку серии экспериментов, направленных на разработку системы обнаружения самолетов. Принцип действия этой системы состоял в излучении радиоволн наземным радиопередатчиком с последующим приемом излучения, отражаемого от самолета; такая схема впоследствии получила название радиолокационной. Эти работы были начаты в Орфордниссе, расположенном на восточном побережье Великобритании севернее устья Темзы почти на 100 км, а затем продолжены в Бодси (на 16 км южнее), где впоследствии была сформирована исследовательская группа и установлено разработанное оборудование.

В течение последующих трех лет была подтверждена техническая работоспособность установленных средств обнаружения и созданы практические методы слежения за самолетом и оповещения о его появлении. Однако для повышения эффективности операций перехвата британская истребительная авиация нуждалась в системе сопровождения и наведения самолетов-перехватчиков. Поэтому независимо от работ по созданию системы обнаружения (что было продиктовано интересами секретности) в начале 1936 — конце 1937 гг. были начаты работы по осуществлению «эксперимента Биггин Хилл», идею которого предложил Генри Тайзард. Истребители, взлетающие с аэродрома в Биггин Хилле, расположенном несколько южнее Лондона, использовались в качестве моделей вражеских самолетов, движение которых прослеживалось по сигналам их радиотехнических устройств. Слежение за другой группой истребителей, представляющих самолеты-перехватчики, также осуществлялось с помощью радиотехнических устройств. Эти самолеты направлялись в зону боевых действий. Б. Диккенс провел анализ полученных результатов.

К концу 1937 г. обе системы — система обнаружения и слежения за одиночным атакующим самолетом противника (Бодси) и система сопровождения и наведения взаимодействующих истребителей военно-воздушных сил обороны (Биггин Хилл) — стали разрабатываться совместно. Необходимость обеспечения согласованных действий всех участников таких боевых операций, т. е. людей и технических средств подразделений, действующих в воздухе и на земле, потребовала, чтобы эти работы проводились в условиях

[1)] H. J. Miser, University of Massachusetts.

теснейшего сотрудничества ученых с офицерами и служащими ВВС. «Таким образом, в период между летом 1936 г. и летом 1937 г. была создана техническая и организационная основа системы оперативного управления, без которой боевые действия Великобритании не смогли бы завершиться победой и вряд ли обеспечить защиту страны» [16]. Дальнейшее развитие исследований осуществлялось в направлении перехода от технических экспериментов к разработке эффективной тактики ведения военных действий, причем и эти работы также проводились при тесном сотрудничестве ученых с инженерно-техническим персоналом.

По мере того как новые тактические операции отрабатывались в рамках крупномасштабных учебных действий в воздухе, ученые стали уделять все большее внимание оценке эффективности разрабатываемых операций. Применительно как раз к таким исследованиям А. Раув, который в 1938 г. руководил научной группой в Бодси, использовал термин «операционное исследование»; по-видимому, этот термин обязан своим происхождением именно ему.

Таким образом, справедливо считать Бодси местом зарождения нового научного направления — исследования операций, называемого в Англии операционным исследованием, а период с 1935 по 1938 г.— временем формирования основных положений этого научного направления.

К 1939 г. Н. Уильямс, руководитель работ в Бодси, перешел в распоряжение штаба истребительной авиации британских военно-воздушных сил, с тем чтобы присоединиться к вновь созданной под руководством Гарольда Ларднера группе, продолжившей работы по оценке эффективности и совершенствованию тактических операций. В течение последующих двух лет ценность этих научных исследований, проводимых с участием офицерского состава армии, была подтверждена столь убедительно, что аналогичные научные подразделения были организованы при штабе бомбардировочной авиации (под руководством Б. Диккенса), штабе береговой авиации (выполняющей функции ведения воздушных боевых действий против подводных лодок) и штабе британских сил противовоздушной обороны.

Массированный ночной налет на Великобританию осенью 1940 г. поставил командование сил противовоздушной обороны перед лицом сложных технических и операционных проблем. Чтобы обеспечить их решение, к научной группе при командании этими силами присоединился П. Блеккет, физик, получивший впоследствии за свои работы по исследованию космических лучей Нобелевскую премию. Вскоре вокруг него сформировалась активно и продуктивно работающая группа исследователей, ставшая известной как «кружок Блеккета». В марте 1941 г. Блеккет перешел в распоряжение командования береговой авиации, где организовал новый отдел исследования операций, который внес заметный вклад в повышение эффективности работы этого командования. В декабре 1941 г. с Блеккетом консультировались о возможности организации отдела исследования операций при адмиралтействе, и Блеккет составил краткую памятную записку, озаглавленную «Ученые в сфере операционных исследований» (Scientists at the Operational Level) [11], которая оказала значительное влияние на организацию аналогичных работ по обе стороны Атлантики. В январе 1942 г. Блеккет перешел в распоряжение адмиралтейства для организации там работ по исследованию операций.

Впоследствии отдел исследования операций командования береговой авиации стал ядром группы исследования операций британской армии, и при каждом из основных военных командных органов Великобритании (как в самой стране, так и на других территориях) были сформированы соответствующие отделы.

Когда в войну вступили Соединенные Штаты, командные органы их военно-морских и военно-воздушных сил стали осознавать целесообразность привлечения ученых к разработке военных операций. В 1942 г. капитан

В. Бейкер, офицер противолодочных сил атлантического флота, предложил организовать группу по исследованию операций при командовании противолодочными силами. Формулируя содержание работ и принципы комплектации группы, он использовал ряд положений памятной записки Блеккета от 1941 г. В эту группу, впоследствии переименованную в группу по исследованию операций и подчиненную штаб-квартире главнокомандующего военно-морскими силами США, в качестве руководителя проекта был приглашен Ф. Морз (физик по профессии) из Массачусетского технологического института, а на должность начальника исследовательской группы назначен Уильям Шокли из фирмы Bell Telephone Laboratories, впоследствии ставший лауреатом Нобелевской премии за работы по транзисторам. В это же время командование военно-воздушных сил США командировало в Англию для изучения опыта организации исследований операций В. Бортона Лича, юриста, находившегося в то время на действительной военной службе. После того как он представил доклад, содержащий выводы о целесообразности организации аналогичных работ в США, ему было предложено сформировать отдел исследования операций в восьмой армии ВВС (бомбардировочной авиации), впоследствии передислоцированной в Великобританию. Первые работники этого отдела прибыли на место службы в октябре 1942 г. К концу войны группа по исследованию операций при командовании военно-морскими силами США уже насчитывала в своем составе свыше 70 научных работников, а командование военно-воздушных сил США под руководством Лича организовало свыше двух десятков отделов исследования операций как в тыловых частях, так и в армиях, ведущих боевые действия за границей.

Командование военно-воздушными силами Канады также проявило интерес к вопросам организации и проведения операционных исследований и начиная с 1942 г. сформировало три соответствующих отдела.

Совершенно независимо Эллис А. Джонсон, специализировавшийся в области исследований магнетизма, разработал аналогичные концепции исследования операций и применил их к приемам ведения минной войны; его идеи, использованные при разработке соответствующих наступательных тактических операций, сыграли важную роль в боевых действиях на Тихом океане [23, 45].

Командования вооруженных сил государств оси Рим — Берлин — Токио методы исследования операций не использовали.

Имеющиеся исторические документы и архивы не позволяют точно установить количество тех ученых, которые были заняты исследованием операций во время второй мировой войны, однако даже осторожные оценки свидетельствуют о том, что общее число таких ученых в Англии, Америке и Канаде превышало 700 человек. Их деятельность, слишком разнообразная для того, чтобы можно было охарактеризовать ее полностью, не только охватывала элементы технических решений, оценки результатов тактических операций и новшеств (о чем уже говорилось), но и включала применение соответствующих знаний при планировании тактических операций и выработке стратегии. Наиболее важным для будущего было то, что многие из специалистов увидели в таких научных разработках военного времени зарождение новой науки о функциональных системах, а также возможности использования соответствующих научных знаний для многих видов деятельности в мирное время.

Обзоры исследований военного времени содержатся в работах [2, 11, 23, 45, 52, 55], а также в книге Морза и Кимбелла [40], на которой в основном и базируется приведенная выше краткая справка по истории развития исследования операций.

После второй мировой войны специалисты осознали, что работам по исследованию операций в том его понимании, которое сложилось во время войны, предшествовали многие исследования аналогичной направленности, например работа Ланчестера по моделированию боевых операций [40], вы-

полненная в 1916 г., работы по теории массового обслуживания Эрланга, нашедшие практическую реализацию в начале двадцатого столетия в Копенгагене (см. гл. III-2), исследования Левинсона в области розничной торговли в начале 20-х годов [30]. Однако эти исследования оставались разрозненными до тех пор, пока не были подхвачены общим потоком разработок, начало которого только что было кратко охарактеризовано. Таким образом, есть достаточные основания считать, что появление методов исследования операций связано с выделением самостоятельной области научной деятельности, имеющей продолжительную историю, начало которой положили работы, проведенные во время второй мировой войны.

2. НАУЧНАЯ СУЩНОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Очевидно, что многие из первых исследователей в области исследования операций считали свою работу научной деятельностью; так, в памятной записке Блеккета от 1941 г. подчеркивалось, что работа должна состоять в «научном исследовании операций», и особое внимание обращалось на то, что условия должны соответствовать именно научному характеру работы: «Необходима такая обстановка, которая существует в первоклассном чисто научно-исследовательском институте, и квалификация кадров должна удовлетворять соответствующим требованиям».

Во второй памятной записке («О некоторых аспектах методологии исследования операций»), составленной в 1941 г., но затем переработанной в мае 1943 г., Блеккет развивает эти положения и отмечает [11]:

«Очевидной особенностью исследования операций в том виде, в котором оно проводится в настоящее время, является то, что оно должно иметь строго практический характер. Его цель — содействовать нахождению способов повышения эффективности боевых операций, выполняемых в данный момент или планируемых на будущее. Чтобы добиться этого, изучаются предшествующие операции; затем разрабатываются теории, объясняющие наблюдаемые факты, и в конце концов и факты, и теории используются для прогноза относительно предстоящих операций...

Прогнозирование будущих событий, конечно, всегда сопряжено со значительной неопределенностью, но опыт показал, что вопреки широко распространенному мнению количественные прогнозы можно сделать достаточно точно. Это в значительной степени обусловлено тем обстоятельством, что многие факторы, характеризующие операцию, в течение достаточно продолжительного периода времени остаются почти неизменными. Такая стабильность кажется довольно неожиданной, если иметь в виду множество случайных событий и тех индивидуальных особенностей и способностей людей, которые обычно проявляются даже в ходе небольших операций. Однако все эти различия для большого числа операций сглаживаются, и часто оказывается, что обобщенные результаты сравнительно устойчивы.»

В результате своих исследований Морз и Кимбелл [40] также пришли к выводу, что «поведение крупных подразделений (живой силы и техники), осуществляющих сложные операции, характеризуется удивительной устойчивостью, позволяющей предсказывать исход таких операций с той степенью точности, которую не могли предвидеть ученые, работающие в области естественных наук».

Таким образом, первые специалисты по исследованию операций имели ясное представление о том, что новизна их деятельности обусловлена двумя факторами: свойствами функциональных систем, рассматриваемых в качестве объектов научных исследований, и административными структурами, формируемыми с целью своевременной практической реализации решений, принимаемых на основе результатов этих исследований.

Такое понимание сущности исследования операций остается верным и в наши дни.

2.1. Наука и научный метод

Цель науки — понять и дать объяснение тому, что происходит в природе, т. е. исследовать явления реальной действительности. Наше понимание природы распространяется как на естественные явления, так и на те элементы, которые созданы человеческой деятельностью (явлением считается все, что происходит в этих элементах или осуществляется ими).

Наука начинается с тщательно организованного наблюдения изучаемых явлений. Полученные в результате наблюдения данные приводят ученого к разработке теорий, увязывающих эти факты, а также дающих умозрительное описание и объяснение их. Затем эти теории могут развиваться без обращения к наблюдениям; более существенно то, что они способны дать предсказание того, что произойдет под влиянием различных условий. После этого теоретические выводы проверяются путем новых наблюдений соответствующих явлений; если выводы теории согласуются с данными, полученными в результате этих наблюдений, уверенность в правильности теории возрастает, в противном случае ее следует признать несостоятельной или усовершенствовать. Кемени [25] дает следующую обобщенную характеристику такого процесса:

«Как неоднократно подчеркивал Эйнштейн, наука должна начинаться с фактов и кончаться фактами (независимо от теоретических построений, созданных между ними). Ученый — это прежде всего наблюдатель. Затем он пытается всесторонне описать то, что увидел, и то, что ожидает увидеть в будущем. Базируясь на своей теории, он делает предсказания, справедливость которых снова проверяет только фактами.

Наиболее характерная черта такого метода — его цикличность. Он начинается с фактов, кончается фактами, и факты, завершающие один цикл, являются началом следующего цикла. Ученый считает свою теорию неокончательной и готов отказаться от нее всякий раз, когда факты не подтверждают ее предсказаний. Если ряд наблюдений, предназначенных для проверки справедливости некоторых предсказаний, вынуждают нас отказаться от теории, мы ищем новую или более совершенную теорию. Так как научное познание представляет собой бесконечную цепь развития, можно ожидать бесконечного продолжения и этого циклического процесса».

Только что описанный процесс составляет суть научного метода, а наука — это совокупность знаний, полученных в результате применения этого метода к явлениям окружающей нас действительности.

Таким образом, именно научный метод объединяет все науки; то, что отличает одну науку от другой,— это сфера явлений окружающего мира, выбранная каждой из них для изучения и объяснения. Так, астроном следит за движением планет, звезд и других тел во Вселенной; геолог изучает явления в земной коре и т. д.

Однако в данном вопросе следует проявлять осторожность и не воспринимать такую схему научного метода как бихевиористическое описание деятельности ученого. Хотя отдельные научные работы действительно следуют изложенному принципу, в большинстве случаев он не выдерживается: например, бывает так, что теории появляются до того, как обнаружены соответствующие им явления (недостаток, довольно типичный для исследования операций на современном этапе), а теории, основанные на изучении отдельных явлений, долго остаются непроверенными новыми фактами и т. д. Таким образом, ученый может начать работу с любого этапа описанного процесса и двигаться в любом направлении для получения крупиц знаний. Однако окончательный синтез подтвержденных знаний достигается в соответствии с описанной схемой научного метода.

2.2. Исследование операций как наука

Следуя изложенным соображениям о философских аспектах науки, можно сказать, что в исследовании операций используется научный метод для изучения и объяснения явлений, связанных с *функциональными системами*, так как в рамках данной дисциплины изучается определенный круг явлений реальной действительности. Такие системы нередко включают людей и механизмы, которые действуют в условиях реального мира, причем слову «механизм» мы придаем достаточно общее значение, охватывающее все случаи — от механических устройств, обычно определяемых их названиями, до сложных социальных структур, функционирующих в соответствии с установленными правилами.

Научная дисциплина, называемая исследованием операций, наблюдает реальные явления, связанные с функциональными системами, разрабатывает теории (которые многие исследователи называют *моделями*), предназначенные для объяснения данных явлений, использует эти теории для описания того, что произойдет при изменении условий, и проверяет предсказания новыми наблюдениями.

Таким образом, исследование операций — наука, так как эта дисциплина использует научный метод для получения соответствующих знаний и отличается от других наук предметом исследований. Она изучает явления, связанные с функциональными системами, в том аспекте, который почти не рассматривается другими науками.

Учитывая этапы реализации научного метода, для любой научной дисциплины можно ожидать систематических публикаций четырех категорий, в которых соответственно приводятся результаты, получаемые при наблюдении явлений, и специальные способы проведения таких наблюдений; даются построения математических моделей; описывается применение этих моделей для составления прогноза на основе полученных результатов; проводится проверка прогнозов путем сравнения с результатами новых наблюдений.

В части II описываются методы исследования операций на базе детерминированных моделей, которые были разработаны после второй мировой войны: линейное программирование, целочисленное программирование, теория графов, потоки в сетях, геометрическое программирование, нелинейное программирование, программирование для случая задач большой размерности, теория оптимального управления. Часть III содержит восемь разделов, посвященных теоретическим направлениям исследования операций, связанным со стохастическими моделями: случайным процессам, теории массового обслуживания, теории полезности, анализу управляющих решений, теории игр, теории поиска, имитационному моделированию и динамическому программированию.

В части IV описываются наиболее важные модели, разработанные применительно к тринадцати группам процессов, являющихся достаточно общими для многих областей применения методов исследования операций: прогнозирования; учета; финансовой деятельности и управления экономикой; сбыта и рекламы; управления трудовыми ресурсами; экономического анализа инвестиций; информационных систем для управления; вычислительных и информационных систем; выбора, планирования и управления разработкой проекта; управления запасами; составления календарных планов производства и последовательности работ; замены, ремонта и анализа надежности оборудования; размещения и загрузки производственных мощностей; планирования производства. Эта часть справочника содержит также раздел, посвященный анализу по критерию «затраты — выгода».

В части V описывается использование этих и других теоретических положений и моделей при анализе процессов в девяти областях применения, для которых методы исследований операций по состоянию на 1974 г. были

достаточно хорошо разработаны. Здесь рассмотрены военные проблемы, работа государственных органов, городские системы, здравоохранение, системы образования, транспорт, коммунальное обслуживание, отрасли промышленного производства и технологические процессы.

Более подробные сведения о результатах исследований и методах их проведения можно найти в приводимых списках литературы. Поскольку публикаций, специально ориентированных на общие методы исследования операций, пока еще недостаточно, то рассматривать в данной книге соответствующие вопросы в качестве самостоятельных представляется нецелесообразным. Однако можно ожидать, что в дальнейшем такая литература появится.

Во всяком случае на протяжении всей истории развития методов исследования операций научные работники следовали рекомендациям Блеккета (из его памятной записки), согласно которым исследование операций, как и любая другая наука, не базируется на использовании точных копий аналитических методов какой-либо другой науки, а требует разработки своего собственного математического аппарата — методов исследования операций, ориентированного на специфику, присущую этой области и задачам исследования. Этот аппарат не должен оставаться неизменным; наоборот, он должен меняться в соответствии с характером исследуемых задач.

Во время второй мировой войны большинство работ по исследованию операций основывалось на адаптации методов и подходов, заимствованных из других наук; в частности, построение большинства математических моделей базировалось на непосредственном использовании средств математического анализа, аппарата теории вероятностей и статистики, и довольно часто отправным моментом построения моделей служило сходство с моделями, используемыми другими науками. Заметным исключением из этого правила стала разработка теории поиска, выполненная группой по исследованию операций при ВМС США (см. гл. III-6). Таким образом, новые теоретические направления, краткое изложение которых дается в частях II, III и IV, были развиты в основном в послевоенное время. Основы теории ведения боевых действий заложены Ланчестером [40] в 1916 г., и, хотя во время войны математические аспекты этой теории исследовались достаточно интенсивно, непосредственного применения при разработке операций военного времени она не нашла; действительно, вплоть до 1954 г. эта теория не была достаточно проверена [20].

Однако после второй мировой войны исследования новых явлений реального мира и теории для их объяснения развивались очень интенсивно, о чем убедительно свидетельствует материал частей IV и V.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Зарождение исследования операций как научной дисциплины было обусловлено неотложным требованием решения важных практических проблем. Поэтому в процессе становления и развития исследования операций научные работники, которые занимались соответствующими исследованиями, не только заложили фундамент некоторого нового научного направления, но и использовали полученные знания для практического решения проблем. В течение второго и третьего десятилетий своего существования группы по исследованию операций значительно выросли и стали достаточно отличаться друг от друга по направлениям. Однако тесная связь между исследовательскими и практическими аспектами разработок оставалась характерной особенностью данной дисциплины: термин „исследование операций“ как раз и подчеркивает их неразрывность. Итак, исследование операций включает как научное исследование систем, так и соответствующие

виды технической деятельности, направленной на практическую реализацию результатов таких исследований.

Однако эти прикладные аспекты исследования операций предполагают не только простое применение знаний, полученных в результате использования теории, но требуют и наличия творческого начала (ориентации работы в желаемых направлениях), а также профессионального умения и навыков практического проектирования (направленных на выполнение требуемых задач или решение важных проблем). Кроме того, важно обеспечить внедрение результатов работ.

Ввиду секретности подробности исследований военного времени долгое время не находили отражения в открытой печати; однако теперь многое из того, что было сделано в тот период, уже опубликовано (см. литературу, упоминаемую в первом разделе данной главы). И в настоящее время ряд практических аспектов исследования операций не рассматривается в открытых публикациях из-за ограничений, накладываемых промышленными фирмами и законодательными органами. Однако имеющаяся литература, хотя и представлена в силу указанных ограничений преимущественно работами теоретического характера, все же содержит описание многих примеров использования методов исследования операций, причем их намного больше, чем можно было включить в краткий список, приводимый в книге. Даже при случайном поиске публикаций соответствующего характера можно встретить интересные и впечатляющие примеры применения методов исследования операций; такие примеры описываются в части V. Читатели, интересующиеся равними работами такого характера, которые теперь считаются классическими, могут найти интересный для себя материал прежде всего в публикациях [19, 43, 51].

Однако литературы, освещающей опыт творческого подхода и конкретного проектирования на базе методов исследования операций, сравнительно мало, и пока еще нельзя отвести для ее обсуждения отдельную главу книги. Наибольший опыт в этом отношении накоплен в военной области [47], но в настоящее время заметен существенный прогресс и в невоенных приложениях [46].

Вопросы профессионального отношения к практической стороне исследования операций и реализации его результатов обсуждались уже в первых работах; в них подчеркивалась важность этих вопросов и содержались соответствующие рекомендации. Например, Блеккет [11], а также Морз и Кимбелл [40], основываясь на практическом опыте своей работы во время войны, рассматривали вопросы о том, каким образом специалисту следует получить одобрение своей работы, в каких условиях должна выполняться работа и какие отношения он должен поддерживать с теми, кто пользуется его рекомендациями. В связи с этим следует отметить четыре момента:

1. Вопросы, связанные с проведением исследования операций, рассматриваются в гл. 1—2.

2. Комиссия Американского общества по исследованию операций (Operations Research Society of America — ORSA) сформулировала некоторые руководящие принципы по порядку проведения исследования операций [14]. Это предложение было встречено на первых порах весьма критически, и, хотя сформулированные принципы опираются на практический опыт военного времени и двух последующих десятилетий, по-видимому, еще рано говорить о том, будут ли они приняты в качестве постоянного руководства в практической деятельности при изменении обстановки в будущем.

3. Взаимоотношения групп исследования операций с организациями-заказчиками изучены достаточно подробно. Хотя в настоящее время подробное и конструктивное обобщение таких работ отсутствует, для начального ознакомления с этими вопросами читатель может обратиться к работам [41, 48], где приведены списки соответствующей литературы.

4. Довольно сжатый материал данной главы содержит ретроспективный обзор развития методов исследования операций; рассматриваются также вопросы, относящиеся к будущему периоду. Однако в этой главе почти полностью игнорируется тот факт, что исследование операций реализуется в условиях, формируемых коллективами людей, и фактически конечная его цель — понять их поведение, с тем чтобы направить их действия в желаемом направлении. В действительности же деятельность, связанная с исследованием операций, становится лишь одним из элементов поведения сложной системы, которую мы называем большим коллективом людей. Понимание этого естественно приводит к важным выводам практического характера.

4. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ В ПЕРИОД С 1945 ПО 1975 г.

В пределах одной главы этой книги невозможно исчерпывающе описать историю развития методов исследований операций в течение последних трех десятилетий. Другие главы, содержащие достаточно богатый материал, в известной мере восполняют этот пробел. Поэтому в данной главе дается лишь очень краткое изложение некоторых более формальных вопросов, сопутствующих материалу, представленному в следующих главах. К ним относятся некоторые характерные тенденции развития методов исследования операций в рассматриваемом периоде, возникновение и развитие профессиональных ассоциаций, рост количества издаваемых журналов и книг по исследованию операций и развитие системы профессионального образования.

4.1. Основные тенденции развития

Хотя большинство специалистов, занимавшихся во время войны исследованиями операций, вернулись после ее окончания к своей довоенной деятельности, со сферой военных приложений осталось связанным сильное ядро специалистов, желавших продолжить сотрудничество, которое оказалось весьма продуктивным в годы войны. В последующее десятилетие значительное развитие методов исследования операций имело место не только на этой основе, но и за счет создания новых подразделений. Так, в США группа по исследованию операций ВМС превратилась в расширенную группу оценки операций (под руководством Джакинто Стейнхарда), работающую по контракту с Массачусетским технологическим институтом. ВВС США также расширили свои отделы исследования операций (под началом Ле-Рой А. Бразерса), а в 1948 г. командование сухопутными войсками США по контракту с университетом Джона Гопкинса сформировало управление по исследованию операций, начальником которого был назначен Эллис А. Джонсон. В 1949 г. объединенный комитет начальников штабов создал группу оценки систем вооружения, первым техническим директором которой был назначен Филип М. Морз. В то же время ВВС учредили Проект РЭНД при авиационной корпорации «Дуглас», а в 1949 г. это подразделение стало уже корпорацией РЭНД. К началу 50-х годов эти организации были укомплектованы штатом сотрудников, численность которого превышала численность лиц, занимавшихся в военное время исследованием операций во всех странах-союзниках, вместе взятых, причем эти организации обеспечивали очень широкий диапазон исследований для организаций-заказчиков. Подобным же образом, хотя и не столь интенсивно, происходило расширение фронта исследований операций в Канаде и Великобритании.

После окончания войны эти организации обратили свое внимание на широкий круг проблем, связанных с планированием, и получили много полезных результатов в таких направлениях, как моделирование с помощью

ЭВМ (см. гл. III-7 и III-8), анализ по критерию «затраты — выгода» (см. гл. IV-14) и системный анализ [47]; были достигнуты значительные успехи и в теории поиска, теории игр, программировании, теории полезности и в других областях. Располагая многочисленным персоналом, эти организации смогли, значительно расширив круг проводимых исследований, приступить к крупномасштабному исследованию военных стратегий. Одновременно фирмы, выполняющие заказы военных ведомств, существенно расширили работы по исследованию операций применительно к заявкам на проектные разработки и исследования в области планирования, а ряд фирм, занимавшихся исключительно исследовательскими работами, приступили к проведению большого объема таких работ военного характера.

Благодаря этому произошли коренные изменения в планировании и принятии важнейших решений в области военной стратегии. Однако это было обусловлено не только проведенными исследованиями, но и влиянием многих лиц из исследовательских организаций, занявших ключевые посты в военных ведомствах. Так, например, пост начальника контрольно-финансового управления министерства обороны США с 1961 по 1965 г. занимал Чарльз Дж. Хитч, крупный экономист корпорации РЭНД, бывший ранее президентом Американского общества по исследованию операций, а в 1973 г. другой руководящий работник корпорации РЭНД — Джеймс Р. Шлезингер — был назначен министром обороны США.

Хотя исследование операций и оказало сильное влияние на планирование военной стратегии и систем вооружения, вызывает большое удивление тот факт, что полученные выводы не смогли существенно повлиять на военную политику США в связи с войной во Вьетнаме.

Одновременно наблюдался рост исследований операций в основных отраслях промышленности и в научной деятельности университетов. К 1955 г. центр тяжести интересов исследовательских групп стал явно смещаться в сторону работ в невоенных сферах. Одним из показателей этого был быстрый рост после 1954 г. группы исследователей, концентрирующих внимание на научных методах управления, т. е. специализированном направлении, которое отличается от исследования операций только рядом несущественных признаков.

Уже в 1955 г. Филип М. Морз [38] смог дать обзор состояния исследования операций и сделал предложение уделять больше внимания фундаментальным теоретическим положениям, экспериментам и подготовке новых специалистов в данной области. Материал глав 1—3 свидетельствует об энергичных мерах, принятых в связи с необходимостью подготовки специалистов по исследованию операций, а в частях II, III и IV показана плодотворность теоретических работ, выполненных в течение последующих двадцати лет. Однако специальные работы, посвященные реализации результатов исследования операций, пока еще слишком разрозненны и не столь значительны, чтобы рассматривать их в отдельной главе данной книги. Аналогичные замечания были сделаны ранее относительно литературы по ряду других аспектов исследования операций.

В последнее десятилетие наблюдалось непрерывное расширение сферы применения системного подхода в новых направлениях, особенно заметное в таких областях гражданского управления, как охрана общественного порядка, транспорт, проблемы управления ростом и развитием городов, жилищное строительство, здравоохранение, образование и социальные услуги. Так, например, в 1968 г. был основан институт городского хозяйства, а в 1969 г.— институт развития города Нью-Йорка. Оба этих института разработали весьма разнообразные и эффективные программы, в которых предусматривалось использование методов исследования операций [42, 53]. Фирмы, накопившие опыт по применению методов исследования операций в военной области, существенным образом способствовали расширению использования этих методов при решении задач гражданского управления.

В настоящее время в органах гражданского управления на федеральном уровне работают несколько сотен специалистов по исследованию операций, однако они рассредоточены по небольшим группам или даже работают в одиночку. Таким образом, справедливо оценить состояние развития исследования операций в области гражданского управления в США на 1975 г. как далеко не отвечающее существующим потребностям, однако это направление имеет перспективы заметного развития в будущем [37].

Исследования операций в других странах характеризуются сходными чертами и процессами, но в то же время имеют свои особенности, которые слишком многочисленны и поэтому здесь не рассматриваются. К

Общая оценка развития исследования операций по состоянию на 1975 г. свидетельствует о наличии нескольких характерных тенденций, одни из которых являются согласующимися, а другие — в некоторой степени взаимно противоречивыми. С одной стороны, в последние тридцать лет был достигнут значительный прогресс в области теоретических исследований и приложений, порождающий чувство удовлетворения и ощущение высокого профессионализма; с другой стороны, существует влиятельное меньшинство специалистов, которые не разделяют наступательной философии Черчмена, настаивающего на расширении аспектов и областей применения системного подхода. Некоторые лица видят только недостатки и неудачи в данной сфере деятельности, но есть и такие, кто способен видеть вклад, который действительно сделан и который может быть сделан. О том, что данная дисциплина сохраняет свою жизнеспособность, свидетельствует то, что существует интенсивный взаимный обмен информацией между всеми заинтересованными сторонами. С помощью методов исследования операций рассматриваются самые различные задачи, что расширяет теоретическую основу этих методов и перспективу их развития.

4.2. Профессиональные общества

В апреле 1948 г. несколько ученых, принимавших во время второй мировой войны деятельное участие в исследованиях операций в Англии и периодически собиравшихся на неофициальные встречи для обсуждения своих работ, пришли к соглашению о том, чтобы выступить в качестве учредителей Клуба исследования операций; его первым почетным секретарем стал Дж. А. Джукс. Цель создания клуба состояла в том, чтобы придать неофициальным творческим встречам ученых регулярный характер. В течение последующих шести лет в период между сентябрем и маем в помещении Королевского общества (содействия успехам естествознания) в Лондоне ежегодно проводились такие встречи, на которых члены Клуба обсуждали вопросы использования методов исследования операций в сфере услуг и во многих областях хозяйства, включая сельское хозяйство, хлопчатобумажную, обувную, угольную, металлургическую отрасли промышленности, электроэнергетику, животноводство, строительство и транспорт.

Клубом был основан журнал *Operational Research Quarterly*, первый номер которого вышел в свет в марте 1950 г.; его редакторами были Макс Дэвис и Р. Эддисон.

Учитывая растущий интерес к данной научной дисциплине, 10 ноября 1953 г. члены клуба приняли решение об организации Общества по исследованию операций (Operational Research Society — ORS), членами которого могли стать все лица, занимающиеся этими вопросами. Первым председателем общества был избран О. Г. Венсбрух-Джоунс.

Между тем Национальным исследовательским советом США в 1949 г. был учрежден Комитет по исследованию операций; его председателем стал Горас К. Левинсон — астроном по образованию, который независимо от

других исследователей в 20-х годах начал заниматься вопросами исследования операций в области розничной торговли. Цель создания комитета состояла в повышении интереса к исследованию операций в невоенной сфере; для этого комитет опубликовал получивший широкое распространение технический проспект по исследованию операций со специальными рекомендациями для невоенных приложений. В январе 1952 г. его десять специалистов по исследованию операций встретились в Кембридже, шт. Массачусетс, для обсуждения мер по созданию в США профессиональной ассоциации. После второй, более продолжительной встречи в марте, посвященной дальнейшей детализации планов, 26—27 мая в Нью-Йорке было проведено собрание, на котором было создано Американское общество по исследованию операций (ORSA). Филип М. Морз, являющийся вдохновителем всех этих действий, был избран первым его президентом. Первое заседание нового общества состоялось в ноябре 1952 г., когда вышел из печати первый номер журнала этого общества — *Journal of the Operations Research Society of America* (редактором его был Торнтон Нейдж); в 1956 г. название журнала было изменено на *Operations Research*.

Другая группа научных работников США основала в 1953 г. Институт научных методов управления (The Institute of Management Sciences — TIMS), международную организацию, большинство членов которой работает в США. Первым президентом этой организации был избран Уильям У. Купер. Первый номер журнала этого института — *Management Science* — вышел в свет в сентябре 1954 г.; его редактором был К. Уэст Черчмен.

В январе 1955 г. Рассел Л. Акоф, выдвинутый в то время кандидатом на должность вице-президента ORSA, предложил Б. Г. П. Райветту, секретарю ORS, организовать международную конференцию по исследованию операций. Это предложение сразу же нашло поддержку, и был сформирован организационный комитет, в состав которого вошли в качестве сопредседателей Чарльз Гудви (от ORS) и Торнтон Нейдж (от ORSA и TIMS). 2—5 сентября 1957 г. в Оксфордском университете состоялась первая международная конференция по исследованию операций, в которой приняли участие 250 делегатов из 21 страны [17]. Последующие международные конференции проводились в Эйкс-ин-Провинсе (1960), Осло (1963), Кембридже, шт. Массачусетс (1966), Венеции (1969), Дублине (1972), Токио и Киото (1975). Труды этих конференций являлись своеобразными документами, показывающими текущее состояние и достигнутые успехи в области исследования операций во всем мире [3, 22, 27, 29, 49].

На первой международной конференции в Оксфорде был составлен предварительный план деятельности Международной федерации обществ по исследованию операций (International Federation of Operational Research Societies — IFORS), официально учрежденной 1 января 1959 г. и имевшей сначала в своем составе три организации: ORS, ORSA и Французское общество по исследованию операций (основанное в 1956 г.). Первым секретарем IFORS был Чарльз Гудви.

В период с 1959 по 1975 г. к IFORS присоединились 24 национальных общества других стран; профессиональная ассоциация ЧССР установила тесные контакты с IFORS по каналам соответствующего административного органа. Институт научных методов управления и Общество по математическому программированию, будучи международными организациями, на основе специального соглашения также установили сотрудничество с IFORS. Связи с IFORS поддерживает и одна из узкоспециализированных групп (табл. 1). Однако список организаций, приведенный в табл. 1, не отражает в полной мере масштабов исследования операций. Например, членами Американского общества по исследованию операций, которое является национальной организацией, в 1974 г. состояли специалисты не менее 67 стран. Таким образом, есть все основания считать, что методы исследования операций получили всемирное распространение.

Таблица 1

Общества по исследованию операций, основанные в различных странах мира

(Перечислены общества, которые к 1974 г. вступили в Международную федерацию обществ по исследованию операций — IFORS)

Страна	Общество	Год основания	Год вступления в IFORS
Аргентина	Аргентинское общество по исследованию операций (Sociedad Argentina de Investigación Operativa)	1960	1962
Австралия	Австралийское общество по исследованию операций [1]) (Australian Operational Research Society)	1959	1960
Бельгия	Бельгийское общество по применению научных методов управления [2]) (Société Belge pour l'Application des Méthodes Scientifiques de Gestion)	1958	1960
Бразилия	Бразильское общество по исследованию операций (Sociedade Brasiliera de Pesquisa Operational)	1969	1969
Канада	Канадское общество по исследованию операций (Canadian Operational Research Society)	1958	1960
Дания	Датское общество по исследованию операций (Dansk Selskap for Operationanalyze)	1962	1963
Финляндия	Финское общество по исследованию операций (Soumen Operaatiotukimussentra Oy)	1973	1975
Франция	Французская ассоциация по кибернетике, экономике и технике [3]) (Association Française pour la Cybernétique Économique et Technique)	1956	1959
ФРГ	Общество по исследованию операций (Deutsche Gesellschaft für Operations Research)	1961	1962
Греция	Греческое общество по исследованию операций (Hellenic Operational Research Society)	1963	1966
Индия	Индийское общество по исследованию операций (Operational Research Society of India)	1957	1960
Ирландия	Ирландское общество по исследованию операций (Operations Research Society of Ireland)	1965	1966
Израиль	Израильское общество по исследованию операций (Operations Research Society of Israel)	1966	1969

Продолжение табл. 1

Страна	Общество	Год основания	Год вступления в IFORS
Италия	Итальянское общество по исследованию операций (Associazione Italiana di Ricerca Operativa)	1961	1962
Япония	Японское общество по исследованию операций (Operations Research Society of Japan)	1957	1961
Южная Корея	Корейское общество по исследованию операций (Operations Research Society of Korea)	1970	1972
Мексика	Мексиканская ассоциация по исследованию операций и научному управлению (Asociación Mexicana de Investigación de Operaciones y Administración Cientifica)	1964	1966
Голландия	Секция исследования операций (Sectie Operationele Research)	1958	1960
Новая Зеландия	Новозеландское общество по исследованию операций (Operational Research Society of New Zealand)	1964	1970
Норвегия	Норвежская ассоциация по исследованию операций (Norsk Operasjonsanalyseforening)	1959	1960
Испания	Испанское общество по исследованию операций (Sociedad Española de Investigación Operativa)	1962	1963
ЮАР	Южно-Африканское общество по исследованию операций (Operations Research Society of South Africa)	1969	1973
Швеция	Шведская ассоциация по исследованию операций (Svenska Operationsanalysforeningen)	1959	1960
Швейцария	Швейцарская ассоциация по исследованию операций (Schweizerische Vereinigung für Operations Research)	1961	1963
Англия	Общество по исследованию операций [4]) (Operational Research Society)	1948	1959
США	Американское общество по исследованию операций (Operations Research Society of America)	1952	1959

Продолжение табл. 1

Страна	Общество	Год основания	Год вступления в IFORS
СССР	Технический комитет по исследованию операций [5])	1970	1972

1) С 1959 по 1972 г.—австралийский объединенный совет по исследованию операций (The Australian Joint Council for Operational Research).
2) С 1958 по 1962 г.—отдел бельгийского статистического общества (Belgian Statistics Society).
3) С 1956 по 1964 г.—Французское общество по исследованию операций (Société Française de Recherche Opérationnelle).
4) С 1948 по 1953 г.—Клуб исследования операций (Operational Research Club).
5) Отделение вычислительного центра Академии наук СССР.
Примечания. ЧССР присоединилась к федерации через экономико-математическую комиссию Академии наук ЧССР. Институт научных методов управления (Institute of Management Sciences—IMS) и Общество по математическому программированию (Mathematical Programming Society—MPS) присоединились к федерации как родственные общества. Группа аэрофлота, также вошедшая в IFORS, представляет собой узкоспециализированную организацию, занимающуюся исследованием операций применительно к проблемам мировых авиалиний.
Для справок об адресах и официальных представителях указанных обществ следует обратиться к последнему выпуску журнала *International Abstracts in Operations Research*, издаваемого федерацией.

Установить точное число специалистов всех стран, профессионально занимающихся исследованием операций, не представляется возможнымS однако по данным о количестве членов организаций, входящих в IFOR. и сотрудничающих с этой федерацией, это число по состоянию на 1975 г, можно грубо оценить в пределах 25—35 тыс. человек.

4.3. Журналы

Первым журналом, посвященным исследованию операций, был журнал *Operational Research Quarterly*, вторым периодическим изданием по этой дисциплине стал журнал *Operations Research*; два других американских журнала начали выходить с 1954 г. Аналогичные журналы в ФРГ и Франции издаются с 1956 г. В табл. 2 представлен перечень издаваемых в мире журналов по исследованию операций (по состоянию на 1974 г.), а в табл. 3 указаны 22 других журнала, представляющих значительный интерес для специалистов в этой области. Количество этих журналов и тот объем, который отводится в них вопросам исследования операций, свидетельствуют о существенном росте журнальных публикаций по данному направлению в течение рассматриваемого (до 1974 г.) пятнадцатилетнего периода.

Благоприятным для развития исследования операций является тот факт, что начиная с 1961 г. издается специальный библиографический журнал *International Abstracts in Operations Research* (*IAOR*), в котором концентрируются сведения о литературе по этой дисциплине во всем мире. Сначала этот журнал издавался для IFORS Американским обществом по исследованию операций при содействии организаций—членов IFORS; с 1970 г. все функции, связанные с изданием этого журнала, взяла на себя федерация. Редактором этого журнала был Герберт Гэллихер, а с 1968 г.— Хью Е. Брэдли. Журнал

Таблица 2

Журналы, издаваемые в различных странах мира по вопросам исследования операций

Журнал	Издатель	Год основания
Operational Research Quarterly	Общество по исследованию операций, Англия (Operational Research Society)	1950
Operations Research	Американское общество по исследованию операций (Operations Research Society of America)	1952
Naval Research Logistics Quarterly	Исследовательский отдел ВМС США (U.S. Office of Naval Research)	1954
Management Science	Институт научных методов управления (The Institute of Management Sciences)	1954
Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle [1])	Французская ассоциация по кибернетике, экономике и технике (Association Française pour la Cybernetique Économique et Technique)	1956
Zeitshrift für Operations Research [2])	Общество по исследованию операций (Deutschen Gesellschaft für Operations Research)	1956
Journal of the Operations Research Society of Japan	Японское общество по исследованию операций (Operations Research Society of Japan)	1957
Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle	Центральное бюро по исследованию операций, Брюссель (Centre d'Études de Recherche Opérationnelle, Brussels)	1959
Revue Belge de Statistique d'Informatique et de Recherche Opérationnelle	Бельгийское общество по применению научных методов управления и Бельгийское общество по статистике (Société Belge pour l'Application des Méthodes Scientifiques de Gestion and Société Belge de Statistique)	1961
Metra	Группа Metra, Париж	1962
INFOR [3])	Канадское общество по исследованию операций и Канадское общество по обработке информации (Canadian Operational Research Society and the Canadian Information Processing Society)	1963
Opsearch	Индийское общество по исследованию операций (Operational Research Society of India)	1964
Interfaces	Институт научных методов управления и Американское общество по исследованию операций (The Institute of Management Sciences and the Operations Research Society of America)	1971

Продолжение табл. 2

Журнал	Издатель	Год основания
Ricerca Operativa	Франко Анжели, Милан, Италия (Franco Angeli, editore, Milan, Italy)	1971
New Zealand Operational Research	Новозеландское общество по исследованию операций (Operational Research Society of New Zealand)	1973

[1]) В течение первых десяти лет этот журнал имел название *Revue Française de Recherche Opérationnalle* и издавался французским обществом по исследованию операций—организацией, предшествовавшей указанной в данной таблице.

[2]) Этот журнал начал издаваться в 1972 г. в качестве преемника журнала «Исследование операций» (*Unternehmensforschung*), который был основан в 1956 г. Другой журнал «Вопросы оперативного управления и планирования» (*Ablauf-und Planungsforschung*) начал издаваться в 1960 г., но в 1972 г. его издание было прекращено.

[3]) До 1971 г. этот журнал имел название «Журнал Канадского общества по исследованию операций» (*Journal of the Canadian Operational Research Society*).

Примечание. В данной таблице перечислены только те журналы, в которых основное внимание уделяется вопросам исследования операций.

Таблица 3

Некоторые журналы, представляющие профессиональный интерес для специалистов в области исследования операций

Журнал	Издатель	Год основания
The Engineering Economist	Engineering Economy Division, American Society for Engineering Education	1955
International Journal of Production Research	Taylor and Francis Ltd., London	1961
Trabajos de Estadistica y de Investigacion Operativa [1])	Instituto de Investigacion Operativa y Estadistica, Consejo Superior de Investigaciones Estadisticas, Madrid	1963
Journal of Applied Probability	Applied Probability Trust and the London Mathematical Society	1964
Transportation Science	Transportation Science Sections, Operations Research Society of America	1967
Transportations Research	Pergamon Press, New York	1967
Socio-Economic Planning Sciences	Pergamon Press, New York	1967
Technological Forecasting and Social Change	American Elsevier, New York	1969
Industrial Engineering [2])	American Institute of Industrial Engineers	1969
AIIE Transactions [2])	American Institute of Industrial Engineers	1969

Продолжение табл. 3

Журнал	Издатель	Год основания
Policy Sciences	American Elsevier, New York	1970
Decision Sciences	American Institute for Decision Sciences	1970
The Bell Journal of Economics and Management Science	American Telephone and Telegraph Co	1970
Discrete Mathematics	North-Holland, Amsterdam	1971
Mathematical Programming	Mathematical Programming Society	1971
Networks	Interscience, New York	1971
IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics [3])	IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society	1971
Stochastic Processes and their Applications	North-Holland, Amsterdam	1973
OMEGA	Pergamon Pres, New York	1973
Computers and Operations Ressearch	Pergamon Pres, New York	1974
Policy Analysis	University of California Press, Berkeley, California	1975
Mathematics of Operations Research	The Institute of Management Sciences and the Operations Research Society of America	1976

[1]) С 1950 по 1963 г. этот журнал назывался *Trabajos de Estadistica*.

[2]) Предшествующий указанному в таблице журнал *Journal of Industrial Engineering* издавался с 1949 по 1968 г.

[3]) Предшествующий указанному в таблице журнал *the IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics* издавался с 1965 по 1970 г.

Примечание. В таблице указаны лишь отдельные журналы рассматриваемого профиля, издаваемые на западных языках. Сведения о других аналогичных журналах можно найти, используя библиографию к последним главам этой книги и выпуски издаваемого IFORS библиографического журнала *International Abstracts in Operations Research*.

IAOR выпускается для IFORS издательством North-Holland Publishing, Амстердам, Голландия.

Бо́льшая часть библиографии по исследованию операций, относящейся к периоду до 1961 г., отражена в трех специальных сборниках [4—6], подготовленных Джеймсом Бэтчелором, которые включают соответственно литературу, относящуюся к периодам до 1957 г., 1958—1959 гг. и 1959—1960 г. В четвертом томе [7] приведена библиография и за 1961 г.— первый год, публикации которого отражены в *IAOR*.

Таким образом, в сборниках, подготовленных Бэтчелором, и библиографическом материале *IAOR* указаны опубликованные во всех странах мира работы по исследованию операций от момента зарождения этой дисциплины до наших дней, и журнал *IAOR* продолжает вести текущую библиографию.

4.4. Книги

Вскоре после окончания второй мировой войны были написаны три книги, в которых на профессиональном уровне рассмотрены вопросы, касающиеся развития идей и методов исследования операций в военное время [23, 40, 55], однако сравнительно быстро вышла в свет только вторая из указанных книг — «Методы исследования операций» Ф. Морза и Д. Кимбелла. Первое правительственное издание этой книги в 1946 г. было секретным, в 1948 г. гриф секретности с нее был снят, и в 1951 г. она вышла в открытом издании. Однако получение правительственного разрешения на открытую публикацию двух других книг затянулось более чем на четверть века. Поэтому в течение ряда лет книга Ф. Морза и Д. Кимбелла была единственной общедоступной книгой, в которой последовательно изложены основы исследования операций.

Через несколько лет, в начале 50-х годов, было издано несколько сборников статей и докладов; наиболее заметным и ценным из них был сборник [34], который помимо статей о методах, конкретных ситуациях и общих подходах содержал также краткий очерк истории развития методов исследования операций и тщательно подобранную библиографию.

Первым учебником послевоенного времени, созданным на основе учебной программы и курса лекций, была книга Черчмена, Акофа и Арнофа «Введение в исследование операций» [15], которая получила широкое распространение и во многом содействовала установлению основной проблематики данной дисциплины.

Тем временем стали появляться книги, имеющие конкретную направленность, например: «Введение в теорию игр» Мак-Кинси, «Современный стратег» Дж. Вильямса, «Динамическое программирование» Р. Беллмана, «Игры и решения» Р. Льюса и Х. Райфы, «Линейное программирование (методы и приложения)» С. Гасса, «Теория графов и ее применения» К. Бержа, «Математические методы в теории игр, программировании и экономике» С. Карлина, «Математические методы исследования операций» Т. Саати, а также ряд других книг [8, 12, 13, 18, 26, 32, 33, 35, 39, 54, 57].

К 1960 г. различные по научному уровню монографии и учебники стали появляться достаточно регулярно, а к 1965 г. поток книг стал весьма обильным и в течение последующих десяти лет не уменьшался. В данной главе трудно охарактеризовать все эти книги, однако списки литературы, приводимые в конце последующих глав, помогут читателю отыскать наиболее важные работы по каждому из рассматриваемых направлений.

Особого упоминания заслуживает вышедший в 1969 г. учебник Г. Вагнера «Основы исследования операций» [56]. Этой книге, получившей широкое распространение, в 1969 г. была присуждена премия имени Ланчестера, учрежденная Американским обществом по исследованию операций.

4.5. Профессиональное образование

В первые послевоенные годы большинство опытных специалистов по исследованию операций, как правило, считали область своей деятельности еще недостаточно подготовленной к реализации широкой программы официальных методов обучения. Наличие такого образования или же практический опыт исследований в конкретной области считались равнозначными факторами, и, пожалуй, предпочтение даже отдавалось второму фактору. Такое предпочтение было обусловлено большим практическим опытом первых исследователей в области исследования операций.

Однако организационные условия для подготовки специалистов были созданы достаточно быстро. В начале 50-х годов наиболее распространенной формой подготовки в ряде стран были краткосрочные курсы различной

продолжительности, а в ряде мест была начата подготовка по университетской программе. В течение последующих десяти лет эти программы обучения стали более разнообразными и насыщенными, о чем свидетельствует материал гл. I-3. Так, по данным, содержащимся в отчете Американского общества по исследованию операций за 1973 г., в США насчитывалось не менее 53 университетских программ [44], в других странах наблюдалось аналогичное развитие официальных форм подготовки специалистов. Таким образом, в настоящее время студенту предлагаются широкие возможности выбора программы профессионального образования.

Подготовка в соответствии с этими официальными программами стала признаваться важным показателем квалификации специалиста при поступлении его на работу в данной области, будь это преподавание, научная работа или практическая деятельность.

5. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

История развития исследования операций характеризуется непрерывным ростом масштабов работ и разнообразием их направлений. Сороковые годы можно считать этапом становления дисциплины «исследование операций» и формирования его основных концепций, 50-е годы — периодом интенсивного поиска и развития новых направлений исследований, 60-е годы — этапом значительного укрепления теоретических основ и развития чисто теоретических направлений и, наконец, последнее десятилетие характерно возобновлением поисков новых, существенно расширенных направлений исследования операций, причем к моменту написания данной главы этот процесс продолжал интенсивно развиваться. Каким представляется развитие науки об исследовании операций в будущем, если исходить из ее истории и современного (на 1975 г.) состояния?

Во-первых, можно ожидать интенсивного продолжения работ по развитию теорий и построению моделей, но при более активной деятельности, связанной с проверкой этих теорий на основе фактического материала и их совершенствованием в целях практического использования. Эта тенденция потребует уделять больше внимания методам сбора и накопления информации и данных, получаемых при изучении функциональных систем, а также способам проведения экспериментов на системах этого класса. Такие разработки в свою очередь окажут воздействие на направленность чисто теоретических исследований, в которых характерное для данного этапа преувеличение роли теории исследования операций должно уступить место более сбалансированному подходу, учитывающему различные моменты, включая наблюдение и экспериментальное исследование функциональных систем, а также соответствующие виды практической деятельности.

Во-вторых, принципы системного анализа, успешно используемые в рамках военных приложений, будут распространяться и на другие области применения [47]; этот процесс уже фактически начался, но развивается пока еще слишком медленно [37]. Указанный процесс приведет, кроме того, к расширению сферы использования системного анализа с учетом требований социальных наук [46], особенно при решении проблем гражданского управления на государственном уровне; применение системного анализа на более низких уровнях управления будет также расширяться, но сравнительно медленнее

В-третьих, для того чтобы развить дальше концепцию системного подхода и расширить сферу его применения, необходимо будет найти убедительный ответ на критику со стороны теоретиков, работающих в области общей теории систем [28; 1], и тем самым показать, что представляет собой исследование операций как научная дисциплина.

В-четвертых, под влиянием ученых, таких, как Черчмен, Акоф, Ласло и др., будут пересмотрены и уточнены основные концепции системного подхода, не обладающие в настоящее время внутренним единством и полнотой. Это необходимо для того, чтобы специалисты по исследованию операций пришли к правильному пониманию сущности своей деятельности и усиливающейся тенденции проникновения методов исследования операций в ряд других научных дисциплин. На пути к этому, как и на всех других этапах развития, будет соблюдаться принцип неразрывной связи научных и инженерно-технических аспектов.

В-пятых, исследованию операций будет постоянно присущ интенсивный поиск новых областей исследования и применения.

Корни всех указанных направлений дальнейшего развития исследования операций обладают достаточной потенциальной жизненной силой. Сколь быстро будут развиваться эти направления, зависит от той среды, в которой они будут находиться, что в настоящее время предсказать невозможно. Однако для нормального, пропорционального развития исследования операций как дисциплины необходим соответствующий сбалансированный прогресс во всех отмеченных направлениях.

6. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Если дальнейшее развитие методов исследования операций будет происходить в соответствии с предположениями, сделанными в предыдущем разделе, т. е. каждое из перечисленных направлений будет отвечать требованиям, которые выдвигаются временем, то будущее этой дисциплины связано с многообещающими перспективами роста ее возможностей, масштабов применения и практической ценности.

Однако при этом помимо тех преград, которые существуют уже в данный момент, могут встретиться и другие препятствия, например тенденция к преувеличению роли теоретических направлений, предпочтение в отдельных сферах исследования узкопрофессионального подхода, стремление к изоляции данной дисциплины для сохранения уже завоеванных ею позиций, нежелание реагировать на основные трудноразрешимые проблемы, повторяющиеся время от времени обещания сделать больше, чем позволяют реальные возможности, и излишняя боязнь риска.

Если все эти преграды будут преодолены, недостаточно учитываемым аспектам исследования операций будет уделяться должное внимание, будут развиваться направления, перечисленные в предыдущем разделе главы, уровень исследования операций будет соответствовать важнейшим требованиям времени и, как и до сих пор, будет осуществляться активное взаимодействие с другими специальными дисциплинами, имеющими отношение к решаемым проблемам, то перспективы данной дисциплины будут связаны с возрастанием ее роли и практической ценности, а также с твердой гарантией ее заслуженного признания и поддержки. Я уверен, что мы можем рассчитывать именно на такое будущее исследования операций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ackoff R. L., Science in the Systems Age, Beyond IE, OR, and MS, *Operations Res.*, 21, 666—671 (1973).
2. Air Ministry, The Origins and Development of Operational Research in the Royal Air Force, Air Publication 3368, Her Majesty's Stationery Office, London, 1963.

3. Banbury J., Maitland J., eds., Proceedings of the Second International Conference on Operational Research, Wiley, New York, and Dunod, Paris, 1961.
4. Batchelor J. H., *Operations Research, An Annotated Bibliography*, 1, St. Louis University Press, St. Louis, Missouri, Covers the literature through 1957, 1959.
5. Batchelor J. H., *Operations Research, An Annotated Bibliography*, 2, St. Louis University Press, St. Louis, Missouri, Covers the literature of 1958 and 1959, 1962.
6. Batchelor J. H., *Operations Research, An Annotated Bibliography*, 3, St. Louis University Press, St. Louis, Missouri, Covers the literature of 1960, 1963.
7. Batchelor J. H., Chris N. Athans, *Operations Research, An Annotated Bibliography*, 4, St. Louis Academy Press, St. Louis, Missouri, Covers the literature of 1961, 1964.
8. Beckmann M., Lineare Planungsrechnung, Fachverlag für Wirtschaftstheorie und Oekonometrie, Ludwigshafen, Germany, 1959.
9. Bellman R. E., Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957. [Имеется перевод: Беллман Р. Динамическое программирование.— М.: ИЛ, 1960.]
10. Berge C., Théorie des Graphes et ses Applications, Dunod, Paris, 1958. [Имеется перевод: Берж К. Теория графов и ее применения.— М.: ИЛ, 1962.]
11. Blackett P. M. S., Studies of War: Nuclear and Conventional, Hill and Wang, New York, Part II, 1962.
12. Bowman E. H., Fetter R. B., Analysis for Production Management, Richard D. Irwin, Homewood, Illinois, 1957.
13. Brown R. G., Statistical Forecasting for Inventory Control, McGraw-Hill, New York, 1959.
14. Caywood T. E., Berger H. M., Engel J. H., Magee J. F., Miser H. J., Thrall R. M., Guidelines for the Practice of Operations Research, *Operations Res.*, 19, 1123—1148 (1971).
15. Churchman C. W., Ackoff R. L., Arnoff E. L., Introduction to Operations Research, Wiley, New York, 1957. [Имеется перевод: Черчмен К., Акоф Р., Арноф Е. Введение в исследование операций.— М.: Наука, 1968.]
16. Clark R. W., Tizard, Chapter 7, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1965.
17. Davies M., Eddison R. T., Page T. (eds.), Proceedings of the First International Conference on Operational Research, Operations Research Society of America, Baltimore, Maryland, 1959.
18. Dorfman R., Samuelson P. A., Solow R. M., Linear Programming and Econometric Analysis, McGraw-Hill, New York, 1958.
19. Edie L. C., Traffic Delays at Toll Booths, *Operations Res.*, 2, 107—138 (1954).
20. Engel J. H., A Verification of Lanchester's Law, *Operations Res.*, 2, 164—171 (1954).
21. Gass S. I., Linear Programming, Methods and Applications, McGraw-Hill, New York, 1958. [Имеется перевод: Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения).— М.: Физматгиз, 1961.]
22. Hertz D. B., Jacques Melese, eds., Proceedings of the Fourth International Conference on Operational Research, Wiley, New York, 1966.
23. Johnson E. A., Katcher D. A., Mines against Japan, Naval Ordnance Laboratory, Silver Spring, Maryland, 1973.
24. Karlin S., Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics, I, II, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1959. [Имеется перевод: Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.— М.: Мир, 1964.]

25. Kemeny J. G., A Philosopher Looks at Science, Van Nostrand Reinhold, New York, 1959.
26. Koopmans Tjalling C. (ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, Wiley, New York, 1951.
27. Kreweras G., Morlat G. (eds.), Proceedings of the Third International Conference on Operational Research, English Universities Press, London, and Dunod, Paris, 1964.
28. Laszlo E., The Systems View of the World, George Braziller, New York, 1972.
29. Lawrence J., ed., OR 69, Proceedings of the Fifth International Conference on Operational Research, Tavistock Publications, London, 1970.
30. Levinson H. C., Experiences in Commercial Operations Research, McCloskey and Trefethen, 1954, pp. 265—288.
31. Luce R. D., Raiffa H., Games and Decisions, Wiley, New York, 1957. [Имеется перевод: Льюис Р., Райфа Х. Игры и решения.— М.: ИЛ, 1961.]
32. Magee J. F., Production Planning and Inventory Control, McGraw-Hill, New York, 1958.
33. Manne A. S., Scheduling of Petroleum Refinery Operations, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1956.
34. McCloskey J. F., Trefethen F. N., eds., Operations Research for Management, J. Hopkins Press, Baltimore, Maryland, 1954. (Второе издание вышло в свет в 1956 г.)
35. McKean R. N., Efficiency in Government through Systems Analysis, Wiley, New York, 1958.
36. McKinsey J. C. C., Introduction to the Theory of Games, McGraw-Hill, New York, 1952. [Имеется перевод: Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр.— М.: Физматгиз, 1960.]
37. Miser H. J., Cushen W. E., The Demand for Management-Science Services in the Future in Civil Government, in M. J. White, M. Radnor, D. A. Tansik (eds.), Management and Policy Science in American Government, Problems and Prospects, Lexington Books, D. C. Heath, Lexington, Massachusetts, 1975.
38. Morse P. M., Where is the New Blood? *Operations Res.*, 3, 383—387 (1955).
39. Morse P. M., Queues, Inventories and Maintenance, The Analysis of Operational Systems with Variable Demand and Supply, Wiley, New York, 1958.
40. Morse P. M., Kimball G. E., Methods of Operations Research, National Defense Research Committee, Washington, D. C., 1946. [Имеется перевод: Морз Ф., Кимбелл Д. Методы исследования операций.— М.: Сов. радио, 1956.]
41. Neal R. D., Radnor M., The Relation between Formal Procedures for Pursuing OR/MS Activities and OR/MS Group Success, *Operations Res.*, 21, 451—474 (1973).
42. New York City-Rand Institute, Research in 1970—1971, *Operations Res.*, 20, 474—515 (1972).
43. O'Brien G. G., Crane R. R., The Scheduling of a Burge Line, *Operations Res.*, 7, 561—570 (1959).
44. ORSA Education Committee, Education Programs in Operations Research/Management Science, Operations Research Society of America, Baltimore, Maryland, 1973.
45. Page T., Pettee G. S., Wallace W. A., Ellis A. Johnson, 1906—1973, *Operations Res.*, 22, 1140—1155 (1974).
46. Quade E. S., Analysis for Public Decisions, American Elsevier, New York, 1975.
47. Quade E. S., Boucher W. I., Systems Analysis and Policy Planning, Applications in Defense, American Elsevier, New York, 1968.
48. Radnor M., Neal R. D., The Progress of Management-Science Activities in Large US Industrial Corporations, *Operations Res.*, 21, 427—450 (1973).

49. Ross M., Ed., Operational Research 72, Proceedings of the Sixth IFORS International Conference on Operational Research, North-Holland, Amsterdam, and American Elsevier, New York, 1973.
50. Saaty T. L., Mathematical Methods of Operations Research, McGraw-Hill, New York, 1959.
51. Thornthwaite C. W., Operations Research in Agriculture, *Operations Res.*, 1, 33--38 (1953).
52. Trefethen F. N., A History of Operations Research, McCloskey and Trefethen, 1954, pp. 3--35.
53. Urban Institute, The, Research, 1968--1971, *Operations Res.*, 20, 516--557 (1972).
54. Vazsonyi A., Scientific Programming in Business and Industry, Wiley, New York, 1958.
55. Waddington C. H., OR in World War 2-Operational Research against the U-Boat, Paul Elek Ltd., London, 1973.
56. Wagner H. M., Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969, 2nd Ed., 1975. [Имеется перевод: Вагнер Г. Основы исследования операций.— М.: Мир, 1973.]
57. Whitin T. M., The Theory of Inventory Management, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1953.
58. Williams J. D., The Compleat Strategyst, McGraw-Hill, New York, 1954. [Имеется перевод: Вильямс Дж. Современный стратег.— М.: Сов. радио, 1960.]

I-2 Методика проведения исследований операций

Н. Эйджил[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная глава посвящена методике проведения исследований операций. Мы стремились к тому, чтобы после ознакомления с представленным материалом читатель оказался более подготовленным к практическому выполнению исследований операций и имел больше шансов на их успешное завершение. С одной стороны, поставленная задача достаточно проста, поскольку нетрудно перечислить этапы процесса проведения таких исследований. Фактически эти этапы почти не отличаются от тех, которые присущи всем научным исследованиям. Соответствующие этапы работы уже описаны в других публикациях (см., например, [2] и [5]).

С другой стороны, вопросы, рассматриваемые в данной главе, являются достаточно сложными. По существу, задача заключается в том, чтобы оказать читателю действенную помощь именно в надлежащей реализации этапов, необходимых при проведении исследования операций. Иными словами, трудность состоит не в идентификации отдельных этапов, а в том, чтобы помочь специалисту разработать для каждого этапа конструктивную схему действий, в наибольшей степени отвечающую поставленным задачам. Поэтому основное внимание в данной главе уделяется не столько описанию этапов исследования операций, сколько вопросам их практического выполнения. Рассмотрение этих вопросов сопровождается соответствующими примерами и иллюстрациями. Таким образом, внимание сконцентрировано на том, «как делать», а не «что делать».

Моррис [3] при обсуждении этапов построения моделей правильно отмечает, что схема действия на каждом из этапов достаточно очевидна. Такой же точки зрения придерживаются авторы в большинстве других публикаций, включая и данную главу. Таким образом, первый вопрос очевиден. Почему мы сосредоточили внимание на методике проведения исследования операций? Это вызвано несколькими причинами.

Прежде всего, использование правильной методики гарантирует, что разработчик не сделает ошибки, которую статистики могли бы отнести к так называемой «ошибке третьего рода», т. е. он не будет искать решения неверно поставленной задачи. Грамотное проведение исследования операций предупреждает также и возможность неверного решения правильно сформулированной задачи. Если исследовательская группа руководствовалась правильной методикой, то разработанные модели адекватны изучаемой проблеме и допустимы с точки зрения реализации вычислительного процесса, выполняются ограничения на выделяемые средства и сроки выполнения работы, а внедрение результатов исследования осуществляется квалифицированно и эффективно. В этом случае исследование достигает цели. Кроме того, признание успеха работы заказчиком является наибольшим вознаграждением для разработчика. Именно это создает у него чувство полной удовлетворенности результатами своей работы. Если исследование проводится правильно, то повышается вероятность того, что оно получит одобрение руководства и разработчик будет доволен результатами своей работы. Именно этими причинами обусловлен выбор темы для обсуждения в данной главе.

[1)] Norman I. Agin, Mathematica, Inc.

Следует отметить еще одно обстоятельство: методика и руководящие принципы исследований операций, рассматриваемые в данной главе, не являются универсальными. Каждое исследование имеет свои особенности и требует от исполнителя интуиции, инициативы и воображения, чтобы правильно определить цели проекта и добиться успеха в их достижении. Поэтому материал данной главы может помочь читателю только в ознакомлении с некоторыми достаточно общими принципами и рекомендациями.

Глава построена таким образом, что ее разделы соответствуют основным этапам, характерным для исследований операций. Эти этапы включают: 1) определение целей; 2) составление плана разработки проекта; 3) формулировку проблемы; 4) построение модели; 5) разработку вычислительного метода; 6) разработку технического задания на программирование, программирование и отладку программы; 7) сбор данных; 8) проверку модели; 9) реализацию результатов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЕЙ

Первоочередная цель любого исследования операций заключается в том, чтобы выяснить, что ожидает получить в результате его проведения руководитель или пользователь. Другими словами, требуется определить, каковы предполагаемые результаты завершения проекта.

Цели исследования следует формулировать, исходя из сущности решения или решений, на получение которых ориентирована данная работа. Специалисту по исследованию операций следует особо позаботиться о том, чтобы формулировка цели работы не была слишком узкой. Нельзя ставить и излишне широкие цели, что обычно приводит к безуспешной попытке сразу решить все проблемы фирмы в рамках одного всеобъемлющего исследования.

Трудности, с которыми обычно приходится сталкиваться при выяснении у руководителя истинных целей исследования,— это вопрос, который обсуждается очень часто и иллюстрируется многими примерами. Приводимый ниже пример, в котором рассматривается в известном смысле экстремальная, но в то же время вполне реальная ситуация, поясит те сложности, которые приходится преодолевать при формулировке целей исследования. Одним из администраторов был поставлен вопрос об изучении последствий слияния трех предприятий фирмы в одно. Новое предприятие предполагалось создать на новом месте. Предварительный анализ экономических последствий такого слияния показал, что существующие предприятия функционируют независимо друг от друга и их объединение приведет только к увеличению затрат на производство продукции. Администратор должен был бы знать о таких последствиях, поэтому, прежде чем начать детальное изучение проблемы, было решено выяснить у него, что он ожидает получить в результате исследования. Для этого обсуждения потребовалось несколько дней. В результате оказалось, что главный вопрос заключается в психологической несовместимости администратора с профсоюзным лидером одного из трех предприятий, которые намечалось объединить. После того как выяснилось это обстоятельство, в административно-управленческий штат фирмы был введен вице-президент по вопросам трудовых отношений между администрацией и профсоюзами и идея объединения предприятий отпала. Тем самым было предупреждено проведение исследования, которое практически не имело шансов на успешное завершение.

Специалисту по исследованию операций всегда угрожает опасность неверного понимания или неточной формулировки целей исследования, и, чтобы он не допустил ошибки на этой стадии, ему обычно рекомендуют не жалеть усилий для выяснения существа проблемы. Однако в таких рекомендациях обычно говорится лишь о том, что надо делать, и ничего не сказано о том, как это сделать (поэтому такие советы приносят мало пользы).

Рекомендуется также установить контакт с соответствующими административными работниками. Говорить об этом тоже проще, чем сделать. На самом же деле трудность заключается в другом. Необходимо знать, каким образом организовать работу на этом начальном этапе исследования и как установить тесные контакты с администрацией, чтобы лучше уяснить ее нужды и требования. Другими словами, исследователю надо четко представлять, какова должна быть линия его поведения, чтобы после серии обсуждений с администрацией были выявлены ее действительные проблемы и потребности. В связи с этим исследователю можно дать следующие пять советов:

1. Он должен не только слушать, но и слышать, что ему говорят. Очевидность сказанного уступает только частоте, с которой этому совету не следуют на практике.
2. Он должен поставить себя на место руководителя и посмотреть на проблему его глазами. Другими словами, исследователю следует уяснить задачи, которые были поставлены перед руководителем, ограничения и политические обстоятельства, влияющие на его поведение, противоречивые цели, между которыми он старается найти компромисс. Насколько это возможно, исследователь должен знать личные качества руководителя, его склонности и предубеждения.
3. Исследователь должен также знать организацию, которая будет оказывать влияние на его деятельность. Ему следует тщательно ознакомиться с существующей иерархией управления, функциями различных групп, предыдущими исследованиями соответствующих вопросов и т. д.
4. Он должен воздерживаться от высказывания своего предвзятого мнения о проблеме и попыток втиснуть ее в рамки своих прежних представлений ради того, чтобы использовать желательный для себя подход к ее решению.
5. Очень важно, чтобы утверждения и замечания руководителя не оставались непроверенными. Слишком часто исследователь сидит и из вежливости и почтительности лишь пассивно выслушивает руководителя. Такое поведение никогда не приведет к выявлению сути проблемы. Исследователь должен спрашивать и проверять. Почему вы это говорите? Что вы под этим подразумеваете? Когда вы хотите сделать это? Подобные вопросы исследователь должен задавать все время.

Добиться четкого понимания целей исследования, прежде чем начать его, необходимо, но, к сожалению, недостаточно. Требуется также предвидеть, как эти цели могут измениться с течением времени или в связи с тем, что исследование заинтересует руководителей другого уровня. Следующий пример служит характерной иллюстрацией того, что тщательное определение целей является лишь необходимым, но во многих случаях еще не достаточным отправным моментом успешного исследования.

Для кредитной фирмы требовалось разработать имитационную модель ее деятельности в части оформления и оплаты счетов клиентов—владельцев кредитных карточек. Цель разработки модели состояла в том, чтобы содействовать решению вопросов оперативного характера, касающихся: а) распределения счетов клиентов между различными расчетными центрами фирмы; б) установления сроков оплаты различных групп счетов в пределах месячного периода. Исследование проводилось под руководством вице-президента фирмы, ответственного за решение указанных задач. Была разработана имитационная модель, описывающая порядок, в соответствии с которым три расчетных центра фирмы должны были осуществлять перечисление сумм на оплату счетов клиентов. Так как условия выдачи и погашения кредита для клиентов различных категорий не одинаковы, поведение клиентов в части использования кредита рассматривалось в модели как функция типа счета, местоположения клиента и ряда других факторов. Динамика погашения кредита

по каждому типу счета тоже была различной, и при построении модели это обстоятельство тоже было учтено. В итоге имитационная модель позволяла определить лаги между занесением расходов на счет владельца кредитной карточки, оплатой фирмой услуг тех предприятий сферы обслуживания, к которым обращался владелец кредитной карточки, предъявлением счета клиенту фирмы и поступлением от него взносов на погашение кредита. Получающиеся в результате моделирования перспективные оценки движения наличных денежных средств фирмы должны были использоваться в качестве основы для принятия решений по упомянутым выше вопросам.

Была разработана машинная программа имитационной модели и начато ее использование. Отчет об успешном завершении работы был представлен некоторым руководящим работникам фирмы, включая заведующего финансовым отделом, который понял, что разработанная модель могла бы служить и для описания движения средств в банковской системе фирмы и поэтому была бы полезна ему для прогнозирования возможного избытка или дефицита наличных денежных средств в течение ближайших нескольких недель. Он высказал пожелание использовать такую модель при решении вопросов краткосрочного финансирования. Чтобы обеспечить эти дополнительные функциональные возможности модели, потребовалась ее доработка, включающая составление новых программ и повторные испытания. Если бы целевое назначение модели с самого начала было определено с учетом интересов всех уровней руководства, процесс ее разработки был бы более эффективным. Несмотря на то что указанные дополнительные возможности модели были выявлены исследовательской группой в начале работы, выделение средств на их реализацию предусмотрено не было. Заведующий финансовым отделом не проявлял интереса к проекту до тех пор, пока ему не была продемонстрирована успешно работающая имитационная модель, способствующая решению текущих вопросов по кредитованию.

Приведенный пример — это лишь одна из иллюстраций достаточно распространенной ситуации, с которой должен быть знаком исследователь. Ее можно определить как синдром китайского бейсбола. Возможно, наиболее важный результат ознакомления с данной главой будет состоять в том, что она поможет исследователю предотвратить такую ситуацию и тем самым избежать ее пагубного влияния. Важность этого момента определяется тем фактом, что во многих случаях, когда исследователей обвиняют в решении неверно поставленной задачи, действительным препятствием успешному проведению работы является та или иная разновидность синдрома китайского бейсбола.

Описать эту игру легко; она аналогична американскому варианту бейсбола, за исключением следующего правила: с того момента, когда мяч вылетел из руки подающего, и до мгновения, пока он не окажется в рукавице принимающего, команда, находящаяся в поле, имеет право перемещать базы любым желаемым образом. Читатель, несомненно, поймет, что он сам неоднократно оказывался в роли невольного участника игры в китайский бейсбол.

3. СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНА РАЗРАБОТКИ ПРОЕКТА

Второй этап исследования — составление плана выполнения проекта. Исследование операций во многих отношениях представляет собой творческий процесс. Поэтому нередко возникает естественный вопрос: как можно планировать такую работу? Ответ достаточно прост, если под планированием подразумевается не выбор методов выполнения тех или иных работ, а установление реперных точек, т. е. временных координат, соответствующих необходимым срокам завершения определенных видов работ. Последнее — одна из необходимых форм контроля за ходом разработки проекта, тогда как

первое — это творческая процедура. Однако установление сроков выполнения промежуточных этапов стимулирует проявление творческой активности и содействует своевременному окончанию соответствующих работ. Многим знакома обстановка, царящая в последние день-два до истечения крайнего срока выполнения работы. Поэтому требование уложиться в сроки, установленные планом, заставляет проявлять творческую инициативу (необходимость — мать изобретательности), подталкивает исследователя к завершению работы и в конечном счете содействует успешной разработке проекта в целом. И наоборот, отсутствие установленных сроков и их нарушение приводят к пассивности в работе исследователей и уменьшению интереса к ней со стороны руководства.

Нарушение графика работ создает дополнительные осложнения. Руководители часто бывают заинтересованы в том, чтобы работа была выполнена в сжатые сроки. Если проведение исследования чрезмерно затягивается, то проблема или по крайней мере ее понимание руководителем изменяется. В результате исследователь решает не ту задачу, которая нужна в данный момент. Разумеется, руководитель может при этом использовать отмеченное выше правило китайского бейсбола. Но исследователь и сам может создать определенные трудности, если не сумеет правильно распределить свою работу во времени, выбрать нужную линию поведения и придерживаться установленного графика работ.

Здесь уместно высказать одно предостережение. Хотя составление плана работ дисциплинирует исследователя и помогает ему работать по определенному графику, влияние плана оказывается менее эффективным при проявлении одного характерного обстоятельства, которое нередко сопутствует успешному проведению работы и может быть названо синдромом «жадности». Этот синдром — следствие того факта, что руководитель вовремя не оценил потенциальные возможности проводимого исследования. Наглядным примером служит рассмотренная ранее ситуация, связанная с разработкой имитационной модели движения наличных денежных средств для кредитной фирмы. Синдром жадности во многих случаях требует от исследователя выполнения дополнительного объема работ, а также преждевременного внедрения модели и участия в решении текущих вопросов. Во многих отношениях синдром жадности проявляется как частный случай синдрома китайского бейсбола со столь же опасными последствиями. Самое досадное из них — непродуманное расширение диапазона исследования, превращающее потенциально успешную разработку в такую, которой не будет видно конца. Чаще всего расширение проекта вызывает отставание от календарного плана работ, но когда наконец наступает срок подведения итогов (при составлении годовых финансовых отчетов), руководитель нередко забывает о своих требованиях проведения всех дополнительных работ.

Как документ, регламентирующий процесс исследования, план разработки проекта представляет собой просто календарный график выполнения его этапов. Часто эти этапы соответствуют разделам, составляющим данную главу. Такой план обычно представляется в виде диаграммы Ганта (рис. 1).

Этапы проекта во многих случаях детализируются до уровня отдельных заданий. Например, этап, связанный с разработкой вычислительного метода, может включать следующие задания:

1. Разработать соответствующий метод решения для каждой подмодели (частной модели) рассматриваемой задачи.
2. Описать и документально оформить методы решения. В итоговом докладе (сообщении) для каждой модели следует привести описание входной и выходной информации, а также процедур расчета, необходимых для получения решения. Процедуры расчета следует представить в аналитической форме и привести их словесное описание и требуемые пояснения.

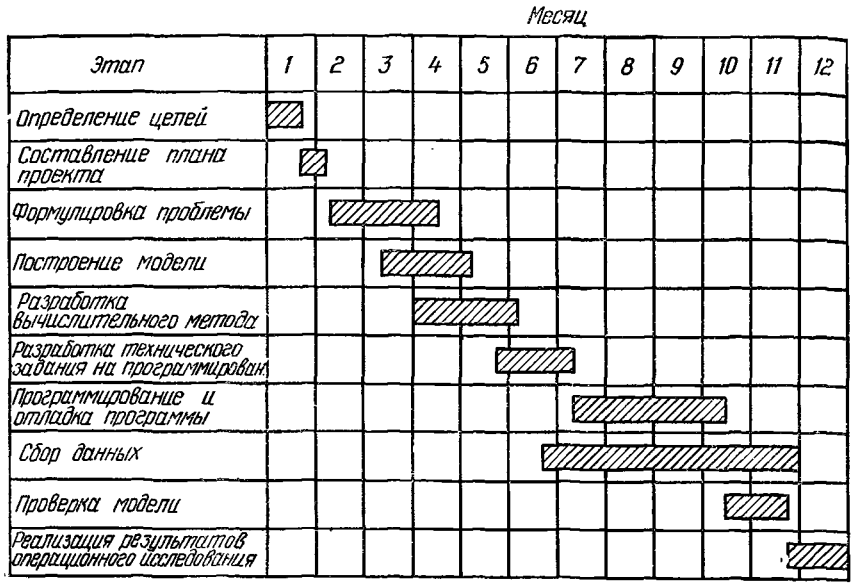


Рис. 1. План проекта в виде диаграммы Ганта.

3. Проверить предлагаемые методы решения на выбранных задачах небольшой размерности. Этот этап должен подтвердить возможность реализации предлагаемых методов решения и, кроме того, обеспечить точность документального оформления модели, прежде чем она будет переведена в машинную программу.
4. Внести необходимые уточнения и изменения в методы решения на основании результатов пробных расчетов, выполненных вручную.
5. Подготовить краткое изложение результатов испытаний, сопроводив его документально оформленными методами решения.
6. Подготовить и представить в надлежащей форме отчет о результатах данного этапа исследования.

Детальная разработка плана, рассмотренная выше, нередко оказывается очень важной для обоснованной оценки времени и ресурсов, требуемых для выполнения проекта. Разбиение всего исследования на отдельные последовательные этапы — лучший способ надежной оценки необходимых финансовых, людских и временных ресурсов еще до начала работы над проектом. Другими словами, составление плана разработки проекта увеличивает вероятность того, что исследование будет завершено в соответствии с графиком работ и в пределах выделенных ассигнований.

При составлении плана во многих случаях следует уделить основное внимание распределению работ по отдельным исполнителям. В этом случае форма его представления близка к приведенной на рис. 2. Нумерация заданий соответствует той, которая была принята ранее при разбиении этапа разработки вычислительного метода.

Заслуживают краткого упоминания еще два дополнительных момента, связанных с составлением плана проекта. Во-первых, это важность установления граничных сроков для выполнения промежуточных этапов. Как уже отмечалось, составление плана дисциплинирует разработчика проекта,

Исполнители	Неделя						
	15	16	17	18	19	20	21
Руководитель проекта	1	2		3		6	
Разработчик	1	2	3		4		5

Рис. 2. План распределения работ по исполнителям.

заставляя его соблюдать календарный график работы. При этом соблюдение графика означает также своевременное оформление документации, представление докладов руководству и служит официальным основанием для начала новых работ или выполнения следующих этапов исследования.

Второй важный момент касается выделения ресурсов для такого анализа данных, собираемых в процессе исследования, который непосредственно может быть и не связан с конкретным целевым назначением разрабатываемого проекта. Важность этого направления работ определяется следующими тремя причинами:

1. Собирая информацию и заботясь при этом только о выполнении поставленной перед ним частной задачи, разработчик иногда не замечает, что по сравнению с первоначальным замыслом исследование может обеспечить получение ряда дополнительных полезных результатов. Другими словами, всегда существует вероятность неожиданного открытия. Например, руководство одной из фирм на основании ежемесячных отчетов, представляемых главной бухгалтерией, пришло к заключению, что происходит небывалый ранее рост числа отказов от услуг данной фирмы со стороны одной из категорий клиентов. Чтобы воспрепятствовать развитию этого процесса, была подготовлена связанная с большими издержками программа расширения рынка сбыта, ориентированная на этих конкретных потребителей. Группа по исследованию операций, работавшая на этой фирме, пользовалась данными об отказах от услуг фирмы, собранными при изучении других производственных проблем. Однако она обнаружила, что на самом деле никаких фактических отказов не было, а источником зарегистрированного потока отказов является отдел фирмы по электронной обработке данных. Дело заключалось в том, что в рассматриваемый момент этот отдел проводил работу по изменению классификационных групп клиентов и выбрал при этом простейший путь: клиенты, классификационная группа которых изменялась, рассматривались как отказавшиеся от услуг фирмы в рамках одной группы и как дополнительные потребители — в другой. И как раз клиенты той группы, относительно которой поступили сведения об отказах, на самом деле всего лишь переводились из одной категории в другую, а реальных отка-

зов от услуг фирмы не было. Своевременное выявление этого факта предотвратило реализацию ошибочной и дорогостоящей программы расширения рынка сбыта.

2. В течение всей работы исследователь обязан информировать о ходе разработки проекта руководителя и другой персонал, имеющий отношение к исследованию. Однако руководитель обычно ориентируется на конечные результаты, и в процессе длительной работы над проектом его интерес к исследованию уменьшается, особенно в тех случаях, когда ему докладывают лишь о ходе работ и ничего не сообщают о практическом использовании результатов. Во многих случаях четкий анализ данных, подготовка наглядных гистограмм и схем, а также представление промежуточных результатов оказываются вполне достаточными для того, чтобы поддерживать и укреплять интерес руководителя к проекту.

3. В конечном счете такой анализ и обратная связь могут помочь в работе по сбору данных. Наглядным примером этого служит один из проектов, выполненных по заказу министерства обороны США. Для разработки этого проекта требовалось собрать большой объем данных от подразделений сухопутных войск, дислоцированных в Европе. Во время проведения исследования, которое продолжалось год, сбор необходимых данных проводился четыре раза, причем каждый раз процедура сбора данных длилась около месяца. Цель проекта состояла в разработке моделей для определения наиболее экономически выгодного срока службы автотранспортных средств. Эти модели предназначались для использования министерством обороны при решении вопросов, связанных с контрактами на поставку транспортных средств. Таким образом, результаты разработки проекта, казалось бы, не имели непосредственного отношения к подразделениям—поставщикам исходных данных и не предвещали им какой-либо выгоды. Однако для успешной разработки проекта исследователям необходимо было установить тесное сотрудничество с войсковыми подразделениями. Исходя из этого, исследователи наладили определенную обратную связь, в результате чего у войсковых подразделений появилась заинтересованность в проекте для решения собственных проблем. Тем самым создавалась основа для продолжительного сотрудничества с группой по разработке проекта. Чтобы обеспечить указанные условия, определенные усилия группы были направлены на подготовку кратких аналитических сводок и наглядных материалов с использованием данных, полученных от каждого из подразделений. Во время каждой компании по сбору данных командованию частей представлялись соответствующие инструктивные материалы. В результате войсковые подразделения извлекли из разработки проекта конкретную пользу: углубив понимание своей собственной деятельности, они в ряде случаев смогли выявить те участки работы, где, не затрачивая больших усилий, можно было добиться существенной экономии ресурсов или их более эффективного использования.

4. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Формулировка проблемы — следующий этап исследования. Он является одним из самых важных этапов и находится как бы на развилке дороги: одно направление ведет к успеху и удовлетворению результатами работы, другое — к неудаче и крушению надежд. Этот этап включает дополнительные обсуждения с руководителем, часто приводит к первым контактам со штабным и линейным персоналом, а также требует сбора данных, обеспечивающих четкое понимание следующих моментов: в чем состоит существо проблемы, что имело место в прошлом, чего следует ожидать в будущем и каков характер соотношений между переменными исследуемой задачи. На основе полученных результатов формируется общая схема построения модели для изучаемой проблемы и определяется направление всей дальнейшей

работы. Важность данного этапа исследований обусловливает необходимость его детального обсуждения.

Первый из вопросов, связанных с формулировкой проблемы, нередко заключается в том, чтобы определить, можно ли представить всю проблему в виде отдельных, более частных подпроблем, с тем чтобы параллельно или последовательно исследовать их независимо одну от другой. Это особенно часто необходимо в тех случаях, когда рассматриваемая проблема охватывает широкую и сложную сферу деятельности организации. Процесс логического разделения большой проблемы на отдельные элементы, конечно, приводит в итоге к получению субоптимального решения. Однако отклонение от оптимума может быть минимальным, если проблему разделить таким образом, чтобы выделенные подпроблемы по возможности не пересекались.

Чтобы показать, как решается такая задача, рассмотрим пример, связанный с планированием производства продукции и ее распределением. Выясним, как в данном случае была разделена вся проблема на сложные по содержанию, но все же разрешимые подпроблемы. Требовалось разработать план производства и транспортировки продукции на предстоящий четырехнедельный период, исходя из данных за недельный интервал. На стадии формулировки проблемы был выявлен ряд важных вопросов, в том числе — следующие:

1. Каким образом можно было бы заранее учесть необходимое сезонное накопление товарно-материальных запасов в условиях лишь четырехнедельного планового периода? Или тот же вопрос в другой форме: каков должен быть уровень запасов на предприятии в конце четырехнедельного планового периода?
2. Какой должна быть оптимальная величина складских запасов?
3. Какими должны быть размеры партий продукции, отгружаемой на склад, чтобы можно было использовать наиболее выгодные транспортные тарифы?

Все эти вопросы переплетались и с вопросом о выборе практически осуществимого метода решения, допускающего разделение проблемы на части. На рис. 3 показано, как это сделано. Было принято решение о разработке следующих пяти основных моделей:

1. Прогнозирующая модель. Она предназначалась для того, чтобы на основании данных за недельный интервал прогнозировать величину спроса на каждый вид продукции на предстоящий плановый период, равный четырем неделям.
2. Модель для складских запасов. Назначение этой модели заключалось в том, чтобы на основе данных прогноза спроса определить оптимальный уровень запасов продукции на складах на конец планового периода. Зная текущий уровень запасов, по этим результатам можно установить минимально необходимый объем производства.
3. Модель годового планирования. Цель разработки этой модели состояла в том, чтобы на основе данных прогноза годового объема сбыта, получаемых от отдела по реализации, определить в агрегированном виде объем производства и уровень запасов для каждого четырехнедельного периода в течение года. Результирующие данные об уровне запасов должны были использоваться при установлении плановых заданий для всей системы управления запасами, а также в модели планирования производства на более короткий период.
4. Модель планирования производства. Назначение этой модели заключалось в том, чтобы, используя целевые установки по величине запасов, определяемые годовым планом, а также требования, выдвигаемые моделью для складских запасов, определить необходимые объемы производства для каждой из последующих четырех недель.
5. Модель распределения. Она предназначалась для того, чтобы на основе результатов прогноза объема сбыта, данных о складских за-

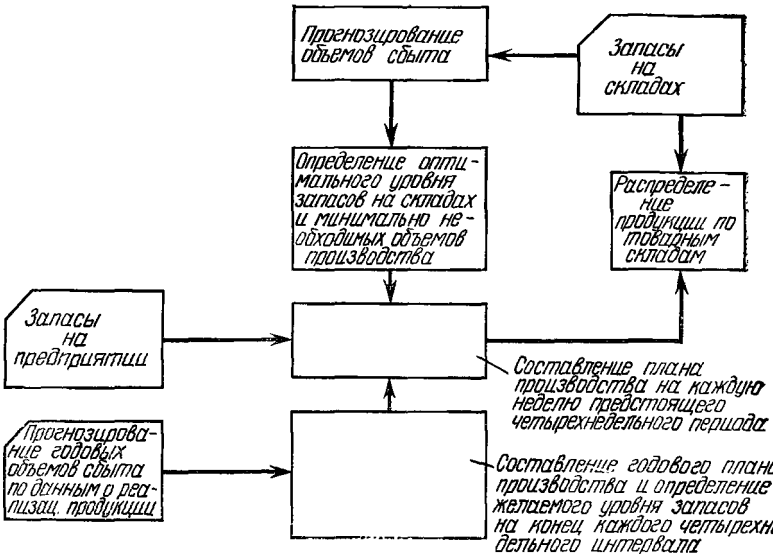


Рис. 3. Формулировка подпроблем.

пасах и планов производства составить план распределения продукции по складам.

Разрабатывая общий подход к анализу крупномасштабных проблем, исследователю следует в общем случае придерживаться следующей принципиальной схемы:

1. Начать с рассмотрения центральной задачи исследования. В приведенном выше примере это задача составления плана на четырехнедельный период.
2. Выяснить, какие входные и выходные данные требуются для формирования модели центральной задачи. Это поможет определить подмодели, разработка которых может потребоваться в дальнейшем.
3. Установить, существуют ли средства для получения необходимой входной информации или использования результирующей выходной информации. Если такие средства есть, то их следует применить. В противном случае должны быть определены вспомогательные модели.
4. Выяснить, что должно быть разработано применительно к каждой из дополнительных моделей: вся модель, быстрый и грубый способ расчета или новые методы ручных расчетов.

Следуя указанной схеме действий, исследователь сможет решить ряд важных вопросов: определить проблемы, поддающиеся управляющим воздействиям, более рационально скоординировать свои усилия с текущей деятельностью персонала организации, учитывая существующие методы работы, и повысить тем самым вероятность успешной реализации результатов исследования. Делая выводы, исследователь должен четко представлять себе целевое назначение моделей и то, как они должны использоваться в рамках решения задач управления, которые он анализирует.

Уже на этой ранней стадии исследования следует также уделить определенное внимание созданию условий, необходимых для эксплуатации систе-

мы. Это очень важно для того, чтобы успех исследования, которое завершается внедрением и новой системы, и новых методов управления, не оказался кратковременным. Если изучение этих вопросов откладывается до этапа внедрения, то впоследствии может выясниться, что возможностей для обеспечения эксплуатации системы недостаточно, а это, как правило, значительно уменьшает «срок жизни» проекта. Следующий список контрольных вопросов может помочь в обеспечении успешного функционирования разрабатываемой системы:

1. Предусмотрены ли средства для непрерывной корректировки входной информации модели?
2. Окажется ли документация достаточной для обеспечения других мероприятий по улучшению модели?
3. Приняты ли необходимые меры для обеспечения функционирования модели в рамках традиционных методов управления фирмой? Известно, что группа по исследованию операций в редких случаях берет на себя ответственность за применение разрабатываемой системы в таких условиях. Понимают ли руководители, что при внедрении системы могут потребоваться определенные изменения традиционных методов управления?
4. Можно ли простым способом модифицировать структуру модели, с тем чтобы отразить в ней изменения деятельности организации, а также новые возможности и условия?
5. Проведен ли необходимый анализ возможных способов использования модели для получения информации о ее слабых местах и ошибках?

Второй вопрос, подлежащий решению на стадии формулировки проблемы, связан с определением степени детализации разрабатываемой модели. Основные факторы, влияющие на его решение,— это объем выделенных средств, календарный план разработки проекта и цели исследования. Рассматривая данный вопрос, исследователь нередко ошибочно связывает или отождествляет степень детализации разрабатываемой модели с ее обоснованностью. Однако детализация модели не в полной мере характеризует ее адекватность. Более важно, чтобы разрабатываемая модель не оказалась «смещенной», т. е. такой, в которой не учтен тот или иной существенный и постоянно действующий фактор. Роль возможных неточностей модели иногда может ошибочно переоцениваться, а в других случаях, наоборот, недооцениваться. В среднем модель должна обеспечить приемлемую точность предсказания. Степень детализации разрабатываемой модели может и не оказывать существенного влияния на ее «несмещенность». Чтобы пояснить эту мысль, мы впоследствии приведем несколько примеров смещенных моделей.

После разделения проблемы на соответствующие части и определения желаемой степени детализации модели процесс формулировки проблемы может быть продолжен. Следующая фаза этого процесса связана с определением области применения и размерности разрабатываемой модели. При рассмотрении этой фазы мы выделим пять вопросов, обсуждение которых приводится ниже, причем в качестве иллюстрации будет использован следующий пример.

Необходимо выбрать тип оборудования, предназначенного для текущего и капитального ремонта автотранспортных средств, и составить план его работы. Желательно, чтобы тип оборудования соответствовал требованиям любых организаций, использующих крупный парк автотранспортных средств, таких, как таксомоторные, снабженческо-сбытовые и автобусные компании, государственные транспортные объединения и т. д. Это оборудование должно обеспечивать как непредвиденные ремонтные работы для восстановления вышедших из строя транспортных средств, так и выполнение плановых работ по капитальному и текущему ремонту. Цель исследования — помочь руководителю определить необходимый объем ремонтного оборудования и выработать рациональные решения по календарному планирова-

нию работ, связанных с капитальным ремонтом. Избыток соответствующих производственных мощностей приводит к неоправданным затратам на оборудование и его эксплуатацию, а при недостатке мощностей невозможно будет выполнить требуемый объем работ, определяемый планами капитального ремонта, и работы по устранению случайных поломок и неисправностей. При нерациональном планировании капитального ремонта, с одной стороны, может произойти накопление недопустимого количества транспортных средств, слишком долго простаивающих в ожидании текущего или капитального ремонта, а, с другой стороны, может создаться такая ситуация, когда ремонтом будет охвачено слишком малое число машин и, следовательно, не будет выполнен требуемый для всего парка объем работ по капитальному ремонту.

4.1. Определение размерности задачи

Первый этап процесса построения модели связан с определением переменных исследуемой задачи, которые необходимо учитывать. Определение размерности задачи может включать, например, установление классификационных групп продуктов производства и рынков сбыта или планового периода с разбиением его на определенные интервалы.

В примере, где рассматривалась задача выбора и использования оборудования для текущего и капитального ремонта, определение размерности связано с решением вопросов о типе транспортных средств, которые должны быть представлены в модели (например, легковые автомобили, грузовики грузоподъемностью $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ тонны), об используемых характерных временных интервалах (например, четырехчасовой интервал, рабочая смена или сутки), о видах проводимых ремонтных работ (например, простые виды ремонта, текущий ремонт после пробега 10 000 км, капитальный ремонт и т. д.).

Размерность задачи часто принимают в качестве заранее заданного условия без какой-либо аргументации. Этого не следует делать. Рассмотрим этот вопрос на примере задачи об увеличении производственных мощностей, которую часто приходится рассматривать администрации и группе по научным методам управления. Удивительно, что группы, ответственные за подготовку соответствующих решений, исключительно редко или вообще никогда не выступают в роли инициаторов необходимого увеличения производственных мощностей, прежде чем эти требования неоднократно будут выдвинуты производственным персоналом. Такая ситуация должна рассматриваться исследователями и планирующими органами как тревожный сигнал, свидетельствующий о том, что в их подходе к решению данной проблемы присутствуют элементы постоянно проявляющейся предвзятости. Подобная предубежденность может сказаться на выборе длительности анализируемого планового периода. Следующий пример иллюстрирует это обстоятельство. Положим, что производственная деятельность некоторой фирмы характеризуется следующими показателями:

Производственная мощность = 100 изделий в неделю.
Регистрируемый спрос на продукцию = 400 изделий за 4 недели.

Пусть в модели планирования производственной мощности рассматривается четырехнедельный период и на основе сопоставления дополнительных капитальных затрат с ожидаемой экономией от уменьшения дефицита и снижения уровня товарно-материальных запасов планируются капиталовложения. В такой модели может быть упущен существенный момент, который выявляется только при более детальном анализе условий и характеристик производственной деятельности фирмы. Приводимый ниже численный при-

мер иллюстрирует именно такой случай. Для планового периода, охватывающего четыре недели, имеют место следующие характеристики:

Объем производства	= 400 изделий
Спрос на продукцию	= 400
Стоимость запасов	= 0
Потерянный сбыт	= 0
Необходимые дополнительные капиталовложения	= 0

В рамках четырехнедельного планового периода колебания спроса не заметны. В результате создается впечатление, что фирма не несет убытков, связанных с издержками по хранению излишней продукции или из-за ее дефицита, а производственные мощности соответствуют уровню спроса. Это означает, что дополнительные капиталовложения не дадут прибыли. Однако при рассмотрении более коротких недельных интервалов картина может измениться:

	Недели				
	1	2	3	4	Итого
Поступившие заявки	80	130	90	110	410
Производство	100	100	100	100	400
Запасы	20	0	10	0	30
Зарегистрированные заявки	80	120	90	110	400
Потерянный сбыт	0	10	0	0	10

Из приведенной таблицы видно, что колеблющаяся величина спроса в отдельные периоды превышает существующие производственные возможности фирмы. Таким образом, учитывая пиковые периоды спроса, следует предусмотреть создание необходимых запасов продукции. Если же запасы недостаточны и спрос не удовлетворяется, то фирма несет убытки. Легко заметить, что в данном случае анализ недельных интервалов свидетельствует об экономической целесообразности капиталовложений на увеличение производственных мощностей.

Этот простой пример иллюстрирует понятие о смещенной модели, которое обсуждалось ранее. Использование в модели четырехнедельного интервала планирования приводит к недооценке целесообразности ввода новых мощностей. Такая модель оказывается смещенной.

4.2. Определение управляемых переменных

Этот этап, являющийся вторым этапом построения модели, заключается в определении переменных, которые могут изменяться управляющим органом. В процессе формулировки задачи нужно точно определить эти переменные, чтобы разделить все учитываемые параметры на заданные и такие, которые руководство может рассматривать в качестве управляемых. Другими словами, нужно знать, что для рассматриваемой задачи планирования являет-

ся заданными входными данными, а что — переменными, которые можно изменять, т. е. управляемыми переменными. В задаче об оборудовании для текущего и капитального ремонта автотранспортных средств управляемые переменные могут быть связаны с количеством ремонтных участков и правилами составления календарного плана текущего и капитального ремонта. Вопрос о том, будет ли создаваться соответствующая производственная база для ремонта или нет (так как можно пользоваться услугами стороннего подрядчика), в данном случае не имеет отношения к выбору управляемых переменных. Конечно, если такая база не создается, то это должно быть следствием детального анализа проблемы и соответствующего решения руководства.

Определение управляемых переменных может показаться простой задачей. Это не всегда так, и неправильное решение данного вопроса может погубить проект, хороший в других отношениях. Следующий пример иллюстрирует отмеченное обстоятельство. Руководство фирмы рассматривало вопрос о закрытии одного из своих основных предприятий, причем это предприятие давало существенную часть общего дохода фирмы. Руководство сочло необходимым провести тщательный анализ этого вопроса, для чего был приглашен коллектив консультантов. Одна группа занималась анализом технологических процессов производства, с тем чтобы убедиться, что они отвечают самым высоким требованиям. Другая группа собирала и анализировала последние данные об издержках производства, а также оперативную информацию. Одна из исследовательских групп отвечала за разработку методологии использования полученной информации, и, в частности, за построение модели, входной информацией для которой должны были служить данные о капиталовложениях в земельный участок, машинное оборудование, технические устройства, здания и сооружения, а также постоянные и переменные составляющие эксплуатационных расходов. Кроме того, в разрабатываемой модели в качестве входных данных должны были использоваться оценки дохода от реализации каждого вида продукции на рынках сбыта. На базе этой модели предполагалось рассчитать прибыль или убытки, движение наличных денежных средств, прибыль на инвестированный капитал и другие критерии, определяющие решение вопроса о закрытии данного предприятия. Предполагалось, что применение модели даст возможность руководству фирмы рассмотреть также влияние изменения номенклатуры производства и его объемов на издержки и оценить отношение инвестированного капитала к прибыли от действующих фондов, что являлось главным критерием для принятия решения. Если бы для наиболее вероятных значений входных параметров прибыль на инвестированный капитал удовлетворяла нормативам, принятым в фирме, предприятие могло бы продолжать функционировать. В противном случае оно было бы закрыто.

В результате обсуждения модели с руководством и ее тщательного анализа было выявлено, что при построении модели упущены очень важные моменты, влияющие на решение данной проблемы. В частности, структура производимой предприятием продукции и характеристики рынков ее сбыта рассматривались как независимые входные данные модели. Это не соответствовало реальной обстановке и, очевидно, должно было бы привести к необъективным оценкам ситуации. Из-за многочисленных и сложных ограничений, накладываемых на структуру продукции, не просто оказалось определить наилучший вариант производственной программы или оптимальную степень удовлетворения спроса на различных рынках сбыта. После того как была понята необходимость введения в модель дополнительных управляемых переменных, формулировка проблемы была изменена. Структура выпускаемой продукции и величина удовлетворенного спроса на каждом из рынков сбыта рассматривались теперь как управляемые переменные, подлежащие оптимизации. В результате был сформирован план производства и распределения продукции, при котором прибыль достигала максимальной величины, что

обеспечивало основу объективного измерения рентабельности производства. Таким образом, разработка смещенной модели была предотвращена за счет правильного выбора управляемых переменных.

4.3. Определение неуправляемых переменных

Третий вопрос, подлежащий решению на стадии формулировки проблемы, связан с определением неуправляемых переменных, т. е. таких параметров, которые не могут быть изменены управляющим органом, но оказывают влияние на моделируемую деятельность. В примере, касающемся ремонтного оборудования для автотранспортных средств, такой неуправляемой переменной является вероятность случайных поломок.

В ответ на мероприятия, осуществляемые фирмой, деятельность которой моделируется, конкуренты обычно предпринимают определенные контрмеры. Параметры, характеризующие эти ответные действия, можно отнести к той группе неуправляемых переменных, которую часто забывают учесть в рамках проводимых исследований операций, связанных с изучением конкурентоспособности или анализом типичной для промышленных фирм проблемы адаптации к изменениям внешних условий. Между тем тщательный анализ и выявление таких внешних воздействий нередко представляют собой наиболее важную часть исследования операций. Рассмотрим следующий пример. Одна из фирм — производителей листового стекла захотела выявить, насколько устойчивы ее позиции в конкурентной борьбе. В качестве управляемых переменных модели были определены параметры, характеризующие различные стратегии увеличения производственных мощностей и рыночную политику. В частности, последняя группа включала управляемые переменные, определяемые альтернативными вариантами политики цен, качества продукции и уровня обслуживания клиентов. Модель предназначалась для анализа влияния этих переменных на позиции данной фирмы в борьбе за рынок сбыта. Однако подобная модель не годилась для решения поставленной проблемы, поскольку в ней не учитывались изменения в поведении конкурентов: реакция на новую стратегию фирмы, для которой была построена рассматриваемая модель, а также действия, обусловленные их собственной инициативой по оптимизации производственной деятельности. Вообще, при игнорировании влияния внешних факторов построенная модель может оказаться неадекватной реальной ситуации и, что еще хуже, ее использование может привести к выработке руководством ошибочной стратегии.

4.4. Определение технологических параметров системы

Определение технологических параметров является четвертым вопросом, который нужно решать на стадии формулировки проблемы. Технология описывается совокупностью констант и параметров, которые определяют предельные значения переменных и соотношения между ними. Часто приходится моделировать сложные технологические процессы. К счастью, во многих случаях технологические процессы можно описать достаточно простыми способами. Многочисленные примеры этого можно найти в литературе по линейному программированию, содержащей математические модели таких сложных технологических процессов, как переработка нефти или процессы в доменной печи. Применительно к задаче о ремонте автотранспортных средств примерами технологических параметров могут служить трудозатраты на выполнение текущего и капитального ремонта и коэффициент выхода из строя автомашин вследствие случайных поломок.

4.5. Определение показателей эффективности

Показатели эффективности служат основой для оценки конкретных решений рассматриваемой проблемы. В примере о ремонтном оборудовании для автотранспортных средств в состав показателей эффективности могут быть включены число автомашин, ожидающих ремонта, среднее время ожидания, стоимость сооружения и оснащения ремонтных участков и т. п.

В большинстве случаев при исследовании операций используется несколько показателей эффективности. Наиболее важные из них следует выявить уже на стадии определения целей исследования. Во многих случаях правильный выбор показателя эффективности без проведения ретроспективного анализа далеко не очевиден. Рассмотрим следующий пример, приведенный в классической работе Морза и Кимбелла [4].

В начале второй мировой войны британский торговый флот нес большие потери из-за нападений германской авиации. Очевидной мерой противодействия представлялось вооружение торговых судов зенитными орудиями, и на некоторых из них орудия были установлены. Спустя почти год было решено проверить, следует ли демонтировать зенитные установки с тех судов, где они были установлены, или, наоборот, вооружить ими и другие суда. В результате анализа сразу же выяснилось, что вражеские самолеты удавалось сбивать только в 4 из 100 случаев нападений. Это был действительно весьма плохой результат, и, казалось бы, отсюда следовало, что вооружение торговых судов нецелесообразно. Однако при более глубоком рассмотрении этого вопроса стало ясно, что процент сбитых вражеских самолетов не может характеризовать истинную величину эффективности. Зенитные орудия предназначались для защиты судов, и показатель эффективности должен был характеризовать сравнительный урон, наносимый вражеской авиацией вооруженным и невооруженным судам. Для получения таких сравнительных характеристик были собраны необходимые данные, показавшие, что вооружение торговых судов заметно повышает вероятность их выживания.

5. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Четвертый этап исследования связан с разработкой модели. Модель выражает взаимосвязь между управляемыми переменными, неуправляемыми переменными, технологическими параметрами и показателями эффективности. Правильное построение модели — основное условие успешной разработки проекта. Неверно построенная модель может привести к ошибочным выводам или оказаться неэкономичной в эксплуатации. Правильно разработанная модель может существенно улучшить экономические результаты деятельности фирмы или эффективность функционирования организации. Разработка модели для анализа изучаемого вида деятельности требует творческого подхода. Кроме того, чтобы правильно понять сущность исследуемой проблемы, необходимо собрать и тщательно проанализировать большой объем данных.

Приступая к разработке модели, нужно прежде всего решить вопрос о возможности использования в рамках модели тех или иных требуемых показателей и соотношений. Нередко адекватность модели зависит от правильного решения данного вопроса. В большинстве задач производственного характера сравнительно просто оценить связь между приростом объема производства и увеличением соответствующих результирующих (выходных) показателей. Можно также дать эмпирическую оценку того, насколько уменьшится вероятность дефицита товара при увеличении его складских запасов на 50 единиц. Однако гораздо труднее точно установить, какое влияние на объем сбыта в текущем году окажут дополнительные расходы на рекламу в размере 5000 долл. и еще труднее оценить эффект этого мероприятия для следующих лет.

Не так давно одна из правительственных организаций США выступила инициатором разработки имитационной модели под сокращенным названием TEMPER (Technological, Economic, Military, Political Evaluation Routine). Эта модель предназначалась для описания влияния коалиций государств, а также внутренней и внешней политики различных стран на складывающуюся в мире ситуацию. Модель эксплуатировалась в течение нескольких месяцев, однако, после того как ее использование привело к обострению отношений между США и Коста-Рикой, появились определенные сомнения в ее правдоподобии. В результате детального анализа модели был сделан вывод о том, что она не давала и не могла дать правильного описания реальных процессов. Модель была построена без должного понимания связей между управляемыми и неуправляемыми переменными и показателями эффективности. Целевое назначение модели было излишне претенциозным, а понимание проблемы — слишком ограниченным. Результаты, полученные на основе этой модели, показали, что ее разработчики оказались не в состоянии учесть очень сложные взаимосвязи, которые пока еще полностью даже не выявлены. Правильное представление о моделируемой системе — исходная предпосылка успешной разработки и реализации проекта.

Может быть, лучше вообще не начинать исследования, требующего использования слишком большого числа неизвестных технологических параметров, а также трудно определяемых соотношений между переменными. К сожалению, нельзя точно указать, какое число таких параметров или соотношений следует считать «слишком большим». Когда о тех или иных системах известно немного, целесообразность применения методов исследования операций в большой степени определяется тем, каков существующий процесс принятия решений в изучаемой системе. Если в этом процессе участвует несколько административных органов и руководителей, каждый из которых выражает собственное субъективное мнение, и проводятся обсуждения и согласования, то трудно ожидать, что исследование поможет улучшить результаты. Однако, в том случае, когда решение принимает единственное лицо, не располагающее необходимой исходной информацией, использование модели может улучшить процесс принятия решений. Даже не зная критических соотношений, с помощью модели можно представить проблему в виде подпроблем, каждая из которых исследуется более простыми способами. Это также дисциплинирует деятельность лица, принимающего решение, заставляя его наилучшим образом использовать хотя бы ту информацию, которая имеется в его распоряжении.

Как уже говорилось, модель в явном виде выражает функциональные зависимости, существующие между управляемыми переменными, неуправляемыми переменными, технологическими параметрами и показателями эффективности. Пусть, например, в модели используется следующая совокупность величин: i-я управляемая переменная (c_i), j-я неуправляемая переменная (u_j), k-й технологический параметр или константа (p_k), n-й показатель эффективности (w_n).

Тогда в символической записи модель можно представить в виде функции или множества функций f, связывающих c_i, u_j и p_k с w_n: $w_n = f(c_i, u_j, p_k)$. В данной записи показатель w_n представлен в виде явной функции от других параметров; однако это не является обязательным условием, и, более того, такой случай встречается довольно редко.

Существует несколько различных типов соотношений, формирующих модель. Эти соотношения рассматриваются в следующих разделах данной главы.

5.1. Соотношения, вытекающие из определений

Первый тип соотношений — это аналитические выражения физических законов или общепринятых правил учета хозяйственной деятельности, например:

$$\text{Актив} = \text{Пассив} + \text{Результирующий доход (в балансе)},$$

$$\text{Запасы } (t) = \text{Запасы } (t-1) + \text{Производство } (t) - \text{Сбыт } (t).$$

Соотношения такого рода, вытекающие из установленных определений конкретных величин, обычно выводятся достаточно просто и, как правило, почти или совсем не требуют анализа данных.

5.2. Эмпирические соотношения

Эмпирические соотношения также характеризуют взаимосвязи между двумя или бо́льшим числом переменных. Они выводятся на основе изучения данных за прошлый период, анализа технических аспектов, экспериментальных данных, правовых предписаний или сделанных предположений. Примером такого соотношения может служить зависимость между величиной отчислений на уплату налогов T и облагаемого налогом дохода корпорации I. Налоговая ставка для доходов до 25 тыс. долл. в год составляет 22%, а для части доходов свыше 25 тыс. долл. в год — 48%. В рассматриваемом случае зависимость величины отчислений на уплату налогов от дохода можно представить следующим образом:

$$T = \begin{cases} 0{,}22I, & \text{если } I < 25\,000. \\ 5\,500 + 0{,}48\,(I - 25\,000), & \text{если } I \geqslant 25\,000. \end{cases}$$

В качестве второго примера рассмотрим зависимость между стоимостью сырья R и стоимостью реализуемой продукции S. Если в соответствии с данными за прошлый период для некоторого подразделения фирмы доля затрат на сырье в общей стоимости продукции была практически постоянной и составляла $\sim 40\%$, то формула $R = 0{,}40S \pm \varepsilon$ может служить примером эмпирического соотношения, используемого при построении модели. Для определения числовых значений параметров, входящих в соотношения данного типа, во многих случаях необходим статистический анализ соответствующих данных.

Построение и использование эмпирических соотношений нередко затрудняется следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, имеющиеся данные ретроспективного анализа могут оказаться непредставительными для вывода соотношений, характеризующих рассматриваемую систему в изменившихся условиях текущего периода или в предполагаемых условиях будущего периода. Эти новые условия функционирования системы должны найти отражение либо в изменении числовых значений соответствующих параметров, входящих в рассматриваемые соотношения, либо в изменениях структуры и характера самих зависимостей. Вторая трудность заключается в том, что эмпирические соотношения могут выводиться на основе данных, которые относятся к характеристикам функционирования системы, не отвечающим требуемому уровню эффективности. В этом случае плановые решения, получаемые с помощью модели, не будут стимулировать повышение эффективности системы и не отразят те потенциальные возможности, которые могут быть реализованы при совершенствовании управления.

5.3. Нормативные соотношения

Третий вид соотношений — это соотношения нормативного характера, т. е. такие, которые устанавливают, как переменные должны быть связаны между собой, а не то, как они были связаны в прошлом. Эти соотношения

могут быть результатом тех требований, которые предъявляет управляющий орган к качеству функционирования системы (например, требование высшего руководства может заключаться в том, чтобы запасы продукции не превышали пятидневного объема сбыта). Во многих случаях нормативные соотношения определяются на основе теоретического описания системы с использованием методов исследования операций. Чтобы проиллюстрировать это, опять обратимся к примеру, связанному с капитальным и текущим ремонтом автотранспортных средств. Допустим, что автотранспортные средства разделены на N классов (класс 1 имеет наивысший приоритет, а класс N — самый низкий). Считаем известными следующие параметры:

c — число ремонтных площадок;

u_i — средняя длина интервала времени между поступлениями требований на обслуживание транспортных средств класса i, $i = 1, \ldots, N$;

p — коэффициент нагрузки;

w_k — среднее время пребывания в системе обслуживания транспортного средства класса k, $k = 1, \ldots, N$.

Предположим далее, что разработчика модели вполне устраивают допущения о том, что время обслуживания всех классов транспортных средств имеет одинаковое экспоненциальное распределение (очевидно, что для рассмотренной ранее задачи это слишком жесткое допущение) и что поток входящих требований для каждого класса является пуассоновским. При принятых допущениях из анализа данной системы методами теории массового обслуживания следует, что в установившемся режиме среднее время пребывания в системе обслуживания транспортного средства класса k равно

$$w_k = \frac{1}{AB_{k-1}B_k} + \frac{u}{p} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, N. \qquad \text{где}$$

$$A = c!\,\frac{cp - u}{r^c} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{r^j}{j!} + cp, \qquad B_0 = 1,$$

$$B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i}{cp} \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots, N, \qquad u = \sum_{i=1}^{N} u_i, \qquad r = \frac{u}{p}.$$

Приведенное выражение для w_k представляет собой пример нормативного соотношения.

На конечном этапе построения модели должна быть дана точная аналитическая формулировка рассматриваемой проблемы. Понимание проблемы должно стать более четким, и, кроме того, должны быть выявлены все неясные или ненадежные соотношения. После этого исследователь уже подготовлен к тому, чтобы приступить к разработке вычислительного метода.

6. РАЗРАБОТКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЕТОДА

Одновременно с проведением работ по построению модели необходимо выбрать или разработать численный метод решения. Для этого нужно выяснить следующие моменты:

а) следует ли использовать имитационное моделирование или какой-либо из имеющихся методов оптимизации?

б) должна ли модель учитывать, что некоторые переменные являются случайными величинами, или же следует использовать детерминированный подход?

в) нужно ли учитывать нелинейность некоторых соотношений или достаточно ограничиться их линейной аппроксимацией?

г) можно ли использовать существующие методы решения или требуется разработать новый метод?

Короче, необходимо выяснить, какие нужно сделать допущения и какой метод разработать, для того чтобы применение модели было практически оправданным в отношении используемых вычислительных процедур. Данный этап включает также проверку предлагаемого численного метода «вручную»; при этом, по крайней мере для небольших тестовых задач, проверяется возможность использования и корректность разрабатываемых методов решения. Из вышеизложенного, конечно, ясно, что некоторые работы на этапах формулировки, построения модели и разработки метода решения частично перекрываются (рис. 1).

На этапе разработки вычислительного метода часто приходится определять, допустимо ли в данном конкретном случае использование оптимизационного метода решения или необходимо разработать некоторый эвристический алгоритм. Всегда, когда в рамках анализа операций необходима разработка некоторого вычислительного метода, исследователь должен вначале дать исчерпывающую формулировку задачи, если даже вполне очевидно, что в такой постановке она не поддается решению. Обеспечив полную формулировку, исследователь может затем принять ряд допущений, позволяющих упростить модель. Преимущества такой последовательности действий обусловлены несколькими факторами. Во-первых, при реалистичной формулировке проблемы исследователь будет уверен в том, что он правильно понимает существо и детали данной проблемы, чего может не быть в том случае, если с самого начала разрабатывается упрощенный вариант модели. Во-вторых, исследователь лучше представит себе, как будет влиять любое из необходимых упрощений на адекватность модели и реализацию вычислительных процедур. И наконец, если необходимо создать эвристический метод решения задачи, исследователь имеет возможность начать с разработки предполагаемых оптимизационных процедур и в случае необходимости изменить свой подход в нужном направлении. Такая схема действий помогает получить эвристический метод, достаточно эффективный с точки зрения реализации вычислительных процедур и в то же время обеспечивающий получение решения, близкого к оптимальному.

Приведем пример, иллюстрирующий приведенные выше соображения. Требовалось разработать модель для составления календарного графика отправки грузов. Задача состояла в том, чтобы определить необходимое число грузовиков для перевозки груза со склада в течение каждого из 30 четырехчасовых интервалов в пределах недельного периода. Объем отправки грузов в каждом из интервалов ограничивался имеющимися в наличии погрузочными платформами и должен был планироваться таким образом, чтобы отправление грузов в течение недели было равномерным и численность обслуживающего персонала по возможности не менялась. Кроме того, если несколько грузовиков направлялось в один и тот же пункт доставки, то эти поездки в течение недели также следовало распределять равномерно. Например, если в некоторый пункт доставки было необходимо направить три грузовика, то они должны были отправляться в понедельник, среду и пятницу. Грузовики предоставлялись транспортной организацией общего пользования и фирмой контрактных перевозок грузов. Поэтому, кроме равномерности отправления грузов в целом, требовалось, чтобы каждый водитель грузовика имел собственный график работы. В противном случае необходимое для перевозок количество грузовиков могло быть не обеспечено. Например, если конкретный водитель должен был выполнять 10 поездок в неделю, то ему должны быть запланированы 2 поездки в день.

Рассматриваемая задача была сформулирована в виде задачи целочисленного программирования, имеющей очень большую размерность и целевую функцию, представляющую собой некоторый количественный показатель равномерности отправления грузов. Хотя в такой постановке решение задачи вряд ли было возможным, исчерпывающая формулировка послужила надежной основой для разработки рационального метода ее решения. Было выяснено, что как для отдельного водителя, так и для всех грузовиков можно составить частные задачи целочисленного программирования, которые в силу их специфической структуры могут быть решены с помощью простых алгебраических методов. Нахождение допустимого решения задачи в целом сводилось к получению совокупности решений частных задач, удовлетворяющих требованиям, сформулированным для общей постановки задачи. Без особого труда удалось разработать простой эвристический метод, позволяющий находить допустимое решение. Оказалось,что предложенный метод решения весьма эффективен в отношении вычислительных процедур и обеспечивает получение отличных результатов. Этот успех был обусловлен главным образом построением модели, адекватно описывающей рассматриваемую проблему и послужившей затем отправным моментом разработки вычислительного метода.

В качестве заключительного замечания относительно численного метода решения кратко остановимся на вопросе выбора одного из двух вариантов:

а) найти оптимальное решение упрощенной задачи;

б) найти приближенное решение точно сформулированной задачи.

Практический опыт убедительно свидетельствует о предпочтительности второго варианта. Отчасти это связано с тем, что в противном случае трудно быть полностью уверенным в правильности получаемых результатов из-за возможных упущений тех или иных важных аспектов задачи. Ничто так быстро не гасит интерес руководства к проекту по исследованию операций, как явно ошибочные результаты, полученные с помощью модели, не учитывающей то или иное обстоятельство, которое является важным для решения данной задачи. Предпочтительность второго варианта частично обусловливается также и тем, что использование ЭВМ целесообразно как раз для оценки сложных взаимосвязей между многими переменными, а не для решения упрощенного варианта задачи. На практике оптимальное решение может оказаться в лучшем случае недостижимым, но многие выявленные взаимодействующие факторы, влияющие на решение задачи, действительно существуют. Чтобы разобраться в такой сложной ситуации, руководству обычно необходима помощь. Даже если модель и не обеспечит получения оптимального решения задачи, но в ней будут учтены все важные факторы, использование такой модели окажется более полезным, чем оптимальное решение упрощенной задачи.

7. РАЗРАБОТКА ТЕХНИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ НА ПРОГРАММИРОВАНИЕ; ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ОТЛАДКА

Составление программ для ЭМВ во многих случаях является составной частью проводимого исследования. Однако, поскольку разработка программ нередко требует больше времени, чем предполагалось вначале, и так как эта часть проекта в большей степени ориентирована на программиста, а не на пользователя, процесс разработки программ во многих случаях затягивается, что задерживает успешное осуществление проекта. Разработка технического задания на программирование для многих специалистов является неприятной задачей. Такие задания часто составляются небрежно. Это отрицательно сказывается на ходе выполнения проекта, так как только тщательное и аккуратное составление этих заданий обеспечивает должный контроль за качеством последующих работ по программированию и затратами на их

формами мы подразумеваем документы, которые обеспечивают пользователя ясно определяемой, хорошо подобранной и удобно размещенной выходной информацией, т. е. такие выходные формы, которые хорошо понятны пользователю. Выходные формы должны составляться прежде всего с учетом требований и целей руководства и управленческого персонала, при этом соображения относительно удобства и легкости программирования должны отойти на второй план. Под ориентированными на пользователя входными формами мы подразумеваем массив данных, организованный так, что дает возможность обеспечить пользователя быстро подготавливаемой и легко обновляемой информацией. Короче говоря, в этом случае выполнение трудоемких функций, связанных с подготовкой данных, вычислительная система возлагает на ЭВМ, а не на пользователя.

Что это означает с точки зрения системного проектирования, лучше всего показать на примере. На рис. 4 представлена часть базы данных типичной системы, предназначенной для планирования производства и распределения продукции. Здесь показана лишь часть информации, необходимой для функционирования системы. Из приведенного примера видно с какой легкостью можно подготовить и интерпретировать элементы базы данных. Фактически каждый, кто знаком с данным вопросом, способен понять смысл каждого элемента и его назначение. В результате информация легко формируется, сохраняется и обновляется.

Стадии программирования и отладки мы здесь только упомянем. Во многих случаях проект по исследованию операций не требует разработки машинных программ, а в случае такой необходимости можно воспользоваться уже имеющимися программами. Например, программы для линейных моделей можно получить от поставщиков вычислительной техники или от вычислительного центра. Даже в тех случаях, когда требуется составление новых программ, эта работа часто выполняется другими подразделениями фирмы. Специалист по исследованию операций может нести ответственность за подготовку программы в заданные сроки и в пределах тех средств, которые были выделены на эту работу. Это обстоятельство также обусловливает необходимость тщательного составления задания на программирование обоснованного плана проекта.

8. СБОР ДАННЫХ

На этом этапе осуществляется сбор и анализ данных, необходимых для проверки правильности модели и практического использования результатов исследования операций. На предыдущих этапах сбор данных преследовал цели, связанные прежде всего с формулировкой проблемы и построением модели. Рискуя высказать весьма спорное утверждение, мы все же отметим, что данный этап, по-видимому, является единственным из всех этапов исследования, который иногда выполняется с излишним усердием. Часто это обусловлено неоправданным вниманием к точности используемых данных. В связи с этим можно привести пример разработки проекта для одной из фирм, занимающейся производством консервов. Исследование было связано с разработкой модели планирования производства. Необходимые входные данные включали такие параметры, как производительность поточных линий, среднее за месяц количество часов простоев оборудования из-за устранения неполадок или текущего ремонта и удельные затраты на производство консервов на каждой линии. Один из инженеров-технологов был привлечен к разработке проекта для установления значений этих параметров. Большей, чем неуемное стремление этого инженера к точности, была только бесполезность его усилий. Высокая точность исходных данных не требовалась в данном случае по нескольким причинам. Во-первых, эти параметры предполагалось использовать в расчетах вместе с оценками величины спроса,

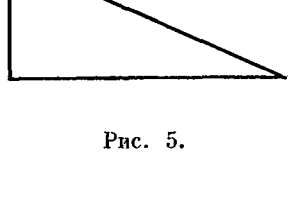


Рис. 5.

которые часто делались с ошибкой, превосходящей 50%. Во-вторых, модель не предназначалась для разработки детального плана производства. Малосущественные требования производства и другие оперативные факторы не включались в число моделируемых, и было еще множество причин, ограничивающих применимость модели для целей оперативного планирования. Наконец, небольшое изменение входных данных не влияло в данном случае на результат решения. Модель была просто нечувствительна к точности указанных параметров.

При разработке любого проекта обычно оказывается, что к одним входным данным модель оказывается чувствительна, а к другим — нет. Можно сэкономить много времени и усилий, если первоначальный сбор и обработку данных ограничить получением «округленных» оценок. Затем, используя модель, можно выяснить, к каким входным данным она оказалась чувствительной, и после этого провести дополнительную работу для более точной оценки соответствующих исходных данных.

Как правило, на этапе сбора данных специалисту приходится реагировать на типичные возражения руководства относительно использования моделей. Хотя эти возражения формулируются по-разному, их суть сводится к одному: «... но у нас ведь нет таких данных...» Исследование операций обычно связано с принятием таких решений, которые уже неоднократно делались в прошлом. Отсутствие соответствующих данных просто означает, что эти решения принимались и принимаются без должного обоснования. Поэтому трудности получения необходимых данных не являются препятствием к выполнению продуктивных операционных исследований. Если даже в качестве требуемых входных данных используются оценки на уровне догадок, результаты исследования, вероятно, все же будут способствовать улучшению существующих методов управления. И даже без таких оценок результаты исследования могут помочь сфокусировать внимание руководства на наиболее спорных моментах существующего процесса принятия решений и рекомендовать ему более строгие процедуры логической оценки альтернативных вариантов.

Действенный метод опровержения возражений, высказываемых в связи с «отсутствием данных», состоит в том, чтобы убедить руководителя в том, что математическая модель является средством, которое позволяет обойти трудности получения соответствующих оценок путем сведения их к более простым измерениям. Это лучше всего делается с помощью наглядного примера. Начните с оценки площади треугольника (в квадратных сантиметрах), изображенного на рис. 5. Запишите ваше предположение.

Если вы попытаетесь непосредственно оценить площадь, то наверняка убедитесь, что сделать это весьма затруднительно. Лучший способ оценки заключается в том, чтобы сначала вывести соотношение между площадью треугольника и длиной его сторон (т. е. построить математическую модель). Это соотношение имеет вид $S = \frac{1}{2} bh$, где S — площадь треугольника, b — его основание и h — высота. Теперь оцените размеры основания и высоты и вычислите площадь треугольника, используя математическую модель. Запишите результат этой второй оценки. Наконец, измерьте основание и вы-

соту и вычислите точную площадь треугольника. Вы, вероятнее всего, обнаружите, что ваша вторая оценка точнее первой.

Использование моделей, разрабатываемых при исследованиях операций, помогает в процессе принятия решений аналогичным образом. Решение проблемы сводится к простейшим измерениям, установлению исходных переменных и показателей эффективности, которые представляют собой функции от этих переменных. В этом случае может потребоваться больше данных, но получить их проще, а требования к их точности будут менее жесткими.

9. ПРОВЕРКА МОДЕЛИ

Важность этого этапа трудно переоценить. Он включает две фазы: определение способов проверки модели и осуществление этой проверки. На первой фазе выбираются аналитические и экспериментальные методы для проверки непротиворечивости, чувствительности, реалистичности и работоспособности модели. Каждая из этих характеристик модели рассматривается ниже. Для осуществления проверки модели требуются данные, собранные на предыдущем этапе. Результаты такой работы нередко приводят к необходимости перестройки модели и соответственно к составлению новых программ.

9.1. Непротиворечивость

Дает ли модель не противоречащие логике результаты при вариации величин важнейших параметров, особенно в тех случаях, когда их значения близки к экстремальным? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо проанализировать характер реакции модели на изменения соответствующих входных параметров. Следующий пример показывает, как можно проверить непротиворечивость модели.

Приведенная ниже формула для определения экономически выгодного размера партии получена при решении задачи управления запасами, аналогичной той, решение которой обычно приводит к простому соотношению, определяющему такой размер партии. Главное отличие рассматриваемой задачи состояло в том, что оптимальный размер партии следовало определить в условиях, когда заказ удовлетворялся поставщиком, возможности которого характеризовались конечной величиной интенсивности поставок, равной p. Оптимизационная модель, минимизирующая соответствующий показатель затрат, привела к следующей формуле для определения экономически выгодного размера заказываемой партии:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h} \cdot \frac{p}{p-D}} \quad \text{при} \quad p > D,$$

где Q^* — оптимальный размер партии, D — величина годового спроса, K — накладные расходы, связанные с хранением, h — полная стоимость хранения, p — интенсивность поставок.

Частично непротиворечивость модели можно проверить, приняв допущение о бесконечной интенсивности поставок и выяснив, преобразуется ли в этом случае исходная формула в классическую формулу для определения экономически выгодного размера партии. Проверим это:

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt{\frac{2DK}{h} \frac{p}{p-D}} = \lim_{p\to\infty} \sqrt{\frac{2DK}{h} \frac{1}{1-(D/p)}} = \sqrt{\frac{2DK}{h}}.$$

Таким образом, как и должно быть, мы получили обычную формулу для определения оптимальной величины заказываемой партии.

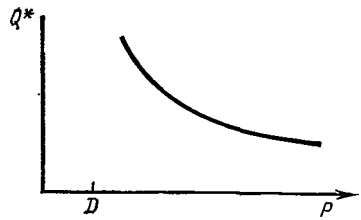


Рис. 6. Чувствительность Q^* к параметру p.

9.2. Чувствительность

Соответствуют ли относительные изменения выходных переменных модели небольшим изменениям ее параметров? Анализ чувствительности модели обычно требует проведения численных расчетов. В случае рассмотренной выше модели управления запасами можно при принятых постоянных значениях D, K и h проверить зависимость Q^* от p. В результате должна получиться кривая, аналогичная показанной на рис. 6.

9.3. Реалистичность

Соответствует ли модель тем частным случаям, для которых уже имеются фактические данные? Хорошей иллюстрацией анализа этой характеристики модели может служить следующий пример. Была разработана математическая модель для определения уровня дивидендов, которые должны объявлять 80 заграничных филиалов некоторой компании, расположенных в 32 странах. В модель были включены ограничения, отражающие а) политику компании; б) требования министерства торговли, устанавливаемые для предотвращения утечки золота, и в) предписания и инструкции налогового управления. При соблюдении этих ограничений с помощью модели должны были определяться оптимальные уровни объявляемых дивидендов, при которых общая сумма выплачиваемых компанией налогов была бы минимальна. Для проверки реалистичности разработанной модели были использованы данные за последний год, включая и данные о фактически объявленных дивидендах. При соответствующих значениях входных параметров модели было определено значение целевой функции, которое с точностью до 0,1% совпало с величиной фактически выплаченных налогов. Помимо подтверждения реалистичности модели, такая проверка оказалась крайне полезной и для того, чтобы на практическом примере продемонстрировать ее справедливость руководству фирмы и юристу.

9.4. Работоспособность

Легко ли получить решение с помощью предлагаемой модели? Если она должна использоваться в процессе выработки решений, принимаемых руководителями линейных подразделений, то необходимо, чтобы расчеты можно было выполнить в пределах сроков, установленных для подготовки соответствующих решений. Кроме того, трудозатраты и ресурсы, требуемые для эксплуатации модели, должны укладываться в установленные лимиты машинного времени и фонда зарплаты. Нередко это вынуждает исследователя использовать приближенные методы и эвристические процедуры даже тогда, когда это не обусловлено технической необходимостью.

Возможно, что описываемый ниже случай действительно имел место. В одной из военных научно-исследовательских организаций США была разработана имитационная модель танкового сражения. В день, когда началась арабо-израильская война 1967 г., объединенный комитет начальников штабов армии США потребовал проведения расчетов по этой модели для получения прогноза относительно исхода войны. Ответ из организации был получен на следующий день. В соответствии с прогнозом война должна была закончиться в течение пяти суток. Объединенный комитет начальников штабов счел эти результаты необоснованными и предложил разработчикам модели изменить ее параметры, повторить расчеты и представить более правдоподобные результаты. Это было сделано, однако новая оценка продолжительности войны отличалась от прежней только на полсуток. К этому времени война закончилась. Разработанная модель была не только не способна дать верный прогноз (с точностью, достаточной для целей правительственных органов), но и не позволяла получить результаты в крайне сжатые сроки. Расследование выявило следующее. Предсказание было получено без применения модели. Ее использование потребовало бы нескольких недель, если не месяцев, только для сбора исходных данных. Вместо этого разработчики модели обратились к одному из своих сослуживцев, в прошлом — офицеру танковых войск Германии, воевавшему под командованием Роммеля в Африканском корпусе. Ему и принадлежало это предсказание.

Второй важный аспект проверки модели связан с использованием контрольных данных для оценки ее свойств с учетом реальных внешних условий. Это особенно важно при разработке проектов, ориентированных на получение одноразовых решений. Проверка модели, встраиваемой в традиционную систему управления, представляет собой более сложный процесс, включающий эксплуатацию модели и формальный анализ. Обсуждение этих вопросов выходит за рамки данной главы. Наиболее существенный момент проверки модели, предназначенной для получения одноразового решения, состоит в том, что после завершения вычислительных процедур и получения решения следует осмыслить и критически проанализировать полученные результаты. Таким образом, после получения решения задачи с помощью модели специалисту еще многое следует уточнить и проверить, прежде чем представить руководству оценку всех альтернативных вариантов, а также соответствующие выводы и рекомендации. Цель такой работы состоит в том, чтобы глубже проникнуть в сущность рассматриваемой проблемы, подвергая сомнению те допущения, которые были положены в основу построения модели и ее применения.

В работе [1] описывается исследование, выполненное с помощью анализа дерева решений и предназначенное для оценки некоторой операции, обещающей фирме определенные выгоды. Это исследование выполнено группой, которая была составлена из персонала, обслуживающего линейное руководство некоторой фирмы. Разработка программы была проведена за четыре месяца; еще два месяца ушло на то, чтобы получить с ее помощью решение. Потребовалось 140 прогонов программы, прежде чем было найдено решение, рекомендующее осуществление указанной операции и проведение определенной стратегии в отношении производства и сбыта. Руководство высшего уровня отвергло полученные рекомендации, однако это произошло только после того, как совет директоров фирмы выступил против проведения данной операции по вполне определенным причинам юридического характера. Юристы выявили, что при анализе проблемы был упущен один из важнейших аспектов ее рассмотрения, в результате чего проведенная работа оказалась бесполезной. Если бы, прежде чем представить полученные результаты высшему руководству, разработчики более тщательно проверили принятые допущения, завершение проекта могло бы оказаться более успешным.

```
C SAMPLE DATA DECK
C
C
C     RUN DESCRIPTION
C     PERIOD          NUMBER.          BEGINNING
C                                      MONTH DAY YEAR
      QUARTER         4                JAN     1 1973
C
C
C     PRODUCT FILE
C     CODE            DESCRIPTION
      HARDTOP         TWO-DOOR HARD TOP
      CONV            CONVERTIBLE
C
C
C     PRODUCTION PLANTS FILE
C     CODE            DESCRIPTION
      DETROT          DETROIT, MICHIGAN
      FRFURT          FRANKFURT, GERMANY
C
C
C
C     SALES AREAS FILE
C     CODE            DESCRIPTION
      U.S.            UNITED STATES
      EUROPE          EUROPEAN COMMON MARKET
      JAPAN           JAPAN
C
C
C     PRODUCTION MINIMUMS
C     PLANT           LEVEL/WEEK
      DETROT                 500
      FRFURT                  90
C
C
C     ASSEMBLY CAPACITIES
C     PLANT           CATEGORY         CAP/WEEK        PRODUCT         PRODUCT
      DETROT                              1000
      FRFURT                               180
      DETROT          STAT-1              2000          CONV
      FRFURT          SPACE                200          HARDTOP         CONV
      DETROT          SPACE                530          CONV
C
C
C     PRODUCT INVENTORY HOLDING COSTS
C     AREA            PERCENT
      U.S.                 20
      EUROPE               20
      JAPAN                25
```

Рис. 4. Часть базы данных.

выполнение. Тщательная разработка указанных технических заданий обеспечивает также более качественное документальное оформление программ, в результате чего исследование становится в большей степени ориентированным на пользователя и удовлетворение его нужд.

Мы не будем останавливаться здесь на тех требованиях, которые предъявляются к составлению документов такого рода. Обсуждение этих вопросов можно найти в любом хорошем учебнике по системному анализу и проектированию. Для наших целей более важно подчеркнуть особую важность и значение одной из работ, проводимых на данном этапе,— составление ориентированных на пользователя входных и выходных форм (документов), их обсуждение и согласование с соответствующим руководством и управленческим персоналом. Под ориентированными на пользователя выходными

10. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Слишком часто после разработки и проверки модели специалист по исследованию операций считает свою работу законченной. Однако это неверно. В действительности же многие трудности возникают только на конечном этапе разработки проекта, связанном с реализацией полученных результатов. Эффективность операционного проекта в целом существенно зависит от того, в какой мера удалось обеспечить при его разработке сотрудничество руководителей различных уровней управления, ответственных за решение исследуемой проблемы или выполнение функций, имеющих к ней определенное отношение. Препятствия, с которыми приходится сталкиваться в процессе исследования, во многих случаях обусловлены не серьезными причинами, а лишь отсутствием понимания и нежеланием перемен. Такие препятствия можно преодолеть, но лишь в том случае, если разработчик потратит необходимое для этого время и проявит должную настойчивость. Для успешной реализации проекта необходимы составление материалов для ознакомления управленческого персонала с принципами функционирования внедряемой системы, подготовка и проведение соответствующих семинаров и наглядная демонстрация результатов исследования на практических примерах. Хотя к моменту завершения проекта многие руководители могут быть уже ознакомлены со всеми моделями и разработанными системами, все же весьма важно еще раз убедиться в том, что их представления достаточно основательны и имеются нужные материалы для обучения других сотрудников. Такие меры увеличивают полезный срок службы моделей. Только при должном стремлении исследователя к взаимодействию и взаимопониманию в работе со всеми, чью деятельность он изучает и анализирует, можно обеспечить действенное сотрудничество и успешное завершение исследования операций. Если между разработчиком и руководителем необходимые контакты и сотрудничество не установлены, процесс внедрения результатов сводится к обмену любезностями.

Нередко забывают об одном важном факторе, затрудняющем процесс внедрения новой системы,— наличии задач, требующих срочного решения, и тех нарушениях, которые они вносят в процесс внедрения. Как правило, проявлений этого фактора трудно избежать, даже если система уже апробирована и показала свою работоспособность. Имеется несколько путей успешного преодоления этих затруднений, возникающих на стадии внедрения. Один из них состоит в том, чтобы, когда это представляется возможным, проводить сравнение экспериментальных данных с результатами, полученными традиционными методами. В этом случае нужно обратить особое внимание на то, чтобы все заинтересованные лица заранее представляли себе все те трудности, которые могут встретиться в дальнейшем. Более важно, однако, чтобы исследователь располагал:

1) тщательно разработанным планом проведения испытаний;

2) предварительно проверенным методом сравнения опытных результатов с фактическими данными;

3) средствами сбора тех опытных и фактических данных, сравнение которых предусмотрено планом;

4) ресурсами, необходимыми для того, чтобы внести изменения, требующиеся для преодоления возникающих затруднений;

5) согласием руководства на проведение в необходимых случаях таких испытаний и в дальнейшем.

Группа исследования операций и работники организаций, имеющие отношение к внедрению новой системы, должны понимать, что необходим некоторый период времени для устранения недостатков, всегда присущих новой системе. Однако иногда наступает такой момент, когда руководитель и исследователи вынуждены смириться и признать, что проект, о котором

они до недавнего времени говорили с таким оптимизмом и которому отдали так много сил, совершенно непригоден. Это случается, и гораздо чаще, чем нам хотелось бы. Материал, изложенный в этой главе, возможно, поможет уменьшить вероятность такого исхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown R. V., Do Managers Find Decision Theory Useful? Harvard Business Rev. (May — June 1970).
2. Hillier F. S., Lieberman G. J., Introduction to Operations Research, Holden-Day, San Francisco, 1967.
3. Morris W. T., On the Art of Modelling, *Management Sci.*, 13, 12 (August 1967).
4. Morse P. N., Kimball G. E., Methods of Operations Research, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1951. [Имеется перевод: Морз Ф., Кимбелл Д. Методы исследования операций.— М.: Сов. радио, 1956.]
5. Wagner H. M., Principles of Operations Research, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969. [*Имеется перевод:* Вагнер Г. Основы исследования операций.— М.: Мир, 1973.]

I-3. Подготовка специалистов по исследованию операций

Р. Тролл[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

История развития исследования операций (ИО) непродолжительна. Как самостоятельная научная дисциплина исследование операций существует менее 35 лет, а в качестве отдельного направления специализации в рамках учебных программ вузов — лишь около четверти века. Однако первые работы, которые теперь можно отнести к исследованию операций, появились намного раньше.

Несмотря на то что эта дисциплина сформировалась сравнительно недавно, она уже прочно утвердилась во многих вузах. Хотя такая ситуация типична почти для всех стран, мы будем рассматривать соответствующий круг вопросов в основном на примере США. В работе [5] читатель сможет найти данные об учебных программах по исследованию операций 46 университетов США.

В силу необходимости первыми начали профессиональную деятельность в области исследования операций специалисты других отраслей науки. Это были в основном математики, физики, представители наук о поведении индивидуумов; в меньшей степени, но все же достаточно заметно были представлены и другие дисциплины. Сложность возникающих проблем вынуждала создавать комплексные исследовательские группы, с тем чтобы специализация каждого из их членов соответствовала определенным аспектам рассматриваемых проблем.

В последнее время стали отчетливо проявляться две в известной мере противоположные тенденции. Одна из них связана с переходом от проведения исследований операций группами, сформированными из представителей различных специальностей, к выполнению таких исследований силами специалистов, в определенной степени знакомых почти со всеми аспектами анализируемых проблем. Другая тенденция связана с появлением специалистов, стремящихся постоянно углублять знания в какой-либо одной области, например в управлении запасами, имитационном моделировании или математическом программировании.

Первую из указанных тенденций поддерживают заказчики исследований операций, которые считают, что быстрое получение приемлемого решения задачи более целесообразно, чем нахождение ее оптимального решения после продолжительного и детального анализа. Эти заказчики предпочитают таких специалистов по исследованию операций, которые умеют правильно использовать уже приобретенные знания и практический опыт, а не тех, чьи склонности и способности в большей степени ориентированы на творческие исследования, обеспечивающие расширение и углубление имеющихся знаний.

Вторая тенденция поддерживается всей системой высшего образования, которая прежде всего поощряет публикации, содержащие результаты исследований творческого, поискового характера.

Наличие указанных тенденций приводит к определенной поляризации интересов специалистов по исследованию операций, которая усложняет решение вопросов, связанных с публикацией соответствующих работ и подготовкой профессиональных кадров. Такая поляризация, расширение сферы

---

[1] Robert M. Thrall, Rice University.

применения и углубление исследований операций, а также постоянное развитие и совершенствование соответствующих учебных программ приводят к необходимости рассматривать систему подготовки специалистов по исследованию операций в разных аспектах. Поляризация интересов, происходящая в настоящее время в области исследования операций, не является процессом, присущим только данному направлению научной деятельности. Этот процесс наблюдается в большинстве прикладных научных дисциплин и служит источником дискуссий по вопросам подготовки специалистов почти во всех центрах профессионального обучения.

В разд. 2 настоящей главы описаны *структура* системы подготовки специалистов по исследованию операций и те формы обучения, которые могут избрать желающие специализироваться в данной области. В разд. 3 рассмотрены вопросы, связанные с подготовкой специалистов различных квалификационных категорий,— от тех, кто использует методы исследования операций нерегулярно, до специалиста с ученой степенью доктора. В разд. 4 обсуждаются соответствующие учебные программы и курсы. Разд. 5 касается вопросов обеспечения данного научного направления профессионально подготовленными специалистами; при этом имеется в виду не временное использование специалистов для выполнения того или иного задания, а создание условий, способствующих привлечению в эту сферу научной деятельности тех, кто пригоден к такой работе, и особенно студентов. Автор не считает, что указанные выше четыре раздела охватывают весь круг вопросов, связанных с обсуждаемой темой. Однако представляется, что эти разделы включают материал, изложение которого, по-видимому, наиболее уместно. В списке литературы приведены цитируемые работы и ряд публикаций, полезных читателю в качестве дополнительного материала.

2. СТРУКТУРА СИСТЕМЫ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

Можно выделить следующие основные формы подготовки специалистов по исследованию операций: официальные, полуофициальные, неофициальные и обучение в процессе работы. При этом под официальными формами подразумевается подготовка дипломированных специалистов по исследованию операций в университетах и колледжах, а также обучение на специальных курсах, завершение которых удостоверяется соответствующим документом. Полуофициальная подготовка включает такие формы, как прохождение насыщенной программы обучения на краткосрочных курсах (продолжительностью от двух дней до шести-восьми недель) и посещение популярных лекций и практических занятий, организуемых в университетах для лиц, не являющихся студентами. К слушателям таких курсов в учебном процессе не предъявляются какие-либо обязательные требования, и они не получают специальных удостоверений об их окончании. Неофициальная подготовка включает участие в конференциях профессиональных обществ, симпозиумах, региональных семинарах, а также общее ознакомление с соответствующей литературой. И наконец, обучение в процессе работы — это обучение на рабочем месте при выполнении конкретного исследования операций.

2.1. Официальные формы подготовки

Учебные программы вузов и курсов по исследованию операций будут рассмотрены позже; сначала опишем организационную структуру системы обучения.

Университеты по своей природе являются наиболее консервативными структурными элементами системы высшего образования, так как их административное устройство сдерживает формирование новых специализированных подразделений. Уже неоднократно отмечалось, что по сравнению с

трудностями введения некоторой новой программы в университете более серьезными являются лишь трудности, связанные с попытками исключить какую-либо из существующих программ, даже если признано, что она уже не отвечает требованиям времени. Поэтому соображения тактического характера заставляют тех, кто предлагает введение учебных программ по исследованию операций, использовать слабые или сравнительно неустойчивые элементы административной структуры университета и устанавливать связи с существующими подразделениями, научные направления которых можно было бы усилить за счет введения новой жизнеспособной и прогрессивной учебной программы. Наилучшим примером является взаимовыгодная связь между учебными курсами по исследованию операций и организации производства. В 50-х годах факультеты по организации производства еще не завоевали прочных позиций в вузах. Однако их учебные программы, связанные с управлением промышленным производством, предоставляли естественную возможность для введения на этих факультетах курсов по исследованию операций, что и было сделано, причем в довольно широких масштабах. Это привело к а) преподаванию исследования операций в качестве самостоятельной дисциплины в университетах; б) введению обзорных курсов по исследованию операций для тех, кто хочет ознакомиться с этой дисциплиной факультативно, и в) к большей насыщенности учебных программ по исследованию операций для студентов старших курсов на технических и ряде других факультетах. Как и ожидалось, политика административного руководства факультетов по организации производства обострила отношения между вновь пришедшими специалистами по исследованию операций и представителями традиционных дисциплин. Источником разногласий, как правило, был вопрос о том, какое количество обязательных программ должно быть установлено для всех студентов этих факультетов (на каждой из ступеней высшего образования). Дебатировались и вопросы такого рода: должны ли учебные курсы по статистике составляться на рецептурном уровне? в каком объеме следует читать математические дисциплины? каково назначение учебных курсов по вычислительной технике?

В тех высших учебных заведениях, где новые коллективы специалистов по исследованию операций добились определенной самостоятельности, названия многих факультетов были изменены, а там, где представители традиционных дисциплин удерживали административные позиции, были введены учебные программы по исследованию операций, имеющие междисциплинарное назначение, или же открыты новые факультеты. Примечателен тот факт, что в настоящее время почти на всех технических факультетах университетов исследование операций рассматривается как академическая дисциплина и программы по исследованию операций, ориентированные на технические приложения, характеризуются гораздо более высоким математическим уровнем, чем аналогичные программы в учебных центрах по управлению (школах делового администрирования).

Учебные программы, близкие по содержанию к программам по исследованию операций и связанные с системным проектированием, получили название «системный анализ». Такие учебные курсы были введены на электротехнических факультетах и факультетах аэродинамики и космической техники. Курсы по исследованию операций рассредоточены по всем высшим техническим школам. Довольно часто некоторые факультеты изъявляют желание разработать для своих студентов старших курсов высокоспециализированные курсы по исследованию операций, а также по статистике. Организация таких курсов, по-видимому, довольно дорогостоящее мероприятие, если исходить из критерия результаты/затраты, однако это не относится к факультетам с большим контингентом студентов.

Так как исследования операций в конечном счете связаны с решением задач управления, вполне естественно, что многие учебные центры по управлению вынуждены были ввести в учебные программы курсы по исследованию

операций. Эти курсы имеют здесь различные названия, включая такие, как «научные методы управления» или «количественные методы». Иногда названия настолько туманны, что требуется специальная проверка, чтобы определить место предлагаемого курса в рамках учебной программы. Это объясняется тем, что в учебных центрах по управлению преподавание методов исследования операций и статистики очень часто совмещено в организационном отношении.

Хотя технические факультеты университетов и учебные центры по управлению представляют собой основные элементы системы подготовки специалистов, имеется и ряд других важных структурных элементов этой системы. Исследование операций и статистика естественным образом связаны между собой, и каждая из дисциплин проигрывает, если они развиваются в отрыве друг от друга. В университетах статистика преподавалась фрагментарно, по разрозненным мелким разделам. Два из них, наиболее близкие к программам по организации производства и управлению, теперь тесно увязаны с курсом исследования операций. Во многих университетах существует центральное отделение статистики, которое в организационном отношении отделено от узкопрофилированных факультетов. Во многих из этих отделений четко понимают, что исследование операций представляет собой специализированное направление, и в некоторых случаях официальное название отделений имеет отношение как к статистике, так и к исследованию операций.

В докладе Национальной академии наук [7] исследование операций отнесено к математическим дисциплинам. В последнее время появилась тенденция использовать слова «математические науки» в названиях факультетов (или отделений) учебных заведений. Там, где это произошло, исследование операций обычно включается в соответствующие учебные программы в качестве одного из направлений специализации.

В некоторые учебные программы по вычислительной технике и экономике включены курсы лекций по исследованию операций, хотя эти курсы обычно достаточно сжатые. Учебные программы научных дисциплин, изучающих поведение людей, содержат отдельные курсы или последовательность курсов, играющих важную роль в подготовке специалистов по исследованию операций. Примерами могут служить курсы с такими названиями, как индустриальная психология, законодательство и общество, управленческий учет, экономический анализ, экономика управления, социология городского населения.

Хотя учебные программы по подготовке специалистов по исследованию операций, приведенные в работе [5], не исчерпывают всей имеющейся информации по рассматриваемому вопросу, данные о 46 университетах США вполне представительны. В этих университетах имеется в общей сложности 58 программ, распределенных по следующим направлениям:

Технические науки	27
Управление	16
Отделения по исследованию операций или междисциплинарные группы	7
Математические науки	3
Прочие	5

Описание системы официальной подготовки специалистов по исследованию операций было бы неполным без упоминания курсов повышения квалификации и других специальных курсов для лиц, занятых регулярной работой. Такие курсы часто организуются вне университетских городков, в местах, близких к промышленным или административным комплексам (или даже непосредственно в них). На этих курсах можно получить квалификацию, отвечающую уровню ученой степени магистра. Руководство органи-

заций и фирм может субсидировать занятия своих служащих на этих курсах такими способами, как возмещение их затрат на обучение после успешного завершения курсов или выделение определенных ассигнований на эти цели.

Из вышеизложенного следует, что рассмотренные в данном разделе формы подготовки специалистов по исследованию операций получили в настоящее время широкое распространение и включают учебные программы самого различного уровня — от обзорных, ознакомительных курсов до программ докторантуры. Большинство этих курсов читается на технических факультетах университетов и в центрах по управлению, причем заметно увеличение числа программ, тесно связанных с математическими науками и науками о поведении.

2.2. Полуофициальные формы обучения

Так как официальные учебные программы подготовки специалистов по исследованию операций появились сравнительно недавно, нет ничего удивительного в том, что в настоящее время многие специалисты, занимающиеся исследованием операций на профессиональном уровне, не имеют ученых степеней. Лица, желающие начать заниматься исследованием операций (или те, кого руководство обязало в краткий срок углубить свои знания в области этой дисциплины), могут воспользоваться программами полуофициального обучения. Такие программы появились в университетах в середине 50-х годов, а в настоящее время широко используются также и в консультативных фирмах. Типичные краткосрочные курсы в университете имеют продолжительность от одной до двух недель и рассчитаны на различный уровень подготовки слушателей, т. е. включают как элементарный, вводный, материал, так и достаточно сложный. Более длительные программы обучения, рассчитанные в среднем на восемь недель, субсидировались правительством и были ориентированы прежде всего на подготовку преподавателей по исследованию операций; однако в последнее время финансирование таких курсов довольно заметно сократилось.

В период наибольшей популярности краткосрочных курсов основной контингент их слушателей составляли служащие государственных учреждений и промышленных фирм, но среди них было и небольшое число преподавателей тех учебных заведений, где стремились ввести новые или усовершенствовать существующие программы по исследованию операций. Некоторые из курсов, рассчитанные на высокую квалификацию слушателей, напоминали симпозиумы, и их полезность определялась, по-видимому, не столько учебным материалом, сколько предоставленными возможностями обмена информацией. И действительно, я могу вспомнить случаи, когда большинство слушателей вполне могли поменяться местами с лекторами!

К концу 60-х годов популярность краткосрочных курсов, организованных при университетах, упала, и контингент слушателей сократился. В то же время увеличилось число двух- и трехдневных курсов, организуемых консультативными фирмами. Как правило, программа каждого из таких курсов предназначалась для ряда организаций, посвящалась одному из разделов исследования операций, и важнейшее место в ней отводилось практическим приложениям, а также соответствующим теоретическим основам.

Определенная переориентация программ этого вида обучения была обусловлена наличием большого числа исследователей, уже получивших профессиональную подготовку по исследованию операций в системе официального образования, но стремящихся овладеть новыми для себя направлениями этой дисциплины, которые они считали важными для своей работы.

Таким образом, полуофициальные формы обучения, по-видимому, продолжают играть важную роль в подготовке специалистов по исследованию операций. Несмотря на то что некоторые краткосрочные курсы при универ-

ситетах были упразднены, ряд отличных курсов, и особенно для подготовленных слушателей, продолжает работать. Можно надеяться, что специализированные сжатые курсы, организованные консультативными фирмами, благодаря гибкости их учебных программ будут играть важную роль в подготовке специалистов по исследованию операций и в дальнейшем.

2.3. Неофициальные формы обучения

В то время как официальное обучение рассматривается как исходная предпосылка успешной профессиональной деятельности, а полуофициальная форма оказывается полезной в ее начале, неофициальная учеба специалиста по исследованию операций продолжается в течение всей его работы.

Основными элементами в системе неофициального обучения являются профессиональные общества, организующие общие конференции, совещания специализированных групп, региональные и местные собрания, приглашение лекторов и публикацию работ. В США основными обществами, осуществляющими такую работу, являются Американское общество по исследованию операций (ORSA) и Институт научных методов управления (TIMS). Общие (и региональные) конференции этих обществ дают возможность представлять и заслушивать доклады, неофициальным образом обмениваться мнениями в кулуарах или за чашкой кофе, организовывать специализированные секции и участвовать в их работе, а также знакомиться с новыми важнейшими достижениями в области исследования операций. Деятельность местных отделений ORSA и TIMS способствует регулярному обмену информацией между специалистами по исследованию операций, работающими в системе высшего образования, и специалистами, выполняющими прикладные исследования в промышленной сфере. Кроме того, эти отделения организуют научные семинары и симпозиумы.

Помимо двух основных профессиональных обществ — ORSA и TIMS,— аналогичную деятельность ведут и многие другие общества или ассоциации, интересы которых в значительной степени связаны с исследованием операций. В число таких обществ входят, например, следующие: эконометрическое общество, общества по психометрии, общей теории систем, математическому программированию, прикладной математике, ассоциация по вычислительной технике, Американская ассоциация по статистике и большинство профессиональных технических обществ.

В любой сфере научной деятельности важнейшей составной частью неофициальной подготовки специалиста является изучение книг и журнальных статей. Однако постоянно углубляющаяся специализация научных журналов чрезвычайно затрудняет систематический учет и изучение новейших публикаций. Статьи, помещаемые в журналах, которые не являются основными периодическими изданиями по вопросам исследования операций, освещаются и охватываются библиографическими сборниками в недостаточной мере. Так, в периодическом сборнике International Abstracts, издаваемом IFORS, отражаются главным образом публикации, появившиеся в основных журналах по исследованию операций. Поэтому вполне вероятно, что упускаются из вида статьи, посвященные, например, использованию методов исследования операций в управлении лесным хозяйством или при проектировании водоочистных сооружений. Отсутствие действительно исчерпывающего указателя работ по исследованию операций представляет собой основной недостаток в обеспечении специалистов необходимой информацией, и возможность его устранения в ближайшем будущем представляется весьма проблематичной. Большую помощь в поиске работ нужного направления оказывают обзоры работ по конкретным направлениям, содержащие обширные списки соответствующей литературы. Имеется также большое число книг (сборников), в которых представлены наиболее важные научные рабо-

ты в той или иной области прикладных исследований операций. Издания, подобные этому, оказывают существенную помощь при самостоятельной подготовке, обеспечивая читателя всем необходимым для первого ознакомления с изучаемым предметом.

Дополнительными источниками сведений о литературе по отдельным направлениям исследования операций могут неожиданно оказаться встречи и беседы с участниками научных конференций. Приглашение консультантов преследует самые различные цели, но один из основных видов их помощи заключается, как правило, в том, чтобы, во-первых, указать на специалистов, хорошо осведомленных в тех направлениях, которые имеют непосредственное отношение к рассматриваемой проблеме, и, во-вторых, в том, чтобы дать сведения о соответствующих публикациях.

2.4. Обучение в процессе работы

Вообще, наиболее эффективно такое обучение, которое непосредственным образом связано с практическим решением той или иной задачи. Изучение и освоение предмета, знание которого обещает принести непосредственную пользу в работе, кажется более легким, чем изучение дисциплины, которая хотя и создает значительный научный потенциал, но не находит прямого применения в работе специалиста. Поэтому для большинства специалистов по исследованию операций обучение в процессе практической работы может оказаться наиболее важным видом профессиональной подготовки. И действительно, рассмотренные выше виды обучения (официальные, полуофициальные и неофициальные) приносят мало пользы специалисту, если он не применяет соответствующие знания при решении стоящих перед ним задач (в равной степени это относится и к преподавателям: каждый из них, как правило, лучше знает именно тот материал, который находит отражение в его лекциях).

Ясно, что ведущую роль в профессиональной подготовке начинающих работников играют знания, которые они получают от более квалифицированных сотрудников. Впоследствии, когда начинающие работники переходят к самостоятельной профессиональной деятельности, они углубляют свои знания при решении конкретных задач. На этой стадии обращение к литературным источникам становится все более целенаправленным, и усвоение соответствующего материала ускоряется.

3. УРОВНИ НАУЧНОЙ КВАЛИФИКАЦИИ СПЕЦИАЛИСТОВ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

В данном случае термин «уровень» относится главным образом к официальным формам профессиональной подготовки специалистов по исследованию операций. Ясно, что степень и характер официального образования должны определяться целями профессиональной деятельности специалиста и соответствовать им.

Для правильного развития исследования операций как научной дисциплины необходимо соблюдение определенных пропорций в составе профессиональных кадров по уровню их научной квалификации. Этому специализированному направлению научной и практической деятельности будет нанесен ущерб, если в составе специалистов данного профиля будет слишком много или, наоборот, слишком мало научных работников, имеющих докторскую степень, или же если знание методов исследования операций будет достоянием лишь профессионалов в этой области.

3.1. Докторская степень

Вполне понятно, что для специалиста, ведущего исследовательскую и преподавательскую работу в университете, докторская степень имеет большое значение. Наличие ученой степени как официального свидетельства квалификации научного работника говорит в этом случае само за себя, но нужно учитывать и другие важные обстоятельства, обусловленные той важной ролью, которую призваны сыграть университеты как основные научные центры, обеспечивающие расширение фундаментальных знаний в любой из научных дисциплин. За исключением незначительного числа научно-исследовательских лабораторий промышленных фирм и правительственных организаций, проблемные исследовательские работы творческого характера ведутся главным образом в университетах, причем работы такого плана субсидируются из федеральных средств или выполняются по контрактам. К таким работам относятся, например, поиск эффективных алгоритмов для решения задач линейного программирования большой размерности с разреженными матрицами, определение оптимальной стратегии управления запасами в случае многопродуктовых стохастических потоков или построение моделей принятия решений в конфликтных ситуациях. Оценки профессиональной деятельности ученого, принятые в университетах, стимулируют публикацию научных работ, и нет ничего удивительного в том, что значительная доля статей по исследованию операций принадлежит научным работникам вузов, причем эти работы носят преимущественно теоретический характер. Независимо от того, распространяется ли национальное превосходство США в отношении численности докторов наук и на область исследования операций, мы должны быть настороже, чтобы не переоценить значение количества присуждаемых докторских степеней (обладатели которых заинтересованы в получении результатов только в сфере фундаментальных исследований) и предотвратить опасность непропорционального развития данной дисциплины.

Эта опасность не ограничивается возможностью безработицы для специалистов с ученой степенью доктора; гораздо хуже потенциальное влияние такого «перепроизводства» на характер публикаций. Когда работы теоретического плана встречаются редко, спрос на такие публикации увеличивается, и, чем более абстрактный характер носит работа, тем более ценной она считается в высших учебных заведениях. Если в результате этого в журналах по исследованию операций будет все больше публиковаться теоретических работ, а доля работ прикладного характера — сокращаться, появится серьезная опасность нарушения профессиональных связей между специалистами по исследованию операций, работающими в системе высшего образования, и теми, кто работает вне ее. Это может нанести серьезный ущерб специалистам обеих групп.

Прежде чем закончить обсуждение вопроса о роли докторов, следует указать, что наличие у специалиста по исследованию операций докторской степени отнюдь не означает его непригодности к решению проблем практического характера. Более того, имеется достаточно много областей деятельности вне высшей школы, где очень важно наличие докторской степени либо с точки зрения формальных требований к специалисту, либо как с этой точки зрения, так и в плане его высокой профессиональной подготовки. Это могут быть и некоторые научно-исследовательские лаборатории, и широкий спектр административных должностей. Одним из показателей творческой активности специалистов по исследованию операций, имеющих степень доктора, служит их способность совмещать успешную работу в высшей школе и вне ее.

3.2. Степень магистра

Не имея достаточно обоснованных критериев для оценки профессиональной подготовки специалистов по исследованию операций, я рискую ошибиться, считая, что потребность в специалистах, квалификация которых соответствует ученой степени магистра или близка к такому уровню, по меньшей мере, в десять раз больше потребности в специалистах с ученой степенью доктора. Если же такая оценка недалека от истины, то существующие университетские программы обучения нуждаются в некоторой перестройке.

Специалисты по исследованию операций, работающие вне системы высшего образования, как правило, лишь в незначительной степени заняты работой исследовательского характера, причем их исследования, в противоположность научным работам творческого, поискового характера, нацелены прежде всего на адаптацию существующих научных методов или связаны с развитием этих методов применительно к конкретным приложениям. Поэтому учебная программа подготовки в докторантуре вряд ли может считаться наиболее подходящим курсом официального обучения для специалистов с такой ориентацией. (В следующем разделе данной главы мы еще вернемся к этому вопросу.)

Специалистам, которые связаны с решением практических задач, необходима, по-видимому, более широкая основа профессиональной подготовки, чем сугубо теоретическая. Они должны уметь правильно оценивать и применять на практике результаты, полученные в работах исследовательского характера по самым различным направлениям исследования операций. В тех случаях, когда им необходимо использовать результаты технических исследований, они должны уметь: 1) правильно оценить возможные выгоды от консультаций со специалистами по узкопрофилированным направлениям исследования операций и 2) использовать такие консультации для выработки конструктивного подхода к решению рассматриваемой проблемы.

Специалист, который охотно работает над любой из возникающих проблем и которого коллеги считают надежным партнером в работе, по-видимому, будет более полезен в разработке операционного проекта, базирующегося на уже признанных и используемых результатах научных исследований, чем специалист, настаивающий на том, чтобы содержание проводимой им работы всецело соответствовало его статусу научного работника в области исследования операций. Возможно этим и объясняется тот факт, что при разработке операционных проектов многие корпорации избегают привлечения специалистов по исследованию операций с ученой степенью доктора.

Требования, предъявляемые к соискателям ученой степени магистра в различных вузах, далеко не одинаковы, поэтому, говоря о «квалификации, соответствующей ученой степени магистра», нужно иметь в виду, что это понятие довольно неопределенное. По-видимому, обучение в аспирантуре в течение года не обеспечивает достаточной базы для профессиональной деятельности на соответствующем уровне. В то же время двухгодичная аспирантура, включающая защиту диссертации,— это, может быть, больше, чем практически необходимо. Где-то в этих пределах и находится тот рациональный уровень научной подготовки квалифицированного работника, основная сфера деятельности которого будет связана с прикладными исследованиями операций. Это совсем не означает, что лица, получившие профессиональную подготовку, соответствующую более низкой (или более высокой) ступени официального обучения, не могут стать продуктивно работающими специалистами. Однако, до тех пор пока они не достигнут уровня подготовки, отвечающей указанным выше требованиям (добившись этого либо в системе официального образования, либо иным путем), трудно считать их специалистами, обладающими требуемой научной квалификацией.

Тем не менее в рассматриваемой сфере профессиональной деятельности есть место и для тех, кто вынужден (по крайней мере временно) ограничиться

официальным видом подготовки, получив степень бакалавра наук, при условии что эти лица стремятся углублять и расширять знания, используя подходящие способы.

3.3. Роль исследования операций как непрофилирующей дисциплины

В данной главе рассматриваются вопросы, связанные прежде всего с профессиональной подготовкой специалистов по исследованию операций, однако некоторое внимание следует уделить подготовке по этой дисциплине и лиц, которые не имеют прямого отношения к таким исследованиям и лишь иногда обращаются к методам исследования операций. Широкое распространение моделей и методов исследования операций приводит к тому, что все большее число специалистов в области финансов и бухгалтерского учета, статистики, вычислительной техники, науки о поведении и инженеров многих специальностей осознает целесообразность ознакомления с различными направлениями и методологией исследования операций и чувствует продуктивность использования этой дисциплины в своей работе. Ясно, что разработка операционного проекта осуществляется более эффективно, когда специалист по исследованию операций работает в контакте с коллегами и административным руководством, которые уже имеют определенные представления о роли и принципах построения операционной модели. Поэтому можно утверждать, что квалификационная характеристика специалистов в области исследования операций, отражающая структуру и методы только официального обучения, не является достаточно полной. Более того, нередки случаи, когда лица, намеревающиеся вначале получить лишь минимально необходимую подготовку по исследованию операций, приступают к освоению учебных программ более высокого уровня.

В данном разделе уместно рассмотреть и вопрос о том, в какой степени специалисты по исследованию операций должны ограничивать сферу деятельности формальными рамками своей специализации. Как уже отмечалось, первыми исполнителями практических исследований операций были специалисты, являющиеся представителями других отраслей науки. Означает ли признание исследования операций в качестве самостоятельной научной дисциплины, что такой переход специалистов в сферу исследования операций теперь уже не может рассматриваться как важный источник пополнения профессиональных кадров? Я полагаю, что лишь немногие искушенные профессионалы в области исследования операций ответят на этот вопрос утвердительно.

В силу сложившихся условий лица, которые первыми начали работать в области исследования операций, не прошли официальной школы обучения по данной дисциплине, хотя многие из них имели ученую степень в той или иной отрасли науки. Поэтому «уровень квалификации» научного работника в данном случае может быть охарактеризован в двух отношениях: 1) по наивысшему уровню квалификации, достигнутому в любой из дисциплин и 2) по уровню квалификации, приобретенной в рамках официальной подготовки по исследованию операций. Во втором из рассматриваемых аспектов профессиональная подготовка специалистов, для которых исследование операций не является профилирующей дисциплиной, не может быть охарактеризована простой ссылкой на их ученую степень, поскольку в зависимости от официальной специализации подготовка таких научных работников в области исследования операций может быть разной. Для магистра делового администрирования программа подготовки может включать один или два курса лекций по исследованию операций или научным методам управления,

докторской степени в таких областях науки, как теоретическая физика или фундаментальные математические дисциплины, в качестве второго направления специализации могут выбрать многие разделы исследования операций. Как правило, это весьма одаренные люди, и если их природные способности сочетаются с подлинным желанием заняться прикладными исследованиями операций, то они могут стать первоклассными специалистами в этой области.

4. УЧЕБНЫЕ ПРОГРАММЫ

В этом разделе мы рассмотрим, из каких курсов состоят учебные программы по исследованию операций на соответствующих ступенях высшего образования. Названия большинства глав данной книги соответствуют основным разделам исследования операций, но они не отражают те курсы, которые должны быть включены в учебные программы подготовки специалистов по исследованию операций.

4.1. Математические дисциплины, необходимые для подготовки специалиста по исследованию операций

Обсуждая состав математических дисциплин в рамках учебных программ подготовки специалистов по исследованию операций, удобно воспользоваться приведенной ниже таблицей, хотя представленный в ней перечень дисциплин не обязательно соответствует фактической структуре реальных учебных программ различных вузов.

Таблица

Двадцать трехчасовых курсов по математике, рассчитанных на один семестр

1. Элементарная математика	11. Современная алгебра
2. Вводный курс математического анализа	12. Теория вероятностей II
3. Математический анализ I	13. Статистика II
4. Математический анализ II	14. Комбинаторный анализ
5. Математический анализ III (функции многих переменных)	15. Дифференциальные уравнения
6. Линейная алгебра	16. Уравнения в конечных разностях
7. Теория вероятностей I	17. Численные методы
8. Статистика I	18. Теория функций действительного переменного
9. Основы математического моделирования	19. Теория функций комплексного переменного
10. Математический анализ IV (курс повышенной сложности)	20. Топология

Первые два курса — это лишь самая минимальная программа подготовки для тех, кто будет лишь иногда использовать методы исследования операций. Они включают части из курсов 3, 4, 6 и 7 и, как правило, не рассчитаны на студентов, которые намерены в дальнейшем специализироваться в математическом направлении. (В некоторых случаях читаются курсы, являющиеся продолжением курсов 1 и 2 и восполняющие ряд их пробелов; такие курсы в большей или меньшей степени соответствуют курсам 3, 4, 6 и иногда 7.)

Для тех, кто специализируется в области финансовой или коммерческой деятельности и желает получить математическую подготовку, необходимую для понимания элементарных обзорных курсов по исследованию операций, рекомендуется дополнительно прослушать первые два курса (в любом порядке) в течение года.

Студенты, ознакомившиеся с дисциплинами 3, 4, 6, 7 и 8-го курсов, обычно имеют достаточный запас знаний для того, чтобы приступить к изучению традиционных вводных разделов по исследованию операций. Курс 9, посвященный основам математического моделирования, пока еще не нашел достаточного распространения в качестве математической дисциплины; частично это связано с тем, что основа этого курса еще только начинает формироваться. В качестве основы такого курса можно использовать материал лекций по тому разделу исследования операций, в котором основное внимание обращается на структурную схему процесса моделирования. Одиннадцать курсов (с 3-го по 13-й) представляют собой солидную математическую базу подготовки специалистов по исследованию операций. Выбор одного или нескольких из последних курсов (с 14-го по 20-й) определяется предполагаемой специализацией студентов, которые хотят заниматься исследованиями методологического характера в одном или нескольких направлениях исследования операций, рассматриваемых в частях II и III настоящего справочника.

4.2. Другие основные дисциплины

Математические дисциплины составляют стержень учебных программ по исследованию операций, однако не следует переоценивать роль математики и принижать значение других важных дисциплин.

Специалист по исследованию операций должен быть знаком с вычислительной техникой. Как минимум необходимо знание одного или нескольких языков программирования. Возрастающая роль административных информационных систем делает желательным ознакомление с системами обработки информации.

Требуется определенная подготовка по экономике, психологии, политическим наукам, социологии, а также по более «техническим» вопросам, таким, как эргономика, промышленное законодательство, анализ хозяйственной деятельности.

4.3. Составные части исследования операций

Дисциплины, названия которых соответствуют названиям глав из частей II и III первого тома данной книги, составляют теоретическую основу количественных методов исследования операций. Сфера применения этих методов широко представлена во втором томе, в части I, посвященной математическим моделям исследования операций. Вопросы прикладной тематики, обсуждаемые в части II второго тома, по-видимому, в меньшей мере пригодны для включения в учебные программы факультетов, где присуждаются ученые степени в области исследования операций. Однако соответствующие курсы лекций могут быть включены в учебные программы других факультетов или подразделений университетов. Прикладная тематика представляет собой богатую область для актуальных исследовательских работ соискателей ученых степеней магистра и доктора.

Учебная программа подготовки магистров по исследованию операций должна, по-видимому, включать по крайней мере половину курсов по соответствующим методологическим и прикладным частям настоящего справочника, и при этом не менее двух курсов по каждой из его глав. Как уже отмечалось ранее, для специалиста, занимающегося практическими исследова-

ниями, разносторонняя подготовка более важна, чем узкая специализация. Программа подготовки по исследованию операций в докторантуре обычно сконцентрирована на углубленном изучении какого-либо одного из направлений методологического или прикладного характера. Для тех, кто специализируется в методологии исследования операций, полезно включить курсы, характеризующие прикладные аспекты избранного теоретического раздела исследования операций. Аналогично при специализации в области прикладных исследований соискателю будут весьма полезны курсы лекций повышенной сложности по тем теоретическим разделам исследования операций, которые находят применение в избранной им области прикладных исследований. Однако разносторонняя подготовка по широкому спектру направлений исследования операций не должна быть основной целью занятий в докторантуре, так как практика показывает, что специалист, обладающий глубокими знаниями в одной из областей и добившийся в ней определенных научных успехов, вполне может увеличить свой научный потенциал путем самообразования.

Способность к творческой деятельности — редкий дар, и не следует затруднять его проявление неоправданными требованиями к расширению диапазона научной компетенции. Многие учебные программы по исследованию операций страдают от инспирированных местническими интересами необоснованных требований, обусловленных, по-видимому, не чем иным, как желанием сократить «утечку» учащихся из некоторых направлений научной специализации, привлекательность которых заметно уменьшается.

Среди преподавателей по исследованию операций продолжают существовать разногласия по вопросу о том, в какой пропорции должны быть представлены в учебных программах занятия по профилирующим предметам и практическая часть, предусматривающая приобретение опыта работы в какой-либо отрасли промышленности, в органах государственного управления или других организациях. Если цель заключается в подготовке специалистов, способных удовлетворять непосредственные практические нужды организаций — заказчиков исследований операций, то следует отдать предпочтение учебным программам с бо́льшим удельным весом практической части. Однако специалисту с такой подготовкой трудно повышать научную квалификацию как путем сомообразования, так и при обучении на вечерних курсах. Если же цель заключается в подготовке специалистов, обладающих необходимыми знаниями для продуктивного использования накапливаемого опыта практической работы, то, по-видимому, более целесообразны программы, отводящие центральное место изучению теоретических профилирующих дисциплин.

Руководители организаций, обеспечивающие всестороннее практическое обучение новых сотрудников по месту работы, предпочитают, по-видимому, принимать на работу специалистов, имеющих более глубокую теоретическую подготовку. В то же время руководители, приглашающие специалиста лишь на время и для решения конкретных проблем, но не преследующие цели формирования постоянной операционной группы, обычно предпочитают иметь дело с теми, кто имеет большой опыт практической работы.

Такой противоречивости интересов вряд ли можно избежать, поэтому представляется, что и для аспирантуры, и для докторантуры в равной степени необходимы учебные программы обоих типов.

Некоторые все еще считают, что специалисты в области исследования операций представляют собой профессиональные кадры более низкой квалификации по сравнению с теми, которые приходят в эту область исследований из других, давно сформировавшихся дисциплин. По этому вопросу тоже не следует высказывать излишне строгих и поспешных суждений. Мне представляется, что специалисты по исследованию операций со степенью магистра имеют, несомненно, более высокую научную подготовку, в то время как для специалистов, имеющих докторскую степень, общей закономерности

в этом отношении не существует, и такое положение сохранится в будущем.

Названия глав части II второго тома данной книги характеризуют ряд возможных областей практической профессиональной деятельности специалиста по исследованию операций. Во многих из этих областей работа специалиста оказывается более успешной в том случае, если он обладает определенными знаниями в той или иной области. Например, специалисту, намеривающемуся заниматься проблемами городского планирования, будет весьма полезно знание организационно-функциональных схем построения государственных учреждений. Ясно также, что эффективность работы специалиста, ведущего операционное исследование в области здравоохранения, будет выше в том случае, если он знаком с особенностями работы больниц, клиник и других учреждений системы здравоохранения.

Отдельные сведения по таким вопросам могут содержаться в курсах лекций, но основная часть соответствующих знаний должна быть получена студентом во время выполнения практической работы. В профессорско-преподавательском штате факультетов высших школ возрастает доля специалистов по исследованию операций, пришедших из таких сфер, как здравоохранение, деловое администрирование, охрана окружающей среды, и это значительно усиливает практическую ориентацию официальных учебных программ.

Если раньше в процессе обучения студенту поручалась практическая работа по какому-либо из частных приложений исследования операций, он, конечно, имел возможность увеличить вероятность ее успешного выполнения, изучая по выбору специализированные курсы по исследованию операций. Однако такой метод обучения себя не оправдал, и, по-видимому, уровень подготовки продолжает в сильной степени зависеть от обучения в процессе практической работы. Увеличению притока специалистов по исследованию операций в указанные выше сферы деятельности и повышению качества их подготовки, возможно, могли бы содействовать летние курсы, организуемые для студентов, интересующихся соответствующими областями прикладных исследований.

5. ПРИВЛЕЧЕНИЕ КАДРОВ В СФЕРУ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Любое обсуждение проблем подготовки специалистов по исследованию операций будет бессмысленным, если нет желающих специализироваться в данном направлении. Американское общество по исследованию операций (ORSA) и Институт научных методов управления (TIMS) ведут активную деятельность, направленную на то, чтобы привлечь внимание студентов к исследованию операций как области профессиональной специализации. Они совместно устраивают и финансируют курсы лекций; обе организации проводят студенческие семинары, премируют лучшие студенческие работы. Комитет по образованию ORSA подготовил получивший широкое распространение рекламный проспект [5], в котором наглядно показаны особенности научной деятельности специалиста по исследованию операций, приводится перечень основных периодических изданий и содержится список некоторых работ по ИО. Этот проспект периодически перерабатывается и издается в новых вариантах.

Каждый специалист по исследованию операций должен быть заинтересован в притоке новых, хорошо подготовленных и способных кадров. Он может содействовать этому следующим образом:

1) давая советы и консультации молодым сотрудникам из круга знакомых;

2) помогая молодым коллегам из своей организации осознать потенциальные возможности исследования операций;

3) побуждая руководство своей организации привлекать к работе на летний период студентов, специализирующихся в области исследования операций;

4) содействуя участию своей организации в программах практического обучения методам исследования операций;

5) показывая своим примером преимущества исследования операций как области профессиональной деятельности.

Содействие специалиста в привлечении кадров оказывается более эффективным, если он сам хорошо осведомлен о последних достижениях в области исследования операций, знает историю развития и философские аспекты этой научной дисциплины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bonder S., Operations Research Education, Some Requirements and Deficiencies, *Operations Res.*, **21**, 796—809 (1973).
2. Bonder S., Operations Research As a Profession, *Management Sci.*, **17**, B37—B53 (1970).
3. Bonder S., Ed., Some Papers on Educational Issues in The Management Sciences and Operations Research, *Management Sci.*, **17**, B1—B36 (1970).
4. Devron M., Ed., NATO Conference, Education and Training on Operational Research I and II, Istanbul Turkey, 31 August — 4 September, 1970.
5. Education Programs in Operations Research/Management Science, 54 pp., 1973, Education Committee of the Operations Research Society of America, 428 East Preston Street, Baltimore, Maryland 21202.
6. Morris W. T., On the Art of Modeling, *Management Sci.*, **13**, B707 — B717 (1967).
7. The Mathematical Sciences, A Report, Publication 1681, National Academy of Sciences, Washington, D. C., COSRIMS, 1968.

Часть II

Методы исследования операций (детерминированные модели)

II-1. Линейное программирование

Х. Таха[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

Формированию линейного программирования (ЛП) в качестве первого самостоятельного направления в исследовании операций положил начало Дж. Данциг, разработавший в 1947 г. симплекс-метод (СМ) [2)]. Необходимость создания методов решения оптимизационных задач достаточно ясно осознавалась уже и раньше, в частности экономистами и военными специалистами, которым во время второй мировой войны приходилось искать пути решения сложных задач, возникавших при планировании стратегических операций.

Важность разработанного Данцигом симплекс-метода стала еще более очевидной после того, как основоположником теории игр Дж. Нейманом в 1947 г. была развита концепция двойственности. Это открыло путь исследованиям по многим направлениям ЛП, что обеспечило в дальнейшем увеличение практической ценности и расширение сферы применения методов ЛП. Пятидесятые годы явились периодом интенсивного развития данной дисциплины в части разработки новых алгоритмов и теоретических исследований. В настоящее время ЛП с точки зрения уровня

[1)] Hamdy A. Taha, University of Arkansas.

[2)] Термин «линейное программирование» впервые появился в 1951 г. в работах американских ученых (Дж. Данциг, Т. Купманс), а первые исследования по линейному программированию (основные задачи и приложения, критерий оптимальности, экономическая интерпретация, методы решения, геометрическая интерпретация результатов решения) были проведены в конце 30-х годов в СССР в Ленинградском университете Л. В. Канторовичем [45]. Дж. Данциг в своей монографии [17, стр. 29—30] отмечает в связи с этим, что «Канторовича следует признать первым, кто обнаружил, что широкий класс важнейших производственных задач поддается четкой математической формулировке, которая, по его убеждению, дает возможность подходить к задачам с количественной стороны и решать их численными методами...» — *Прим. перев.*

теоретических разработок, сферы приложений и реализации вычислительных методов является одним из наиболее развитых направлений в области решения оптимизационных задач. Достижения в области ЛП содействовали прогрессу в разработке алгоритмов решения других задач математического программирования, в том числе в области целочисленного, стохастического и нелинейного программирования.

Несомненно, что успехи, достигнутые в использовании методов ЛП при решении конкретных задач, во многом обусловлены значительным увеличением быстродействия и объема памяти вычислительных машин. Об этом свидетельствует множество разнообразных программ для вычислительных машин, в том числе нашедшие широкое распространение у пользователей программы, предлагаемые фирмами International Business Machines (MPSX), Control Data (OPHELIE) и Scientific Data Control, Лондон (UMPIRE). В частности, возможность осуществления вычислительных процедур с многократно увеличенной точностью позволила значительно уменьшить эффект ошибки округления.

Теория ЛП подробно изложена во многих известных книгах, например [17, 33, 37, 47, 60, 66, 67]. Цель настоящей главы состоит в том, чтобы дать систематизированное изложение основных положений данной дисциплины и охарактеризовать области ее применения. Материал главы не включает ряд смежных вопросов, тесно соприкасающихся с такими разделами исследования операций, как потоки в сетях, теория игр, задачи линейного программирования большой размерности, так как им посвящены самостоятельные главы данной книги. Вследствие ограничений на объем изложения (и наличия обширной библиографии по ЛП) в список литературы, приведенный в конце главы, включены в основном работы принципиального характера.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача ЛП математически может быть сформулирована следующим образом:

$$\text{максимизировать (или минимизировать)} \quad x_0 = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j \, (\leqslant, \; = \text{ или } \geqslant) \, b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Экономическая интерпретация модели ЛП, охватывающая широкий круг приложений, состоит в следующем. Моделируемая

система характеризуется наличием нескольких видов «производственной деятельности» j ($j = 1, 2, \ldots, r$), для осуществления которых требуются имеющиеся в ограниченном количестве различные *ресурсы* b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Расход i-го ресурса на единицу продукта j-го вида производственной деятельности равен a_{ij}. В свою очередь при таком потреблении результат j-го вида производственной деятельности для единицы соответствующего продукта (удельная стоимость или прибыль) характеризуется величиной c_j.

Цель построения модели состоит в определении *уровней* (объемов производства) каждого вида производственной деятельности x_j, при которых оптимизируется (максимизируется или минимизируется) общий результат производственной деятельности системы в целом без нарушения ограничений, накладываемых на использование ресурсов. Обычно функцию x_0 называют *целевой функцией*, а лимиты потребления ресурсов — *ограничениями*.

Основными допущениями, принимаемыми при построении линейных моделей, являются: 1) пропорциональность, 2) аддитивность и 3) неотрицательность. *Пропорциональность* означает, что затраты ресурсов на некоторый вид производственной деятельности, а также вклад этого вида производственной деятельности в целевую функцию прямо пропорциональны его уровню. С другой стороны, *аддитивность* указывает на то, что общая величина ресурсов, потребляемых в системе всеми видами производственной деятельности, равна сумме затрат ресурсов на отдельные виды производственной деятельности. Аналогично интерпретируется и целевая функция.

Допущения о пропорциональности и аддитивности обеспечивают строгую линейность соответствующих функций. В практических ситуациях истинный характер зависимостей редко бывает строго линейным. Однако допущение о линейности позволяет разработать исключительно эффективные вычислительные методы, использование которых для решения ряда задач с нелинейными зависимостями вполне оправдано, несмотря на приближенный характер решений, получаемых на основе линейной аппроксимации.

Неотрицательность означает, что ни одному из видов производственной деятельности не может быть приписан отрицательный уровень. Для большинства встречающихся на практике систем это допущение является естественным логическим следствием условий их функционирования, однако его включение в структуру модели ЛП обусловлено также и удобствами аналитического представления. Кроме вышеуказанных, встречаются и такие ситуации, когда уровень производственной деятельности может не иметь ограничения в знаке. Это характерно для моделей *целевого программирования*, ограничения которых не могут удов-

летворяться одновременно. Например, различные функциональные службы организации обычно работают при наличии противоречивых ограничений. Допустим, что эти ограничения заданы в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

В основе целевого программирования лежит допущение о возможности несоблюдения некоторых из ограничений, что может учитываться введением соответствующих функций штрафа (ущерба). Это можно сделать, добавляя в левую часть i-го ограничения некоторую не ограниченную в знаке переменную (вид производственной деятельности) y_i, характеризующую величину нарушения этого ограничения. Интересно заметить, что, когда такая задача решается как задача ЛП, обычно оказывается эффективной подстановка $y_i = y_i^+ - y_i^-$, где y_i^+ и $y_i^- \geqslant 0$.

Линейное программирование широко применяется в сфере военной деятельности, сельском хозяйстве, промышленности, управлении производственными процессами и запасами, в экономике и на транспорте. Исчерпывающая библиография по соответствующим вопросам приведена в книге Гасса [33].

Область применения ЛП включает и задачи динамического характера, в которых рассматривается конечное число периодов времени, и результат предыдущего периода определяет (частично) исходные параметры последующего. Такая ситуация особенно типична для задач управления производством и запасами [16, 23, 44, 55]. В других приложениях подобные «динамические» свойства модели описываются путем представления ее коэффициентов в виде функций от некоторого параметра. Например, в нефтеперерабатывающей промышленности встречается такая ситуация, когда исходная структура модели в течение рассматриваемого периода времени остается неизменной, а спрос на некоторые нефтепродукты характеризуется наличием тренда. Параметрические функции могут быть непосредственно встроены в модели ЛП при анализе моделей на чувствительность или при параметрическом исследовании [34, 62, 63] (см. разд. 6 настоящей главы).

Несмотря на то что по своей сущности модели ЛП относятся к классу детерминированных моделей, в ряде случаев они используются и для решения задач, постановка которых в явном виде содержит информацию вероятностного характера. Примером является транспортная задача при условии, что спрос в местах доставки товаров задается как случайная величина [28]. В некоторых случаях элементы неопределенности входят в целевую функцию [13, 25, 26, 54]. Другим примером включения в модель элементов неопределенности могут служить задачи программирования

с линейными ограничениями вероятностного характера [6]. Основная идея всех этих моделей заключается в том, чтобы свести (иногда приближенными методами) описание соответствующих случайных изменений к эквивалентным детерминированным соотношениям. Линейное программирование использовалось также и в связи с анализом марковских цепей [74].

Линейное программирование находит применение и в других научных дисциплинах. Типичным примером служит регрессионный анализ в статистике [75]. На основе теории ЛП можно дать прямое доказательство теоремы о минимаксе, рассматриваемой в теории игр [10]. В последнее время делались попытки распространить ЛП и на область функций комплексных переменных [56], хотя полученные результаты и не нашли применения.

Большинство систем, для исследования которых применяется ЛП, в действительности характеризуются нелинейными зависимостями. Чтобы соответствующие задачи можно было сформулировать в рамках ЛП, эти нелинейные соотношения обычно аппроксимируются линейными функциями (причем в каждом конкретном случае принимаются определенные разумные допущения). Лишь в задачах, типичных для нефтеперерабатывающей промышленности, редко удается использовать линейную аппроксимацию реальных зависимостей, удовлетворяющую целям исследования [32]. Тем не менее решение задач методами ЛП (на базе приближенных моделей) обычно обеспечивает достаточно хорошие практические результаты, подтверждающие целесообразность широкого применения таких линейных моделей.

Несмотря на то что некоторые задачи допускают линеаризацию, позволяющую использовать для их решения методы ЛП, в ряде случаев нелинейность выражена настолько сильно, что линейная аппроксимация соответствующих зависимостей оказывается недостаточно точной. Однако, хотя в таких ситуациях аппарат ЛП и не используется на стадии построения моделей, иногда его можно применить для разработки метода решений. Для этого нужно преобразовать исходную нелинейную модель в эквивалентную ей линейную модель (или ряд моделей ЛП), точно или приближенно отражающую исходную. Примеры точного преобразования нелинейных моделей связаны с использованием методов гиперболического или дробно-линейного программирования [7], квадратичного программирования (КП) [73], целочисленного ЛП [36, 50] и критериев минимакса [10]. Приближенное преобразование осуществляется в сепарабельном [8, 39, 57] и выпуклом программировании [46, 77]. В качестве иллюстрации рассмотрим кратко по одному примеру точного и приближенного преобразования исходной модели.

Задача КП может быть записана в виде

$$\text{минимизировать } x_0 = \mathbf{cx} + \mathbf{x}^t\mathbf{Dx}$$

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{IS} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}, \ \mathbf{S} \geqslant 0,$$

где $\mathbf{D}$ — симметрическая квадратная матрица порядка n, которая считается положительно-определенной, а $\mathbf{S}$ — m-мерный вектор-столбец остаточных (свободных) переменных. Используя условия Куна — Таккера, можно показать [73], что необходимые и достаточные условия того, чтобы вектор $\mathbf{x}$ соответствовал оптимальному решению, заключаются в существовании векторов $\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0$ и $\mathbf{u} \geqslant 0$ (множителей Лагранжа), удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$-2\mathbf{Dx} + \mathbf{A}^t\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Iu} = \mathbf{c}^t, \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{IS} = \mathbf{b},$$

$$u_j x_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda_i S_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\mathbf{u}, \ \boldsymbol{\lambda}, \ \mathbf{S}, \ \mathbf{x} \geqslant 0.$$

Таким образом, решение этой задачи КП сводится к решению вышеприведенной системы уравнений, которые, за исключением условий $u_j x_j = \lambda_i S_i = 0$, являются линейными. Для решения можно использовать методы линейного программирования, вводя «искусственные» переменные и целевую функцию, минимизирующую сумму этих переменных. Теоретическая основа вычислительных методов ЛП позволяет в неявном виде контролировать условия $u_j x_j = \lambda_i S_i = 0$ (см. разд. 4 настоящей главы).

В сепарабельном программировании рассматривается класс задач, целевые функции которых имеют вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j),$$

откуда следует, что f может быть представлена в виде суммы функций f_j одной переменной. Наиболее важно при этом показать, каким образом функции $f_j(x_j)$ можно аппроксимировать линейными отрезками.

Предположим, что допустимая область изменения x_j задана соотношениями $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и определим $a_{k_j j}$, $k_j = 1, 2, \ldots, K_j$, таким образом, что

$$a_{1j} \leqslant a_{2j} \leqslant \ldots \leqslant a_{K_j j},$$

где $a_j = a_{1j}$ и $b_j = a_{k_j j}$. Тогда функцию $f_j(x_j)$ можно линейно аппроксимировать соотношением

$$f_j(x_j) \approx \sum_{k_j=1}^{K_j} \lambda_{k_j} f_j(a_{k_j j}),$$

где $\sum_{k_j=1}^{K_j} \lambda_{k_j} = 1$ и $\lambda_{k_j} \geqslant 0$ при всех k_j. При этом x_j выражается

через λ_{k_j} и $a_{k_j j}$ следующим образом:

$$x_j = \sum_{k_j=1}^{K_j} \lambda_{k_j} a_{k_j j}.$$

Линейная аппроксимация удовлетворяет необходимым требованиям только в том случае, если для каждой точки j не больше двух *смежных* значений весов λ_{k_j} принимают положительные значения, т. е. если вес λ_l положителен, то положительным может быть только либо λ_{l-1}, либо λ_{l+1}. Как и в случае квадратичного программирования, вычислительные процедуры ЛП в данном случае также позволяют контролировать указанное условие в неявном виде. Важно, однако, отметить, что если в задачах КП приведение к линейной форме обеспечивает точное решение, то в задачах сепарабельного программирования линеаризация позволяет получить только приближенное решение, даже если решение исходной задачи имеет глобальный оптимум.

Существует особый класс моделей ЛП, представляющих большой интерес в силу специфики их построения и области применения. *Транспортная* модель [40, 45, 48] предназначена для выбора наиболее экономного плана перевозок товаров из m источников (пунктов производства) к n станциям назначения (пунктам сбыта). Возможная величина поставок от источника i равна a_i единиц, а спрос на товар в j-м пункте сбыта равен b_j единиц. Стоимость перевозки единицы товара из источника i к станции назначения j равна c_{ij}. Таким образом, если x_{ij} — соответствующий уровень производственной деятельности, т. е. в данном случае объем перевозок от источника i к пункту j, то математическая формулировка модели принимает следующий вид:

$$\text{минимизировать } x_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \text{ при всех } i \text{ и } j.$$

В такой постановке задачи требуется выполнение условия $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} = b_j$, что всегда можно сделать, добавив фиктивный источ-

ник или пункт сбыта, с тем чтобы скомпенсировать разность $\left|\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\right|$.

Очевидное обобщение приведенной модели включает рассмотрение транспортной сети, допускающей существование промежуточных транспортных узлов; при этом, прежде чем попасть на конечную станцию назначения, товары (или часть их) могут транзитом следовать через другие источники или пункты сбыта. Сформулированная при этих условиях задача называется *транспортной задачей с промежуточными пунктами* [61]. Новые условия задачи можно учесть, рассматривая транспортную сеть с $m+n$ источниками и $m+n$ пунктами сбыта. При этом объемы поставок от каждого источника и размеры спроса в каждом пункте сбыта увеличиваются на величину некоторого буферного запаса $B \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, так что величина поставки от источника i принимается равной $a_i + B$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ и равной B при $i = m+1, m+2, \ldots, m+n$. Аналогично потребление товара в пункте сбыта j будет равно B при $j = 1, 2, \ldots, n$ и равно $b_{j-n} + B$ при $j = n+1, n+2, \ldots, n+m$. Удельная стоимость перевозки c_{ij} определяется характером решаемой задачи.

Сфера применения транспортной модели не ограничивается приведенными выше простыми примерами. Одним из других примеров использования транспортной модели может служить классическая задача о поставщике [43]. Поставщик имеет контракт на снабжение чистыми салфетками, заключенный на n дней. Поставка чистых салфеток может обеспечиваться как закупками новых партий, так и стиркой и глажением использованных, что обходится дешевле, чем закупка новых. Цель поставщика — удовлетворить спрос на чистые салфетки при минимально возможных затратах. Выраженная в других терминах задача о поставщике характеризует реальную ситуацию, возникающую в военной авиации при определении необходимого количества запасных авиадвигателей. Другим примером задачи транспортного типа может служить задача календарного планирования производства [44]. В ней для каждого из n плановых периодов определяется оптимальный объем производства, удовлетворяющий заданный спрос, причем эти объемы не должны превышать производственных возможностей, имеющихся в каждом из рассматриваемых периодов. Продукция текущего периода может быть предназначена для одного или нескольких последующих периодов (но не прошлых). Удельная стоимость «перемещения» единицы изготовленной продукции в последующий период включает затраты на производство и издержки, обусловленные хранением запасов (в предположении отсутствия потерь при хранении).

Особым видом задачи транспортного типа является задача о *назначениях*, классический вариант которой связан с распределением m исполнителей по n видам работ, причем эффективность использования каждого исполнителя на разных работах различна. Учет специфики задачи о назначениях в исходной транспортной модели проявляется в ограничениях вида $a_i = b_j = 1$ для всех i и j. Стоимость выполнения работы j исполнителем i обозначается через c_{ij}. Несколько необычной разновидностью задачи о назначениях является задача о *бракосочетаниях* [15], решение которой свидетельствует о том, что наилучшим типом брака является моногамия (!). Особая важность задачи о назначениях определяется тем обстоятельством, что ее можно непосредственно использовать при разработке алгоритмов решения широко известной задачи о *коммивояжере* [23, 53].

Другим вариантом транспортной задачи является *обобщенная транспортная задача*, формулировка которой имеет следующий вид:

$$\text{минимизировать } x_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad x_{ij} \geqslant 0.$$

Одно из приложений такой модели связано с оптимизацией распределения различных типов самолетов по разным авиалиниям, с тем чтобы удовлетворить потребности пассажиров при минимально возможном уровне эксплуатационных расходов [27]. В этой модели a_i — максимальное число пассажиров на авиалинии i, b_j — число имеющихся в наличии самолетов типа j, p_{ij} — допустимое число пассажиров для одного самолета типа j на линии i, а c_{ij} — эксплуатационные расходы, приходящиеся на один самолет типа j на линии i. Требуется определить x_{ij}, т. е. число самолетов типа j на линии i.

3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При решении задач линейного программирования все ограничения, имеющие вид неравенств, преобразуются в равенства путем 1) добавления неотрицательной остаточной переменной в левую часть неравенств вида ($\leqslant$) и 2) вычитания неотрицатель-

ной избыточной переменной из левой части неравенств вида ($\geqslant$) [1]). Кроме того, целесообразно сделать неотрицательными все элементы правой части b_i, умножая для этого i-е уравнение на -1, если $b_i < 0$, или используя эквивалентность соотношений $f_i(x_1, \ldots, x_2) \leqslant b_i$ и $-f_i(x_1, \ldots, x_2) \geqslant -b_i$.

После приведения всех неравенств к равенствам удобная для решения запись задачи линейного программирования в матричном представлении имеет следующий вид:

$$\text{максимизировать (или минимизировать) } x_0 = \mathbf{cx}$$

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор, компонентами которого являются управляемые переменные, или уровни видов «производственной деятельности», причем этими компонентами могут быть не только r исходных управляемых переменных модели, но и остаточные и избыточные переменные. Вектор $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^t$, компонентами которого являются правые части неравенств, считается неотрицательным. Матрица $\mathbf{A}$ содержит теперь коэффициенты также при остаточных и избыточных переменных.

Другой удобной записью рассматриваемой задачи является запись в векторной форме. Пусть $\mathbf{A} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$, тогда задача формулируется следующим образом:

$$\text{максимизировать (или минимизировать) } x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, \qquad x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Без потери общности можно считать, что $m < n$. Если $m > n$, то это означает, что система ограничений содержит по крайней мере $m - n$ избыточных уравнений. Если $m = n$ и $\mathbf{A}$ — матрица полного ранга, то система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение, что является особым случаем. И наконец, при $m < n$ система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ обычно имеет бесконечное множество решений. Если система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ несовместна, задача не имеет допустимого решения.

Главной особенностью задач ЛП, лежащей в основе построения метода их решения, является то, что полное (ограниченное) пространство допустимых решений таких задач (включающее обычно бесконечное множество точек) может быть определено с помощью

[1]) Как правило, в отечественной литературе в обоих случаях используется термин «свободная переменная».— *Прим. перев.*

конечного числа точек, соответствующих особым допустимым решениям. Теоремы 1 и 2 указывают, как можно идентифицировать эти особые точки.

Теорема 1: Конечное оптимальное решение задачи ЛП должно соответствовать допустимой экстремальной точке пространства решений.

Справедливость этого утверждения интуитивно не вызывает сомнений, так как выпуклая комбинация (выпуклая оболочка) допустимых экстремальных точек включает все точки допустимых решений, удовлетворяющих условиям $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. (В целях упрощения полагаем, что пространство решений ограничено.) Другими словами, координаты допустимых экстремальных точек несут достаточный объем информации для определения полного пространства решений задачи ЛП.

Теорема 1 указывает на то, что задачу ЛП можно решить путем простого перебора всех допустимых экстремальных точек. При этом возникает вопрос: как определить эти точки алгебраическим способом? С математической точки зрения *экстремальная точка* определяется как допустимая точка, которая не может быть идентифицирована выпуклой комбинацией координат двух любых других допустимых точек. Для разработки соответствующего вычислительного метода такое определение не носит конструктивного характера. Однако нижеследующая теорема показывает, каким путем находятся экстремальные точки для линейной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, состоящей из m уравнений и содержащей n неизвестных.

Теорема 2: Базисные решения системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ полностью определяют все ее экстремальные точки.

Так как базисное решение определяется базисом, т. е. m *независимыми* векторами $\mathbf{P}_j$ (из их общего числа n), то все экстремальные точки находятся путем вычисления $n!/m!\,(n-m)!$ допустимых базисных решений системы $\mathbf{Ax} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}$. В любой экстремальной точке переменная x_j, соответствующая вектору $\mathbf{P}_j$, не входящему в базис, имеет нулевое значение. Естественно определить такую переменную как *небазисную*. С другой стороны, если x_j ассоциирована с базисным вектором, то она называется *базисной* переменной и может быть положительной или равной нулю.

Если все базисные переменные строго положительны, соответствующая экстремальная точка (базисное решение) называется *невырожденной*; в противном случае, когда хотя бы одна из базисных переменных равна нулю, экстремальная точка называется

вырожденной. Интересно отметить, что невырожденная экстремальная точка определяется одним и только одним базисным решением, тогда как вырожденная экстремальная точка определяется более чем одним базисным решением.

В нахождении экстремальных точек с помощью базисных решений системы заключается суть *симплекс-метода* (СМ) решения задач ЛП. Однако вместо простого перебора всех базисных решений, как это предлагалось выше, в симплекс-методе после выбора некоторого начального *допустимого* базисного решения (д. б. р.) системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ генерируются новые д. б. р., не нарушающие условия $x \geqslant 0$, причем в качестве каждого нового д. б. р. выбирается такое, которое по крайней мере не ухудшает значения целевой функции. Следовательно, в процессе вычислительной процедуры предыдущее д. б. р. автоматически исключается. В следующем разделе приводится формализованное описание СМ.

Тот факт, что (конечное) оптимальное решение задачи ЛП, полученное с помощью СМ, всегда должно быть ассоциировано с д. б. р., является тонкой особенностью СМ. Если задача ЛП имеет одно ограничение, то независимо от числа видов производственной деятельности (переменных), включенных в модель, заранее известно, что в оптимальном решении положительное значение может иметь только *одна* из этих переменных.

Если добавляется еще одно ограничение, не являющееся избыточным, то положительное значение могут иметь не более чем *две* переменные. В общем случае увеличение числа независимых ограничений приводит к большему числу переменных в оптимальном решении, однако это может ухудшить значение целевой функции.

Следует отметить, что включение большого числа переменных, позволяющее анализировать результаты более разнообразного сочетания видов производственной деятельности, желательно во многих практических случаях. К сожалению, единственный путь осуществления этого в рамках ЛП (при допущении о единственности оптимального решения) состоит в увеличении числа ограничений. Компромисс в данном случае состоит в том, что увеличение числа переменных достигается за счет ухудшения оптимального значения целевой функции.

Главная причина этого кажущегося «парадокса» заключается в том, что математическая формулировка моделей ЛП направлена главным образом на определение оптимального значения целевой функции, которое должно достигаться в экстремальной точке области допустимых решений. Если же стремиться и к увеличению видов производственной деятельности, но не за счет ухудшения значения целевой функции, то может оказаться необходимым построение совершенно другой, возможно, вообще нелинейной модели.

В некоторых приложениях ЛП, связанных с реальными ситуа-

циями, значения переменных должны быть целочисленными. В общем случае симплекс-метод не позволяет получить (оптимальное) целочисленное решение. Некоторое целочисленное решение получается при округлении оптимальных переменных, имеющих дробное значение. Однако такое округленное решение с позиций целочисленного линейного программирования (ЦЛП) не обязательно будет оптимальным. (Точные методы получения оптимальных целочисленных решений задач ЛП рассматриваются в гл. II-2.)

К классу задач ЛП, решение которых с помощью СМ всегда является целочисленным, принадлежит транспортная модель (разд. 2). Этой модели присуще так называемое свойство *абсолютной унимодулярности*. Модель обладает таким свойством, если определитель, ассоциированный с *каждым* базисом, равен ± 1. Так как $\mathbf{B}^{-1} = adj\,\mathbf{B}/\det \mathbf{B}$, то $\mathbf{B}^{-1}$ и, следовательно, $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ имеют целочисленные значения при условии целочисленности $\mathbf{b}$ и коэффициентов матрицы ограничений $\mathbf{A}$.

Доказано [41], что транспортная модель обладает свойством абсолютной унимодулярности. К сожалению, трудно доказать наличие этого свойства в случае более общих моделей ЛП.

4. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Задача ЛП в общем случае может быть записана в виде

$$\text{максимизировать или минимизировать } x_0 = \mathbf{c_I x_I} + \mathbf{c_{II} x_{II}}$$

при ограничениях

$$\mathbf{A x_I} + \mathbf{I x_{II}} = \mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathbf{x_I},\ \mathbf{x_{II}} \geqslant \mathbf{0}.$$

Данная форма представления задачи предусматривает такое разделение (и, если необходимо, перераспределение) переменных на $\mathbf{x_I}$ и $\mathbf{x_{II}}$, при котором коэффициенты, стоящие при переменных в ограничениях, связанных с $\mathbf{x_{II}}$, образуют единичную матрицу $\mathbf{I}$. Аналогично коэффициенты при переменных в целевой функции группируются так, чтобы вектор-строка $\mathbf{c_{II}}$ соответствовал коэффициентам при переменных $\mathbf{x_{II}}$.

Если все исходные ограничения имеют вид ($\leqslant$), вышеприведенная формулировка задачи получается автоматически. В этом случае $\mathbf{x_{II}}$ состоит из всех остаточных переменных, а $\mathbf{c_{II}} = \mathbf{0}$. Если некоторые (или все) ограничения имеют вид ($\geqslant$) и/или ($=$), то указанная структура модели получается путем введения *искусственных переменных*. Искусственная переменная добавляется в левую часть ограничений только тогда, когда необходимо дополнить единичную матрицу $\mathbf{I}$. Однако, так как этих переменных в исходной задаче нет, следует добиться того, чтобы в оптимальном решении (если существует д. б. р.) все они равнялись нулю.

Один из приемов, обеспечивающих достижение этого условия, состоит в том, чтобы присвоить коэффициентам искусственных переменных в целевой функции очень большие значения, что можно трактовать как введение «большого штрафа». Таким образом, элементы $\mathbf{c}_{II}$ будут равны нулю для остаточных переменных и иметь очень большие («штрафные») значения для искусственных переменных.

Рассматриваемая форма модели ЛП обеспечивает автоматическое получение начального д. б. р., а именно $\mathbf{x}_{II} = \mathbf{b}$ (если принято, что $\mathbf{b} \geqslant 0$). Идея СМ состоит в том, чтобы, исходя из текущего д. б. р., найти новое д. б. р., исключая для этого некоторый вектор из пробного базиса и заменяя его одним из небазисных векторов. Условие такой замены состоит в том, чтобы вектор, включаемый в новый базис, по крайней мере не ухудшал значения целевой функции, а удаление вектора обеспечивало получение нового д. б. р. Это приводит к формулировке следующих условий *оптимальности* и *допустимости*.

Пусть $\mathbf{x}_B$ и $\mathbf{x}_N$ — текущие базисные и небазисные переменные и столбцы $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ сформированы так, что $\mathbf{B}$ является базисом, ассоциированным с $\mathbf{x}_B$, а $\mathbf{N}$ — матрица, ассоциированная с $\mathbf{x}_N$. Пусть, кроме того, $\mathbf{c}_B$ и $\mathbf{c}_N$ — элементы $(\mathbf{c}_I, \mathbf{c}_{II})$, ассоциированные с $\mathbf{x}_B$ и $\mathbf{x}_N$. Тогда решение задачи записывается в виде

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N,$$

$$x_0 = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - (\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N)\,\mathbf{x}_N.$$

Так как для текущей итерации $\mathbf{x}_N = 0$, то для пробного решения $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geqslant 0$ и $x_0 = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

Предположим, что $\mathbf{P}_j$ — небазисный вектор, который должен стать базисным на следующей итерации. Тогда вышеприведенные соотношения показывают, что $x_j > 0$ улучшает значение x_0 относительно текущего значения $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, если

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j \begin{cases} < 0 & \text{при максимизации,} \\ > 0 & \text{при минимизации,} \end{cases}$$

где c_j — коэффициент при x_j в $\mathbf{c}_N$. Таким образом, *условие оптимальности* для задачи максимизации (минимизации) требует, чтобы в качестве включаемого вектора $\mathbf{P}_j$ из всех небазисных векторов, содержащихся в $\mathbf{N}$, выбирался такой, для которого разность $z_j - c_j$ имеет наибольшую отрицательную (положительную) величину. Если такого вектора с отрицательной (положительной) величиной $z_j - c_j$ нет, то текущий базис является оптимальным.

Условие *допустимости* при этом определяет такое правило выбора вектора, исключаемого из $\mathbf{B}$, в соответствии с которым при введении в базис переменной x_j новое базисное решение остается допустимым. Исходя из ограничений и условий неотрицательно-

сти, при исключении вектора $\mathbf{P}_r$ должно выполняться соотношение

$$\frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_r}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r} = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i} \,\middle|\, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i > 0 \right\},$$

где $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i$ — i-й элемент вектора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Если все $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i \leqslant 0$, то выбор $\mathbf{P}_j$ в соответствии с условием оптимальности не может привести к д. б. р. и алгоритм заканчивает работу, что свидетельствует о неограниченности оптимального решения.

Такие же условия оптимальности и допустимости можно получить с помощью классических методов оптимизации, а именно методом Лагранжа и методом Якоби [68]. Так как эти методы оперируют с ограничениями в виде равенств, то все исходные ограничения необходимо привести к равенствам, добавляя соответствующие остаточные или избыточные переменные. Неотрицательность ограничений достигается использованием подстановки

$$x_j = w_j^2, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

где переменная w_j не имеет ограничения в знаке. Подобная подстановка производится для остаточных и избыточных переменных. Таким образом, независимо от знака w_j переменная x_j всегда положительна. Интересно то обстоятельство, что использование классических методов оптимизации приводит точно к таким же условиям оптимальности и допустимости, как и СМ.

Встречаются особые ситуации, когда изменение базиса в симплекс-таблице (см. ниже) может осуществляться с учетом некоторых дополнительных условий задачи, представленных главным образом в виде нелинейных соотношений. Типичные примеры таких ситуаций характерны для КП и сепарабельного программирования (разд. 2). В обоих случаях задача, подлежащая решению, после соответствующих преобразований содержит обычно только линейные соотношения, за исключением условий вида $xy = 0$, означающих, что если $x > 0$, то $y = 0$, и наоборот. В рамках СМ изменение базиса при таких условиях можно осуществить, допуская некоторое отступление от требований, вытекающих из условия оптимальности. Пусть $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{P}_y$ — векторы, ассоциированные с x и y в линейных уравнениях. Положим, что $\mathbf{P}_y$ уже входит в базис, и допустим, что в соответствии с условием оптимальности требуется включить в базис вектор $\mathbf{P}_x$. При $y > 0$ вектор $\mathbf{P}_x$ нельзя ввести в решение, если ассоциированная с ним переменная x равна нулю или если $\mathbf{P}_y$ является исключаемым вектором. В противном случае вместо $\mathbf{P}_x$ в качестве вводимого вектора в соответствии с условием оптимальности выбирается наилучший из оставшихся небазисных векторов. Такой способ изменения базиса называют иногда *правилом ограниченного ввода в базис*.

Можно убедиться в том, что для любой задачи ЛП исходная симплекс-таблица в матричном представлении соответствует табл. 1, а типичная таблица, получаемая в результате замены исходного базиса лучшим базисом (с использованием метода Гаусса — Жордана), соответствует табл. 2. Заметим, что строка

Таблица 1

Базисный вектор	x_I	x_{II}	Решение
x_0	$c_{II}A - c_I$	0	$c_{II}b$
x_{II}	A	I	b

Таблица 2

Базисный вектор	x_I	x_{II}	Решение
x_0	$c_B B^{-1}A - c_I$	$c_B B^{-1} - c_{II}$	$c_B B^{-1}b$
x_B	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

x_0 определяет величину $z_j - c_j$, и, следовательно, условие оптимальности проверяется просмотром строки x_0. Кроме того, путем вычисления отношений элементов правых частей ограничений $B^{-1}b$ к соответствующим *положительным* элементам $B^{-1}P_j$ для включаемого вектора реализуется условие допустимости.

Число симплекс-итераций при решении задач ЛП зависит в основном от числа ограничений, а не от количества переменных. В грубом приближении число необходимых итераций лежит в пределах от $1{,}5m$ до $2m$, где m — количество ограничений-уравнений в начальной симплекс-таблице.

Хотя из теории СМ следует, что оптимальное решение задач ЛП всегда соответствует некоторому д. б. р., в двух случаях наблюдается отклонение от этого правила. Во-первых, если линия постоянных значений целевой функции при оптимальном решении оказывается параллельной линии одного из уравнений-ограничений (неизбыточных), то существуют *альтернативные оптимальные решения*, дающие одинаковые значения целевой функции. При реализации СМ эта ситуация находит отражение в том, что все $z_j - c_j$ для всех небазисных x_j удовлетворяют условно оптимальности и по крайней мере одна разность $z_j - c_j = 0$ для всех небазисных переменных. Если вектор, ассоциированный с $z_j - c_j = 0$, можно включить в базис, то существует альтернативное базисное оптимальное решение. В этом случае выпуклая комби-

нация альтернативных оптимальных базисных решений всегда дает альтернативное небазисное оптимальное решение. С другой стороны, если вектор, ассоциированный с $z_j - c_j = 0$, нельзя включить в базис, то все альтернативные оптимальные решения обязательно являются небазисными.

Для второго случая характерна ситуация, при которой условие оптимальности показывает, что небазисный вектор, будучи включенным в базис, может улучшить решение, однако такой вектор нельзя сделать базисным. Это означает, что если $z_j - c_j < 0$ (максимизация) и $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j \leqslant \mathbf{0}$, то введение $\mathbf{P}_j$ в базис не может дать д. б. р. Действительно, переменную x_j, ассоциированную с $\mathbf{P}_j$, можно увеличивать неограниченно, не влияя на допустимость решения задачи. Это означает, что новое значение целевой функции можно увеличить на сколь угодно большую величину, а именно на $-(z_j - c_j)\, x_j$. В таком случае решение называется *неограниченным*.

Хотя теоретическая основа СМ гарантирует сходимость к оптимальному решению за конечное число шагов, трудности вычислительного характера, возникающие вследствие ошибок округления в процессе машинных расчетов, в этом методе не учитываются. Такие затруднения встречаются прежде всего тогда, когда искусственные переменные являются частью начального базисного решения. Использование «больших штрафов» в целевой функции может привести к ошибке округления, обусловленной операциями над группой чисел, включающей очень большие и относительно малые числа. Указанная опасность снижается при разбиении процесса решения задачи на две фазы.

В фазе I решаемая задача имеет вид

$$\text{минимизировать } r_0 = \sum_j x_{R_j}$$

при ограничениях

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathrm{I}} + \mathbf{I}\mathbf{x}_{\mathrm{II}} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{\mathrm{I}},\ \mathbf{x}_{\mathrm{II}} \geqslant 0,$$

где x_{R_j} — искусственные переменные, включенные в $\mathbf{x}_{\mathrm{II}}$. Новая целевая функция может рассматриваться в качестве «меры недопустимости» решения задачи. Таким образом, при $\min r_0 = 0$ задача имеет д. б. р. и решение, ассоциированное с $\min r_0 = 0$, используется в качестве начального базиса исходной задачи. С этого базиса начинается фаза II процесса решения задачи. С другой стороны, условие $\min r_0 > 0$ означает, что некоторые из искусственных переменных положительны, и, следовательно, в этом случае допустимого решения задачи не существует и отпадает необходимость выполнения фазы II.

Двухфазовый метод используется в задачах, требующих операций над очень большими числами, входящими в целевую функцию.

Однако применение метода исключения переменных Гаусса — Жордана для получения последовательного ряда симплекс-таблиц приводит к накоплению и распространению ошибок округления в такой степени, что они искажают исходные данные задачи. Рассмотрим пример, в котором ошибки округления связаны с определением условия допустимости решения. Положим, что $(\mathbf{x}_B)_i = 0$ — точное значение i-й базисной переменной и $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i = 0$ — соответствующий i-й коэффициент ограничения, ассоциированный с вводимым вектором $\mathbf{P}_j$. Тогда вектор, ассоциированный с $(\mathbf{x}_B)_i$, включить в базис нельзя. Предположим теперь, что вследствие ошибки округления $(\mathbf{x}_B)_i = 10^{-9}$ и $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i = 10^{-6}$. При этом вектор $\mathbf{P}_j$ можно выбрать для включения в базис.

С целью уменьшения влияния ошибок округления был разработан *модифицированный симплекс-метод* (МСМ) [12]. Основные шаги алгоритма МСМ, по существу, такие же, как и в алгоритме СМ. Главное отличие состоит в том, что для получения последовательности симплекс-таблиц в МСМ не используется метод исключения переменных Гаусса — Жордана. Как видно из табл. 2, вся симплекс-таблица может быть сформирована путем использования *исходных данных* и обращения текущего базиса $\mathbf{B}^{-1}$. Таким образом, в вычислительных процедурах МСМ основное внимание сосредоточено на минимизации ошибок округления при вычислении матрицы $\mathbf{B}^{-1}$.

Помимо контроля за ошибкой округления, МСМ позволяет также уменьшить время расчетов. В частности, если в матрице ограничений $\mathbf{A}$ относительное количество нулевых элементов велико, то МСМ можно воспользоваться для уменьшения количества операций умножения (ср. обычный СМ, в котором элементы таблицы, особенно нулевые, в процессе последовательных операций постоянно изменяются). В общем известно, что требуемый для реализации МСМ объем вычислений тем меньше, чем меньше плотность матрицы $\mathbf{A}$ (отношение числа ненулевых элементов к общему числу элементов) и отношение числа ограничений к числу переменных [17].

Представляется, что СМ (и его разновидности) после трех десятилетий всесторонней апробации и проверки останется преобладающим методом решения задач ЛП. Недавно был предложен новый подход, основанный на формировании оптимального базиса путем одновременного введения базисных векторов [64, 65]. Однако довольно быстро выяснилось (с помощью контрпримеров), что этот метод, характеризовавшийся как потенциально более эффективный по сравнению с СМ, не является работоспособным в случае общей задачи ЛП [35, 76].

4.1. Геометрическая интерпретация симплекс-метода

Геометрическую интерпретацию симплекс-метода можно дать двумя различными способами [9]. В первом случае иллюстрируется изменение базиса, происходящее за счет выбора включаемых и исключаемых векторов. Во втором случае геометрическая интерпретация состоит в том, чтобы показать, каким образом последовательные итерации связаны с переходом от одной экстремальной точки к другой, *смежной* с предыдущей, и как эти переходы последовательно улучшают значение целевой функции [1]). Когда дальнейшее улучшение становится невозможным, целевая функция достигает оптимального значения.

Если использовать матричное представление, данное в табл. 2, то текущее базисное решение $\mathbf{x}_B$ и соответствующее ему значение целевой функции могут быть связаны следующим соотношением:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_B \end{pmatrix} \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная запись в векторной форме имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} (\mathbf{x}_B)_i \mathbf{P}_i^* = \mathbf{b}^*,$$

где $(\mathbf{x}_B)_i$ — i-й элемент $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{P}_i^*$ — i-й вектор $\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_B \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ x_0 \end{pmatrix}$. Из определения следует, что $\mathbf{b}^*$ представляет собой *неотрицательную* линейную комбинацию $\mathbf{P}_i^*$.

Аналогично для небазисного вектора $\mathbf{P}_j$ имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_j \\ z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_B \end{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i \mathbf{P}_i^*,$$

откуда следует, что вектор $(\mathbf{P}_j, z_j)$ есть *линейная* комбинация (не обязательно неотрицательная) векторов $\mathbf{P}_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Положим, что задача ЛП имеет следующую формулировку:

$$\text{максимизировать } x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

при ограничениях

$$x_1\mathbf{P}_1 + x_2\mathbf{P}_2 + x_3\mathbf{P}_3 + x_4\mathbf{P}_4 = \mathbf{b}, \quad x_j \geqslant 0, \; j = 1, 2, 3, 4.$$

Предположим, кроме того, что $\mathbf{P}_j = (a_{1j}, a_{2j})^t$, $j = 1, 2, 3, 4$. Представление векторов $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ и $\mathbf{P}_4$ в пространстве (a_{1j}, a_{2j}) показано на рис. 1. Базис $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)$ определяет допустимое решение, так как $\mathbf{b}$ можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_4$. На рис. 1 показаны также векторы

[1]) Первый случай соответствует интерпретации метода в пространстве условий, а второй — в пространстве решений.— *Прим. перев.*

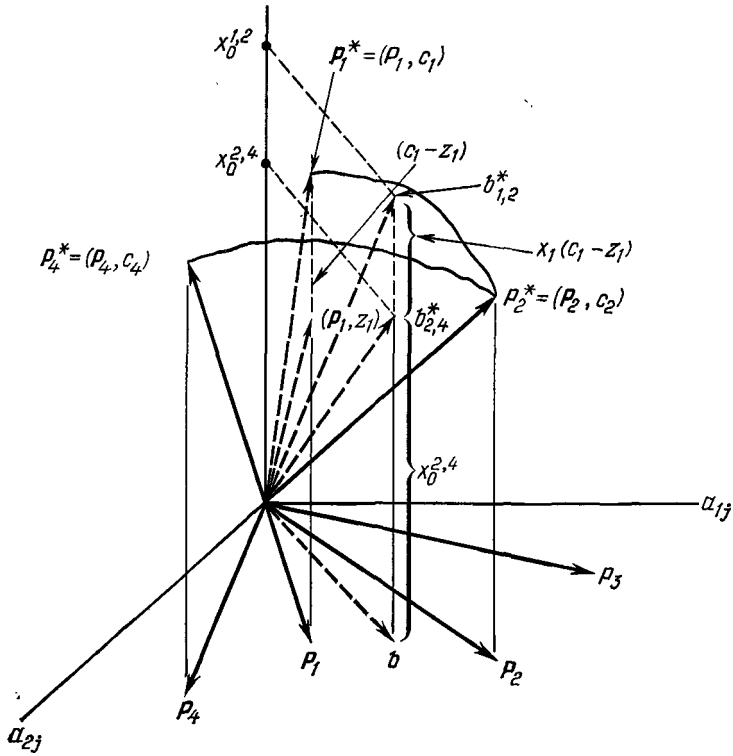


Рис. 1.

$\mathbf{P}_2^* = (\mathbf{P}_2, c_2)$ и $\mathbf{P}_4^* = (\mathbf{P}_4, c_4)$. Следовательно, вектор $\mathbf{b}_{2,4}^* = (\mathbf{b}, x_0^{(2,4)})$, по определению, должен находиться внутри конуса, образованного векторами $\mathbf{P}_2^*$ и $\mathbf{P}_4^*$.

Предположим теперь, что $\mathbf{P}_1$ — вводимый вектор, тогда условие допустимости решения будет выполняться, если из базиса будет исключен вектор $\mathbf{P}_4$. (Если из базиса исключается $\mathbf{P}_2$, то $\mathbf{b}$ можно выразить через $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_4$ только в том случае, если x_4 имеет отрицательное значение, что недопустимо.) Векторы $\mathbf{P}_1^* = (\mathbf{P}_1, c_1)$ и $\mathbf{P}_2^*$ образуют конус, в котором расположен вектор $\mathbf{b}_{(1,2)}^* = (\mathbf{b}, x_0^{(1,2)})$. Это означает, что вектор $\mathbf{b}_{(1,2)}^* - \mathbf{b}_{(2,4)}^* = (0, 0, x_0^{(1,2)} - x_0^{(2,4)})$ характеризует изменение величины x_0 в результате включения в базис вектора $\mathbf{P}_1$ и исключения из него вектора $\mathbf{P}_4$. Кроме того, вектор $(\mathbf{P}_1, z_1)$ расположен внутри конуса $(\mathbf{P}_2^*, \mathbf{P}_4^*)$, тогда как ясно, что вектор $\mathbf{P}_1^* = (\mathbf{P}_1, c_1)$ расположен внутри конуса $(\mathbf{P}_1^*, \mathbf{P}_2^*)$. Таким образом, $(\mathbf{P}_1, c_1) - (\mathbf{P}_1, z_1) = (0, 0, c_1 - z_1)$.

Так как $c_1 > z_1$ или $z_1 - c_1 < 0$ [т. е. точка $(\mathbf{P}_1, c_1)$ находится над конусом $(\mathbf{P}_2^*, \mathbf{P}_4^*)$], то, как следует из рис. 1, введение $\mathbf{P}_1$ в базис должно улучшить значение целевой функции на $x_1(c_1 - z_1)$,

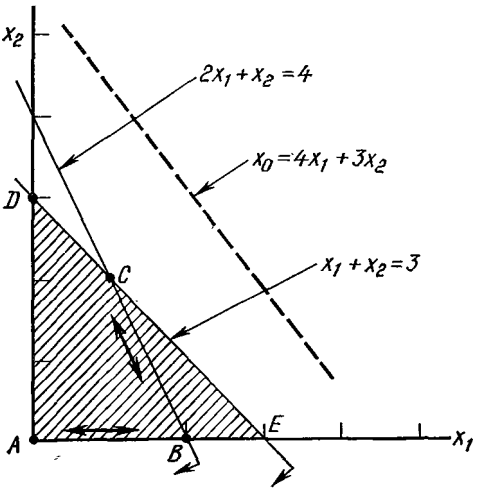


Рис. 2.

где x_1 — уровень «производственной деятельности» первого вида в новом решении. Если $z_1 - c_1 \geqslant 0$, то включение в базис вектора $\mathbf{P}_1$ не может улучшить решение.

Таким образом, экономическая интерпретация величины $z_j - c_j$ непосредственно следует из геометрического представления. Если c_j характеризует удельный доход от j-го вида «производства», то z_j, как правило, представляет собой соответствующую величину теневых удельных затрат. Следовательно, осуществление j-го вида «производства» выгодно только тогда, когда удельное значение дохода от этого производства превышает соответствующие удельные затраты.

Второй способ геометрической интерпретации СМ иллюстрируется следующим численным примером:

$$\text{максимизировать } x_0 = 4x_1 + 3x_2$$

при ограничениях

$$2x_1 + x_2 \leqslant 4, \; x_1 + x_2 \leqslant 3, \; x_1, \; x_2 \geqslant 0.$$

На рис. 2 показано пространство допустимых решений задачи. Точки A, B, C и D соответствуют его допустимым экстремальным точкам. (Точка E характеризует недопустимое экстремальное решение.)

В данном примере начальной точкой при реализации СМ будет точка A; затем осуществляется переход к точке B, и наконец находится оптимальное решение, соответствующее точке C. Точки A и B (а также B и C, A и D, C и D) называются *смежными* экстремальными точками. При использовании СМ всегда проис-

ходит переход от одной экстремальной точки к *смежной* с ней экстремальной точке, при котором значение целевой функции в новой точке по крайней мере не хуже, чем в предыдущей. Другими словами, при реализации СМ невозможно сразу перейти из точки A в точку C. Фактически при решении задачи с помощью СМ последовательность решений получают, двигаясь вдоль *границ* (ребер) пространства решений, причем эти ребра определяются как линии, соединяющие две *смежные* экстремальные точки.

4.2. Вырожденность и зацикливание

Если при сохранении условия допустимости можно выбрать для исключения из базиса более чем один вектор, то следующая итерация симплекс-метода приведет к вырожденному решению, в котором по крайней мере одна из базисных переменных равна нулю. Это показывает, что последующие итерации могут не привести к улучшению значения целевой функции. В результате оказывается возможным бесконечное повторение одной и той же последовательности итераций, не улучшающих решения, и, следовательно, вычислительная процедура не будет иметь окончания. Такая ситуация называется *зацикливанием*.

Чтобы обеспечить *единственность* выбора выводимого вектора, исходя из условия допустимости, был разработан ряд специальных приемов [4, 11, 20, 72], наиболее интересным из которых представляется следующий [4].

Рассмотрим формулировку задачи ЛП в матричном представлении, как это было сделано в разд. 3 данной главы. Пусть $\mathbf{P}_j$ соответствует j-му столбцу $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$, и положим ε (>0) достаточно малым. Определим величину $\mathbf{b}_\varepsilon$ следующим образом:

$$\mathbf{b}_\varepsilon = \mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{P}_1 + \varepsilon^2\mathbf{P}_2 + \cdots + \varepsilon^n\mathbf{P}_n.$$

Из табл. 2 следует, что если $\mathbf{b}_\varepsilon$ представляет собой вектор правой части ограничений и $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_m)$ — текущий базис, то значение i-й базисной переменной равно

$$(\mathbf{X}_{B_\varepsilon})_i = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i.$$

Это выражение показывает, что, выбирая ε (>0) достаточно малым и формируя вектор $\mathbf{b}_\varepsilon$, можно однозначно идентифицировать переменную, подлежащую исключению из базиса. В практических расчетах нет необходимости определять $\mathbf{b}_\varepsilon$, так как рассматриваемый способ можно реализовать, выбирая в качестве исключаемой ту переменную, которая *лексикографически* соответствует наименьшей строке таблицы [20].

Все примеры зацикливания составлены чисто искусственными математическими способами [1, 42]. Хотя рассмотренная

выше вычислительная процедура гарантирует предупреждение зацикливания, введение ее в программу расчетов сопряжено со значительным объемом дополнительных машинных операций. Поэтому в практических ситуациях использовать ее оказывается нецелесообразным.

4.3. Переменные с явными ограничениями

Многие задачи ЛП содержат ограничения вида

$$0 \leqslant \ell_j \leqslant x_j \leqslant u_j < \infty,$$

где x_j — j-я переменная модели, а ℓ_j и u_j — заданные константы. Если эти ограничения учитываются в явном виде, то размерность задачи, особенно число ограничений, резко увеличивается. Однако с помощью несложного видоизменения структуры модели ЛП или правил, предписанных СМ, можно учесть эти ограничения косвенным образом. При этом для реализации расчетов важно то, что в явном виде будут использоваться лишь основные ограничения вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Нижний предел ограничения, $0 < \ell_j \leqslant x_j$, может контролироваться с помощью подстановки $x_j = \ell_j + x'_j$, где $x'_j \geqslant 0$. В этом случае верхним пределом ограничения $x_j \leqslant u_j$ будет $x'_j \leqslant u_j - \ell_j$.

При ограничении сверху вида $x_j \leqslant u_j < \infty$ подстановка $x_j = u_j - x''_j$, $x''_j \geqslant 0$ не корректна, так как при этом не гарантируется допустимое значение переменной x_j. Разработаны специальные приемы, позволяющие при реализации СМ учитывать ограничения $x_j \leqslant u_j$ в *неявном* виде [14]. Их идея состоит в таком видоизменении условия допустимости, чтобы переменная исключалась из решения и в том случае, когда ее значение выйдет за верхний предел ограничения. Важный результат такой процедуры заключается в том, что теперь некоторая переменная может стать небазисной как в случае ее нулевого значения, так и при значении, определяемом верхним пределом ограничения.

При использовании обозначений, принятых при описании СМ, ограничения сверху в рассматриваемой ситуации будут отражены следующим образом. Предположим, что $\mathbf{P}_j$ — вводимый вектор, соответствующий условию оптимальности СМ, и $(\mathbf{x}_B)_i$ — текущее значение i-й базисной переменной. Тогда

$$(\mathbf{x}_B)_i = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - x_j (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Из условий $0 \leqslant (\mathbf{x}_B)_i \leqslant u_i$ и $0 \leqslant x_j \leqslant u_j$ следует, что наибольшее значение, достигаемое x_j, определяется соотношением

$$\theta = \min\{\theta_1, \theta_2, u_j\}, \quad \text{где}$$

$$\theta_1 = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i} \,\middle|\, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i > 0 \right\},$$

$$\theta_2 = \min_i \left\{ \frac{u_i - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i} \,\middle|\, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i < 0 \right\}.$$

Если $\theta = 0_1$, то $(\mathbf{x}_B)_i$ становится небазисной при нулевом значении, а x_j вводится в базис. Если $\theta = 0_2$, то x_j становится базисной переменной, а $(\mathbf{x}_B)_i$ исключается из базиса при значении, соответствующем верхнему пределу ограничения. Наконец, если $\theta = u_j$, то x_j остается небазисной переменной, но имеет значение, соответствующее верхнему пределу.

Интересно отметить, что для повышения эффективности вычислительных процедур все небазисные переменные приводятся к нулевой величине путем преобразования условий задачи к новому виду с помощью подстановки $x_k = u_k - x'_k$, $0 \leqslant x'_k \leqslant u_k$, для всех x_k, являющихся небазисными и значения которых соответствуют верхнему пределу.

В более общем случае верхней границей может быть *обобщенная граница* [19], когда условия задачи содержат специальные ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

Ограничения этого типа встречаются в приложениях, связанных с календарным планированием многономенклатурного производства [51], и в алгоритмах декомпозиции задач ЛП [21]. В соответствующих вычислительных процедурах обобщенная верхняя граница учитывается в неявном виде [19], что приводит к сокращению времени расчетов и требуемого объема памяти ЭВМ.

Задачи кусочно-линейного программирования связаны с ограничениями переменных [2]; они формулируются следующим образом:

$$\text{максимизировать } \{\mathbf{cx} \mid \mathbf{a} \leqslant \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}\},$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы-столбцы. Это означает, что каждое ограничение имеет нижний и верхний пределы. Основное допущение, которое при этом делается, состоит в том, что матрица $\mathbf{A}$ имеет ненулевой ранг r-го порядка (где r — число строк в исходной системе ограничений) и $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$, поэтому существует ограниченное допустимое решение. Допущение о том, что матрица $\mathbf{A}$ имеет ненулевой ранг r-го порядка, обеспечивает существование обобщенной обратной матрицы.

В некоторых случаях решения задачи можно получить в явном виде, заменяя переменные $\mathbf{x}$ такими новыми переменными $\mathbf{z}$, что $\mathbf{z} = \mathbf{Ax}$ и поэтому $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{z} \leqslant \mathbf{b}$ [78]. В частности если $\mathbf{A}$ — невырожденная матрица, то существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, и задача может быть приведена к следующему виду:

$$\text{максимизировать } \{\mathbf{cA}^{-1}\mathbf{z} \mid \mathbf{a} \leqslant \mathbf{z} \leqslant \mathbf{b}\},$$

причем ясно, что оптимальным решением этой задачи будет $z_i = a_i$, если $(\mathbf{cA}^{-1})_i < 0$, $z_i = b_i$, если $(\mathbf{cA}^{-1})_i > 0$, и $a_i \leqslant z_i \leqslant b_i$, если $(\mathbf{cA}^{-1})_i = 0$. В рассматриваемом случае $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}$.

Хотя любую задачу ЛП путем элементарных преобразований можно свести к задаче кусочно-линейного программирования, получение обобщенной обратной матрицы в том случае, когда матрица **A** не является невырожденной, может быть сопряжено с большими трудностями вычислительного характера. Поэтому, за исключением случаев с невырожденной матрицей **A**, методы кусочно-линейного программирования нельзя рассматривать в качестве многообещающей альтернативы СМ. Однако очевидно и то, что существует ряд практически важных прикладных задач, как, например, составление смет капиталовложений, производственные задачи планирования и оперативного управления и статическая модель Леонтьева «затраты — выпуск», в которых матрица **A** является невырожденной [3].

5. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Важные аспекты построения и анализа моделей нелинейного программирования (НЛП) вообще и ЛП в частности связаны с понятием двойственной задачи. Основной подход к определению понятия двойственности базируется на введении функции Лагранжа и анализе соотношений для отыскания ее седловой точки.

Функция Лагранжа экстремальной задачи НЛП, имеющей вид

$$\text{максимизировать } x_0 = f(\mathbf{x})$$

при ограничениях

$$g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, определяется как

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}),$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \geqslant 0$. Точка $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ соответствует (глобальной) седловой точке $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, если
$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) \leqslant L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leqslant L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda})$ при всех $\mathbf{x} \in E^n$ и $\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0$.

Пусть $\overline{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \max\limits_{\mathbf{x} \in E^n} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ и $\underline{L}(\mathbf{x}) = \min\limits_{\boldsymbol{\lambda} > 0} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$. Тогда задача

$$\max_{\mathbf{x} \in E^n} \underline{L}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in E^n} \min_{\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

соответствует исходной задаче НЛП, так как

$$\min_{\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{если } g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0 \text{ при всех } i, \\ -\infty, & \text{если по крайней мере одна } g_i(\mathbf{x}) > 0. \end{cases}$$

Задача отыскания $\max\limits_{\mathbf{x} \in E^n} \underline{L}(\mathbf{x})$ считается *прямой* (исходной), при

этом задача отыскания $\min\limits_{\lambda \geqslant 0} \overline{L}(\lambda)$ называется *двойственной* (по отношению к прямой).

Связь между прямой и двойственной задачами определяется следующей теоремой:

Теорема 3:

1) $\underline{L}(x) \leqslant \overline{L}(\lambda)$, $x \in E^n$ и $\lambda \geqslant 0$.

2) Если $\underline{L}(x^*) = \max\limits_{x \in E^n} \underline{L}(x)$, $\overline{L}(\lambda^*) = \min\limits_{\lambda \geqslant 0} \overline{L}(\lambda)$

и $\underline{L}(x^*) = \overline{L}(\lambda^*)$, то (x^*, λ^*) является седловой точкой функции $L(x, \lambda)$. Справедливо и обратное утверждение.

Из теоремы 3 следует, что значение целевой функции прямой задачи устанавливает нижнюю границу целевой функции двойственной задачи при условии, что обе задачи имеют ограниченное решение. Если значения целевых функций прямой и двойственной задач равны между собой, соответствующие решения для обеих задач являются оптимальными. В общем виде это положение формулируется следующим образом: для того чтобы x^* и λ^* соответствовали оптимальным решениям прямой и двойственной задач, необходимо и достаточно, чтобы (x^*, λ^*) была седловой точкой функции $L(x, \lambda)$.

Распространение вышеприведенного общего определения функции $L(x, \lambda)$ на модели ЛП осуществляется следующим образом. Сформулируем прямую задачу в виде

$$\text{максимизировать } x_0 = cx$$

при ограничениях

$$Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0.$$

Функция Лагранжа для этой задачи равна

$$L(x, \lambda) = cx - \lambda(Ax - b).$$

Как показано ниже, условие $x \geqslant 0$ учитывается в неявном виде.

Двойственная задача определяется как

$$\min_{\lambda \geqslant 0} \overline{L}(\lambda) = \min_{\lambda \geqslant 0} \lambda b + \begin{cases} 0, & \text{если } (c - \lambda A) \leqslant 0, \\ \infty, & \text{если } (c - \lambda A) > 0. \end{cases}$$

В более явном виде это можно записать следующим образом:

$$\text{минимизировать } \lambda_0 = \lambda b$$

при ограничениях

$$\lambda A \geqslant c, \ \lambda \geqslant 0.$$

Интересно отметить, что если $\mathbf{x} \in E^n$, т. е. вектор $\mathbf{x}$ не имеет ограничения в знаке, то двойственная задача состоит в нахождении

$$\min_{\lambda \geqslant 0} \bar{L}(\lambda) = \min_{\lambda \geqslant 0} \lambda \mathbf{b} + \begin{cases} 0, & \text{если } (\mathbf{c} - \lambda \mathbf{A}) = 0, \\ \infty, & \text{если } (\mathbf{c} - \lambda \mathbf{A}) \neq 0, \end{cases}$$

откуда следует, что ограничение двойственной задачи $\lambda \mathbf{A} \geqslant \mathbf{c}$ при $\mathbf{x} \geqslant 0$ заменяется на $\lambda \mathbf{A} = \mathbf{c}$, если вектор $\mathbf{x}$ не имеет ограничения в знаке. Аналогично можно показать, что если ограничение прямой задачи имеет вид $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, переменные λ двойственной задачи не должны иметь ограничения в знаке.

Использование определения седловой точки функции Лагранжа применительно к задачам ЛП показывает, что если $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ является седловой точкой, то $\mathbf{x}^*$ и λ^* представляют собой соответственно решения прямой и двойственной задач. Более того, $\mathbf{cx}^* = \lambda^* \mathbf{b}$. Обратное утверждение справедливо в том смысле, что если $\mathbf{x}^*$ и λ^* представляют собой допустимые решения прямой и двойственной задач и $\mathbf{cx}^* = \lambda^* \mathbf{b}$, то $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ является седловой точкой.

Сущность концепции двойственности и ее потенциальные возможности в области ЛП первым фактически понял Нейман, когда впервые ознакомился с симплекс-методом, разработанным Данцигом [17, стр. 31]. Действительно, каждой игре двух лиц с нулевой суммой может быть поставлена в соответствие пара сопряженных задач ЛП. И наоборот, каждая задача ЛП может быть представлена как соответствующая задача теории игр. Понятие седловой точки в теории игр непосредственно связано с представлениями, ассоциированными с решениями прямой и двойственной задач [10, 69].

Если прямая задача не имеет конечного решения (т. е. ее решение неограниченное), то в силу теоремы 3 неравенство $\mathbf{cx} \leqslant \lambda \mathbf{b}$ означает, что

$$(\mathbf{cx} \to \infty) \Rightarrow (\lambda \mathbf{b} \to \infty).$$

Это может иметь место только при $\mathbf{c} - \lambda \mathbf{A} > 0$, т. е. если двойственная задача не имеет допустимого решения. Наоборот, если прямая задача не имеет допустимого решения, то у двойственной задачи либо нет допустимого решения, либо есть ограниченное решение. Во всех этих случаях функция Лагранжа не имеет седловой точки.

Идея двойственности в ЛП имеет очень важные практические приложения. Из теоретических положений ЛП следует, что решение одной из пары двойственных задач автоматически приводит к решению другой задачи. Так, если $\mathbf{B}$ — оптимальный базис одной из задач и $\mathbf{c}_B$ — вектор коэффициентов ее целевой функции,

то оптимальное решение двойственной задачи равно $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$. Используя это положение и решая двойственную задачу вместо прямой (исходной), можно добиться существенной экономии машинного времени. Например, если в двойственной задаче число ограничений меньше, чем в прямой, то эффективность вычислительного процесса при решении двойственной задачи будет выше.

Одной из первых практических разработок, базирующихся на теории двойственности, является *двойственный симплекс-метод* (ДСМ) [52]. При реализации обычного СМ процедура решения начинается с установления допустимого, но неоптимального решения; в процессе последующих итераций текущие решения задачи остаются допустимыми и улучшаются до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение. Это эквивалентно такой последовательности решения двойственной задачи, в которой начальное решение является недопустимым, но оптимальным («лучшим, чем оптимальное»); в процессе дальнейших итераций происходит приближение к допустимому решению при сохранении оптимального значения целевой функции. Указанное соотношение эквивалентности следует из того, что неоптимальность решения прямой задачи (максимизации) связана с условием

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{P}_j - c_j < 0,$$

по крайней мере для одной из небазисных переменных x_j. Это свидетельствует о том, что соответствующее решение двойственной задачи не является допустимым. В точке, где все значения $z_j - c_j$ удовлетворяют условию оптимальности, решение двойственной задачи автоматически становится допустимым. Это положение лежит в основе построения ДСМ.

Другое интересное приложение теории двойственности связано с разработкой алгоритмов решения обобщенной транспортной задачи, частным случаем которой является обычная транспортная задача. Для удобства изложения ниже опять приводится формулировка обобщенной транспортной задачи, рассмотренной в разд. 2.

$$\text{Минимизировать } x_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \leqslant a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad x_{ij} \geqslant 0.$$

Двойственная задача формулируется следующим образом:

$$\text{максимизировать } \lambda_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_i v_j$$

при ограничениях

$$p_{ij}u_i + v_j \geqslant c_{ij} \text{ при всех } i \text{ и } j,$$

$$u_i \geqslant 0 \text{ при всех } i,$$

v_j не имеет ограничений в знаке при всех j.

Из теории ЛП следует, что для базисной переменной прямой задачи x_{ij} должно выполняться условие $z_{ij} - c_{ij} = 0$. Для обобщенной транспортной задачи

$$z_{ij} = p_{ij}u_i + v_j.$$

Таким образом, для всех базисных переменных x_{ij} соответствующие ограничения двойственной задачи должны удовлетворяться в форме равенств, т. е.

$$p_{ij}u_i + v_j = c_{ij} \text{ для всех базисных } x_{ij}.$$

Так как имеется $m + n$ базисных переменных, существует и $m + n$ соответствующих уравнений, которые имеют единственное решение относительно переменных двойственной задачи u_i и v_j. Для всех небазисных x_{ij} при заданных значениях двойственных переменных можно сделать оценки

$$z_{ij} - c_{ij} = p_{ij}u_i + v_j - c_{ij}.$$

Если все $z_{ij} - c_{ij} \leqslant 0$, текущий базис является оптимальным; в противном случае для включения в базис выбирается небазисный вектор с наибольшим положительным значением $z_{ij} - c_{ij}$.

Важность рассмотренной выше процедуры определяется тем фактом, что для решения обобщенной транспортной задачи оказывается необязательным использование традиционных симплекс-таблиц. Действительно, базис можно изменить, представляя условия задачи в специальной табличной форме, которая позволяет осуществить более эффективный вычислительный процесс по сравнению с СМ. Хотя такой алгоритм имеет в основном те же шаги, что и алгоритм СМ, процедура выбора вводимого вектора на основе оценок $z_{ij} - c_{ij}$ непосредственно базируется на практическом применении теории двойственности.

Частный случай обобщенной транспортной задачи получается, если положить $p_{ij} = 1$ для всех i и j и заменить первые m ограничений строгими равенствами (что приводит к условию $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$). При этом $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, где u_j и v_j не имеют ограничения в знаке для всех i и j.

Хотя при обсуждении метода решения транспортной задачи мы опирались на теорию двойственности, точную процедуру решения можно изложить и с обычных позиций, используя так назы-

ваемый «метод ступенек» (Stepping-stone method) [5]. Этот метод на первый взгляд кажется совсем не связанным с вычислительными процедурами обычного СМ. Однако, привлекая понятие двойственности, можно убедиться, что в основе обоих методов лежат одни и те же шаги СМ.

Метод решения транспортных задач можно успешно распространить и на случай транспортной модели с ограниченными пропускными способностями, которая от рассмотренных ранее моделей отличается только наличием ограничений с верхним пределом вида $0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}$. Как и в методе решения задачи с переменными, имеющими ограничения сверху (разд. 4), эти ограничения рассматриваются в неявном виде. В этом случае $u_i + v_j \geqslant c_{ij}$ для всех небазисных переменных, имеющих нулевое значение, и $u_i + v_j \leqslant c_{ij}$ для всех небазисных переменных, равных верхнему пределу ограничения. Для всех базисных x_{ij} по-прежнему имеет место соотношение $u_i + v_j = c_{ij}$. Хотя применение данного метода предпочтительнее, чем непосредственное использование СМ, известно, что еще большей эффективностью обладает другой, так называемый прямо-двойственный метод [1]) (ПДМ). Основы построения прямо-двойственного алгоритма рассматриваются в следующем разделе.

5.1. Теория дополняющей нежесткости

Выше было показано, что пара оптимальных решений $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ является седловой точкой функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$. Другое конструктивное представление этого результата дает следующая теорема.

Теорема 4. (Теорема о дополняющей нежесткости [70].) Пусть $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ — допустимые решения прямой и двойственной задач. Чтобы $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ были соответствующими оптимальными решениями, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

Так как в соответствии с формулировками прямой и двойственной задач $\boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0}$ и $\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$, условие $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$ эквивалентно условию $\lambda_i \left(b_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j\right) = \lambda_i s_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$, где s_i — i-я остаточная переменная прямой задачи. Аналогичную интерпретацию можно дать и условию $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$.

Из теоремы о дополняющей нежесткости следует, что если в оптимальном решении $\lambda_i > 0$, то $s_i = 0$, а это означает, что i-й ресурс из условия прямой задачи использован полностью.

[1]) В отечественной литературе этот метод носит название *метод последовательного сокращения невязок.— Прим. перев.*

И наоборот, если $s_i > 0$, то $\lambda_i = 0$. На этом результате основана экономическая интерпретация двойственности моделей ЛП, данная в следующем разделе.

Понятие дополняющей нежесткости используется не только при экономической интерпретации результатов решения, но и лежит в основе построения прямо-двойственного алгоритма решения задачи ЛП [18]. Поводом для его разработки послужило то обстоятельство, что в ситуациях, когда для прямой задачи не имеется очевидного начального д. б. р., обычно приходится использовать двухфазовую процедуру (разд. 4). Однако фаза 1 вычислений предназначена прежде всего для получения начального допустимого базиса и не предусматривает его максимально возможного приближения к оптимальному решению исходной задачи. На устранение этого недостатка и направлен прямо-двойственный алгоритм.

Прямая и двойственная задачи формулируются следующим образом:

Прямая задача:	*Двойственная задача*:
максимизировать $x_0 = \mathbf{cx}$ при ограничениях	минимизировать $\lambda_0 = \mathbf{b}^t\boldsymbol{\lambda}$ при ограничениях
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,	$\mathbf{A}^t\boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{c}^t$
$\mathbf{x} \geqslant 0$.	без ограничений в знаке.

Пусть $\boldsymbol{\lambda}$ — допустимое решение двойственной задачи. Определим сопряженную вспомогательную прямую задачу:

$$\text{минимизировать } x_{R1} + x_{R2} + \ldots + x_{Rm}$$

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_R = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x},\ \mathbf{x}_R \geqslant 0,$$

где $\mathbf{x}_R$ — искусственные переменные (ср. с фазой I двухфазового метода, разд. 4). Однако компоненты $\mathbf{x}$ связаны условием, согласно которому $x_j = 0$ при $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{P}_j > \mathbf{c}_j$, где $\boldsymbol{\lambda}$ — д. б. р. двойственной задачи. Это означает, что $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{P}_j = c_j$ только для положительных элементов $\mathbf{x}$ вспомогательной прямой задачи.

В этом случае решение двойственной задачи $\boldsymbol{\lambda}$ и любое решение вспомогательной прямой задачи удовлетворяют условиям теоремы о дополняющей нежесткости. Вспомогательная прямая задача решается обычным способом, пока не будет получено ее оптимальное решение. Это оптимальное решение используется для нахождения соответствующего допустимого решения двойственной задачи. Исходя из нового решения двойственной задачи, вышеописанным способом определяется новая вспомогательная прямая задача, и процесс решения повторяется. В точке, где решение вспомогательной прямой задачи станет допустимым по усло-

виям исходной задачи (т. е. $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$), оно одновременно будет и оптимальным, и процесс решения заканчивается.

Рассмотренный ПДМ фактически представляет собой обобщение специального ПДМ, разработанного применительно к решению транспортной задачи [29]. Метод решения транспортной задачи очень тесно связан с разработанным ранее венгерским методом решения задачи о назначениях [49]. Однако экспериментальные расчеты показали, что ПДМ, обеспечивая высокую эффективность при решении транспортных задач, для обычных задач ЛП не имеет особых преимуществ по сравнению с МСМ [59].

5.2. Экономическая интерпретация двойственности

При оптимальном решении множители Лагранжа, т. е. переменные двойственной задачи λ_i, выражаются через параметры прямой задачи следующим образом:

$$\lambda_i = \frac{\partial x_0}{\partial b_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Это соотношение показывает, что i-я переменная двойственной задачи характеризует темп изменения целевой функции x_0 прямой задачи при изменении величины i-го ресурса. Такой результат, по определению, справедлив только в некоторой окрестности точки b_i. Однако для моделей ЛП имеет место зависимость

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1},$$

из которой следует, что данная интерпретация λ_i справедлива до тех пор, пока базис $\mathbf{B}$ остается неизменным.

Каждая i-я переменная двойственной задачи может рассматриваться как маргинальная стоимость i-го ресурса. Так, при заданном оптимальном значении $\lambda_i > 0$ величина x_0 может быть улучшена (увеличена) за счет увеличения объема b_i i-го ресурса. Этот вывод согласуется с условиями о дополняющей нежесткости, из которых следует, что если $\lambda_i > 0$, то соответствующий i-й ресурс должен быть использован полностью. В этом отношении он становится дефицитным ресурсом. Наоборот, если i-е ограничение избыточное, т. е. имеет вид $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$, то $\lambda_i = 0$; это означает, что любое увеличение избыточного ресурса не может повлиять на величину x_0.

В более широком аспекте экономическую интерпретацию переменным двойственной задачи можно дать следующим образом. Напомним о теоретических основах СМ (разд. 4), из которых следует, что если в задаче максимизации $z_j - c_j < 0$, то увеличение уровня j-го вида производственной деятельности связано с потенциальной возможностью улучшения x_0. Теперь, используя соотно-

шение

$$z_j = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i$$

и λ_i — (теневую) стоимость единицы ресурса i, можно рассматривать z_j как стоимость ресурсов, необходимых для «производства» единицы уровня j-й производственной деятельности. Таким образом, условие $z_j - c_j < 0$ означает, что удельная стоимость ресурсов z_j, необходимых для увеличения уровня j-й производственной деятельности на единицу, меньше, чем характеризующая ее удельная прибыль c_j. В СМ это обстоятельство учитывается введением x_j в базис, что при соблюдении условия допустимости решения эквивалентно увеличению небазисной переменной x_j от ее текущего (пробного) нулевого значения до некоторого положительного значения. В другом случае, когда $z_j - c_j \geqslant 0$, экономические предпосылки для увеличения небазисной переменной x_j относительно ее текущего нулевого значения отсутствуют.

Одна из интересных экономических интерпретаций двойственности связана с анализом модели Леонтьева «затраты — выпуск» [22]. Модель описывает экономическую систему, состоящую из ряда взаимосвязанных отраслей, причем каждая отрасль выпускает один вид продукта и использует единственный технологический процесс (способ производства соответствующего продукта). Вход (затраты) для каждой отрасли представлен рабочей силой, а также продуктами других отраслей и (или) продуктами от внешних источников. Объем производства каждой отрасли должен удовлетворять как спрос других отраслей, так и внешние потребности.

Предположим, что имеется n отраслей, а x_i соответствует объему производства i-й отрасли. Допустим также, что потребность отрасли j в продукте отрасли i прямо пропорциональна величине x_j и коэффициент пропорциональности равен a_{ij}. Если внешний спрос на продукт i-й отрасли равен b_i, то уравнения модели, связывающие затраты и выпуск, имеют вид

$$x_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или в эквивалентном матричном представлении

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b}.$$

Отсюда следует соотношение

$$\mathbf{x} \geqslant (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{b},$$

определяющее допустимое решение при условии $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. Обычно экономическая постановка задачи сама по себе означает, что $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$.

Чтобы сделать модель более интересной, будем считать, что c_j характеризует потребность в рабочей силе, приходящуюся на единицу производства в j-й отрасли. Тогда рассматриваемую задачу можно сформулировать в виде следующей задачи ЛП:

минимизировать $$x_0 = \mathbf{cx}$$

при ограничениях

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

Так как $\mathbf{c} \geqslant \mathbf{0}$ и условие $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ в силу принятого допущения выполняется автоматически, легко видеть, что оптимальное решение имеет вид

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

(ср. с кусочно-линейным программированием, разд. 4). Это решение определяет также уровни производства в каждой из отраслей, при которых спрос на продукты удовлетворяется при минимальной потребности в рабочей силе.

Рассмотрим задачу, двойственную к рассмотренной задаче ЛП «затраты — выпуск». Требуется

$$\text{максимизировать } \lambda_0 = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{b}$$

при ограничениях

$$\boldsymbol{\lambda}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \leqslant \mathbf{c}, \quad \boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0}.$$

Как и в предыдущем случае, очевидно, что решением двойственной задачи будет

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Оптимальные значения переменных двойственной задачи λ_i рассматриваются как цены единицы потребляемого i-го продукта. Такой вывод, в частности, основан на неявном допущении о том, что имеется фиксированная ставка заработной платы для всех видов рабочей силы. Это можно понять из анализа размерностей в приведенном выше выражении для решения двойственной задачи. Так, из равенства $\mathbf{c} = \boldsymbol{\lambda}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ следует, что переменная $\boldsymbol{\lambda}$ не имеет непосредственного денежного выражения, так как $\mathbf{c}$ представляет собой потребность в рабочей силе.

Рассмотренная выше (упрощенная) модель не позволяет исследовать влияние потребности в рабочей силе на результаты решения. Это можно сделать, если рассматривать труд как отрасль «производства», на продукт которой, т. е. имеющуюся в наличии рабочую силу, существует внешняя потребность.

Проведенный анализ показывает, что прямую задачу можно использовать для определения производственной программы $\mathbf{x}$, удовлетворяющей спрос на «номенклатуру товаров» $\mathbf{b}$, тогда как двойственная задача определяет цены на производимые продукты

при допущении, что рабочая сила является первостепенным фактором в экономической системе. Модель можно использовать также для анализа влияния изменения ставки заработной платы (относительно некоторого фиксированного уровня) путем искусственного увеличения или уменьшения компонент вектора **c**, что позволяет отразить соответствующее увеличение или уменьшение фонда заработной платы.

6. АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Получение оптимального решения задачи ЛП не может служить конечной целью. Как правило, специалиста в области исследования операций интересуют также и те изменения оптимального решения, которые связаны с изменением в соответствующих линейных моделях коэффициентов, входящих в **c**, **A** и **b**.

Линейное программирование обеспечивает широкие возможности при анализе моделей на чувствительность и проведении параметрических исследований. Анализ табл. 2 показывает, что текущий оптимальный базис линейной модели можно изменить двумя способами, при которых

1) базис перестает быть оптимальным;
2) базис перестает быть допустимым.

Проверка условий оптимальности и допустимости осуществляется следующим образом (см. табл. 2). Базис **B** остается оптимальным (для задачи максимизации), если условие

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j \geqslant 0$$

выполняется для всех небазисных $\mathbf{P}_j$. Он остается допустимым до тех пор, пока выполняется условие

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geqslant 0.$$

Таким образом, идея анализа модели на чувствительность заключается в том, чтобы проверить оптимальность и допустимость решения при некоторых (дискретных или параметрических) изменениях коэффициентов в **c**, **A** и **b**. Изменения вектора **c** и (или) *небазисного* вектора $\mathbf{P}_j$ влияют только на оптимальность решения, тогда как изменения вектора **b** влияют только на допустимость. С другой стороны, изменения *базисного* вектора $\mathbf{P}_k$ могут влиять как на оптимальность, так и на допустимость решения, ибо эти изменения оказывают прямое влияние на обратную матрицу $\mathbf{B}^{-1}$. Действительно, изменения в базисном векторе $\mathbf{P}_k$ могут носить такой характер, что **B** перестанет быть базисной матрицей.

Ситуации, в которых изменения в модели оказывают влияние как на оптимальность, так и на допустимость решения, могут контролироваться непосредственным образом, при этом СМ используется для восстановления оптимальности, а ДСМ — для

восстановления допустимости [34, 63]. Положение усложняется, когда изменения касаются элементов базисной матрицы **B**. К сожалению, даже в том случае, когда изменяется только один элемент базисного вектора в **B**, для проведения соответствующего анализа необходимы трудоемкие вычислительные процедуры [17]. Однако такой анализ приводит к интересным результатам, позволяющим дать трактовку этим изменениям.

Предположим, что параметры модели c_j, a_{ij} и **b** являются функциями некоторого параметра t. Можно показать [62], что зависимость целевой функции x_0 от t в окрестности оптимального решения имеет вид

$$\frac{dx_0}{dt} = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_0}{\partial b_i}\frac{\partial x_0}{\partial c_j}\frac{da_{ij}}{dt} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_0}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x_0}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt}.$$

Если t принять равным a_{ij}, то указанное соотношение приводится к равенству

$$\frac{\partial x_0}{\partial a_{ij}} = -\left(\frac{\partial x_0}{\partial b_i}\right)\left(\frac{\partial x_0}{\partial c_j}\right) = -\lambda_i^* x_j^*,$$

где x_j^* и λ_i^* — оптимальные решения прямой и двойственной задач.

Если выражение для dx_0/dt нелегко поддается интерпретации, то $\partial x_0/\partial a_{ij}$ показывает, что скорость изменения оптимального значения x_0 прямо пропорциональна произведению оптимальных решений прямой и двойственной задач. Если λ_i^* и x_j^* не отрицательны, то положительное приращение a_{ij} вызовет уменьшение x_0.

Можно получить и другие интересные результаты, касающиеся влияния приращения a_{ij}. Так как

$$\frac{\partial x_0}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial x_0}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial a_{ij}} = c_j\frac{\partial x_j}{\partial a_{ij}},$$

то при оптимальных x_i^* и λ_j^* изменение x_j в окрестности этой точки, отнесенное к приращению a_{ij}, определяется выражением

$$\left.\frac{\partial x_j}{\partial a_{ij}}\right|_{x_j^*} = -\frac{\lambda_i^* x_j^*}{c_j},$$

и аналогично

$$\left.\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{ij}}\right|_{\lambda_i^*} = -\frac{\lambda_i^* x_j^*}{b_i}.$$

Анализ изменения оптимального значения x_0 при изменении элементов матрицы **A** выполнен в работе [58].

Исследования, связанные с параметрическим представлением коэффициентов **c**, **A** и **b**, ограничены в основном случаем линейного их изменения. Например, используя параметр θ, вектор целевой функции **c** можно представить в параметрическом виде следующим

образом:

$$\mathbf{c}(\theta) = \mathbf{c}^0 + \theta\mathbf{E},$$

где $\mathbf{c}^0$ и $\mathbf{E}$ — векторы. Однако линейный закон изменения используется главным образом из-за удобства аналитического представления результатов, так как в этом случае можно получить решения в замкнутой форме и определить диапазон значений θ, в пределах которого решение остается оптимальным и допустимым. Если $\mathbf{c}(\theta)$ представить в виде *любой* нелинейной функции, то основные процедуры анализа модели на чувствительность, а именно проверка оптимальности и допустимости решения, остаются неизменными. Главная трудность при этом связана с решением нелинейных неравенств, описывающих условия оптимальности и допустимости решения.

7. ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ, ДОПУСКАЮЩИЕ ДЕКОМПОЗИЦИЮ

Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$\text{максимизировать } x_0 = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1^0\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2^0\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{A}_n^0\mathbf{x}_n \leqslant \mathbf{b}_0,\\
&\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 \\
&\qquad \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 \\
&\qquad\qquad \cdot \\
&\qquad\qquad\quad \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad \mathbf{A}_n\mathbf{x}_n \leqslant \mathbf{b}_n,\\
&\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n \geqslant \mathbf{0},
\end{aligned}$$

где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — векторы и $\mathbf{A}_1^0, \ldots, \mathbf{A}_n^0, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ — матрицы. Векторами также являются $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ и $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$.

Такой класс задач встречается в практических приложениях, характеризуемых наличием групп видов производства $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, связанных общими ограничениями, причем каждая группа имеет и свои ограничения. Особая структура условий задачи допускает ее разложение (декомпозицию) на n (почти) независимых задач, ограничения которых имеют вид $\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i \leqslant \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Преимущество метода декомпозиции касается в основном вычислительного характера, так как процесс решения задачи в целом сводится к решению последовательности подзадач, как правило, значительно меньшей размерности.

С общим принципом декомпозиции, применяемым при решении задач такого класса, а также его вариантами можно познако-

миться в работе [21]. Эти вопросы рассматриваются также в гл. 11-7, посвященной программированию в случае задач большой размерности.

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Цель настоящей главы состояла в систематизированном изложении принципиальных положений ЛП, нашедших широкое применение в течение последних трех десятилетий. Не будет излишне категоричным заключение о том, что в настоящее время в области ЛП не следует ожидать новых значительных достижений. К счастью, это связано с тем обстоятельством, что теория ЛП достигла такого уровня, когда методы ЛП стали доступны при реализации расчетов даже для сравнительно больших программ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beale E., Cycling in the Dual Simplex Algorithm, *Nav. Res. Log. Quart.*, 2, 269—276 (1955).
2. Ben-Israel A., Charnes A., An Explicit Solution of a Special Class of Linear Programming Problems, *Operations Res.*, 16, 1166—1175 (1968).
3. Ben-Israel A., Charnes A., Hurter A., Robers P., On Explicit Solution of a Special Class of Linear Economic Models, *Operations Res.*, 18, 462—470 (1970).
4. Charnes A., Optimality and Degeneracy in Linear Programming, *Econometrica*, 20, 160—170 (1952).
5. Charnes A., Cooper W., The Stepping Stone Method of Explaining Linear Programming Calculations in Transportation Problems, *Management Sci.*, 1, 46—69 (1954).
6. Charnes A., Cooper W., Chance-Constrained Programming, *Management Sci.*, 6, 73—79 (1959).
7. Charnes A., Cooper W., Programming with Linear Fractional Functionals, *Nav. Res. Log. Quart.*, 9, 181—186 (1962).
8. Charnes A., Lemke C., Minimization of Nonlinear Separable Convex Functionals, *Nav. Res. Log. Quart.*, 1, 301—312 (1959).
9. Dantzig G., Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, in Koopmans [35], 359—373.
10. Dantzig G., A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem, in Koopmans [35], 330—335.
11. Dantzig G., Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, Chapter 21 in Koopmans [35].
12. Dantzig G., Computational Algorithm for the Revised Simplex Method, RADN Report RM-1266, The Rand Corporation, Santa Monica, California, 1953.
13. Dantzig G., Linear Programming under Uncertainty, *Management Sci.*, 1, 197—206 (1955).
14. Dantzig G., Upper Bounds, Secondary Constraints, and Block Traiangularity in Linear Programming, *Econometrica*, 23, 174—183 (1955).
15. Dantzig G., Discrete Value Extremum Problems, *Operations Res.*, 5, 266—277 (1957).
16. Dantzig G., On the Status of Multistage Linear Programs, *Management Sci.*, Oct. 1959.

17. Dantzig G., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 1963. [Имеется перевод: Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения.— М.: Прогресс, 1966.]
18. Dantzig G., Ford L., Fulkerson D., A Primal-Dual Algorithm for Linear Programs, 171—181 in H. Kuhn and A. Tucker, Eds., Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956. [Имеется перевод: Данцит Дж., Форд Л., Фулкерсон Д. Алгоритм для одновременного решения прямой и двойственной задач линейного программирования. Сб.: Линейные неравенства и смежные вопросы.— М.: ИЛ. 1959, с. 277—286.]
19. Dantzig G., Van Slyke R. M., Generalized Upper Bounding Techniques, *J. Computer and System Sci.*, **1**, 213—226 (1967).
20. Dantzig G., Orden A., Wolfe P., Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form Under Linear Inequality Restaints, *Pac. J. Math.*, **5**, 183—195 (1955).
21. Dantzig G., Wolfe P., The Decomposition Principle for Linear Programming, *Operations Res.*, **8**, 101—111 (1960).
22. Dorfman R., Samuelson P., Solow R., Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill, New York, 1958.
23. Dzielinski B., Gomory R., Optimal Programming of Lot Sizes, Inventory, and Labor Allocations, *Management Sci.*, **11**, 874—890 (1965).
24. Eastman W., Linear Programming with Pattern Constraints, Ph. D. Dissertation, Harvard University, 1958.
25. Elmaghraby S. E., An Approach to Linear Programming Under Uncertainty, *Operations Res.*, **7**, 208—216 (1959).
26. Elmaghraby S. E., Allocation Under Uncertainty when Demand Has a Continuous pdf., *Management Sci.*, **6**, 270—294 (1960).
27. Ferguson A. R., Dantzig G. B., The Problem of Routing Aircraft — A Mathematical Solution, *Aeronau. Eng. Rev.*, **14**, 51—55 (1955).
28. Ferguson A. R., Dantzig G. B., The Allocation of Aircraft to Routes — An Example of Linear Programming Under Uncertain Demand, *Management Sci.*, **3**, 45—73 (1956).
29. Ford L., Fulkersen D., Maximal Flow Through a Network, *Canadian J. Of Math.*, **8**, 399—404 (1956).
30. Ford L., Fulkersen D., A Primal-Dual Algorithm for the Capacitated Hitchcock Problem, *Nav. Res. Log. Quart.*, **4**, 47—54 (1957).
31. Frank M., Wolfe P., An Algorithm for Au Quadratic Programming, *Nav. Res. Log. Quart.*, **3**, 95—110 (1956).
32. Garvin W., Crandall H., John J., Spellman R., Applications of Linear Programming in the Oil Industry, *Management Sci.*, **3**, 407—430 (1957).
33. Gass S., Linear Programming (4th ed.), McGraw-Hill, New York 975.
34. Gass S., Saaty T., The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function, *Nav. Res. Log. Quart.*, **2**, 39—45 (1955).
35. Gay D., On Scolnik's Proposed Polynomial Time Linear Programming Algorithm, TR73-190, Computer Science Department, Cornell University, 1973.
36. Gomory R., Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, *Bull Am. Math. Soc.*, **64**, 275—278 (1958).
37. Hadley G., Linear Programming, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1962.
38. Hadley G., Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964. [Имеется перевод: Хэдли Дж. Нелинейное и динамическое программирование.— М.: Мир, 1967.]
39. Hartley H., Nonlinear Programming by the Simplex Method, *Econometrica*, **29**, 223—237 (1961).

40. Heller I., Tompkins C. B., An Extension of a Theorem of Dantzig, pp. 247—254 in Linear Inequalities and Related Systems (H. Kuhn and A. Tucker, Eds.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956. [Имеется перевод: Хеллер И., Томпкинс Ч. Обобщение одной теоремы Данцига. Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы.— М.: ИЛ, 1959, с. 348—354.]
41. Hitchcock F., The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Locations, *J. Math. Physics*, 20, 224—230 (1941).
42. Hoffman A., Cycling in the Simplex Algorithm, National Bureau of Standards, Report No. 2974, December, 1953.
43. Jacobs W., The Caterer Problem, *Nav. Res. Log. Quart.*, 1, 154—165 (1954).
44. Johnson S. M., Sequential Production Planning Over Time at Minimum Cost, *Management Sci.*, 3, 435—437 (1957).
45. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
46. Kelley J., Jr., The Cutting Method for Solving Convex Programs, *J. Indust. Appl. Math.*, 8, 703—712 (1960).
47. Koopmans T., Activity Analysis of Production and Allocation, Wiley, New York, 1951.
48. Koopmans T., Optimum Utilization of the Transportation System, Proceedings of the International Statistical Conferences, Washington, D.C., 1947.
49. Kuhn H., The Hungarian Method for the Assignment Problem, *Nav. Res. Log. Quart.*, 2, 83—97 (1955).
50. Land A., Doig A., An Automatic Method for Solving Discrete Programming Problems, *Econometrica*, 28, 497—520 (1960).
51. Lasdon L. S., Terjung R. C., An Efficient Algorithm for Multi-Item Scheduling, *Operations Res.*, 19, 946—969 (1971).
52. Lemke C., The Dual Method for Solving the Linear Programming Problem, *Nav. Res. Log. Quart.*, 14, 36—47 (1954).
53. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeny D. W., Karel C., An Algorithm for the Traveling Salesman Problem, *Operations Res.*, 11, 979—989 (1963).
54. Madansky A., Method of Solution of Linear Programming Under Uncertainty, *Operations Res.*, 6, 197—204 (1960).
55. Manne A., Programming of Economic Lot Sizes, *Management Sci.*, 14, 115—135 (1958).
56. McCallum C., Jr., Existence Theory for the Complex Linear Complementarity Problem, *J. Math. Anal. and Appl.*, 43, 738—762 (1972).
57. Miller C., The Simplex Method for Local Separable Programming, pp. 89—100 in R. Graves and P. Wolfe (Eds.), Recent Advances in Mathematical Programming, McGraw-Hill, New York, 1963.
58. Mills H., Marginal Values of Matrix Games and Linear Programs, 183—193 in H. Kuhn and A. Tucker (Eds.), Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, New Jersey, 1956. [Имеется перевод: Миллс Х. Маргинальные значения матричных игр и задач линейного программирования. Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы.— М.: ИЛ, 1959, с. 287—297.]
59. Mueller R., Cooper L., A Comparison of the Primal Simplex and Primal-Dual Algorithms in Linear Programming, *Communications of the ACM*, 18, 115—121 (1965).
60. Orchard-Hays W., Advanced Linear Programming Computing Techniques, McGraw-Hill, New York, 1968.
61. Orden A., The Transshipment Problem, *Management Sci.*, 2, 276—285 (1956).
62. Saaty T., Coefficient Perturbation of a Constrained Extremum, *Operations Res.*, 7, 294—302 (1959).

63. Saaty T., Gass S., Parametric Objective Function (Part I), *Operations Res.*, 2, 316—319 (1954).
64. Scolnik H., Untitled preliminary report presented at the Eighth International Symposium on Mathematical Programming, Stanford University, California, Aug. 1973.
65. Scolnik H., A New Approach to Linear Programming, SIGMAP Newsletter, Nov. 1973.
66. Simonnard M., Linear Programming, Prentice-Hall, New Jersey, 1966.
67. Spivey W. A., Thrall R. M., Linear Optimization, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.
68. Taha H., Curry G., Classical derivation of the Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Linear Programs, *Operations Res.*, 19, 1045—1050 (1971).
69. Tucker A., Linear Programming and Theory of Games, *Econometrica*, 18, 189 (1950).
70. Tucker A., Dual Systems of Homogeneous Linear Relations, 3—18 in H. Kuhn and A. Tucker (Eds.), Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956. [Имеется перевод: Таккер А. Двойственные системы однородных линейных соотношений. Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы.— М.: ИЛ, 1959, с. 127—141.]
71. Vienott A. F., Dantzig G. B., Integral Extreme Points, *SIAM Rev.*, 10, 371—372 (1968).
72. Wolfe P., A Technique for Resolving Degeneracy in Linear Programming, RAND Report RM 2995-PR, Santa Monica, Caliofornia, 1957.
73. Wolfe P., The Simplex Method for Quadratic Programming, *Econometrica* 27, 382—398 (1959).
74. Wolfe P., Dantzig G., Linear Programming in a Markov Chain. Operations Res., 10, 702—710 (1962).
75. Wagner H. M., Linear Programming and Regression Analysis, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 57, 572—578 (1962).
76. White W. W., A Commentary on the New Approach to L. P., SIGMAP Newsletter, April 1974.
77. Zangwill W., The Convex Simplex Method, *Management Sci.*, 14, 221—238 (1967).
78. Zlobec S., Ben-Israel A., On Explicit Solution of Interval Programs, *Israel J. Math.*, 8, 12—22 (1970).

II-2. Целочисленное программирование и комбинаторика

Ф. Гловер[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

Целочисленное программирование (ЦП) и комбинаторика тесно связаны между собой. В наиболее широком смысле их области исследования идентичны. Однако принято считать, что отдельные классы задач для одного из указанных направлений характерны в большей степени, чем для другого. Комбинаторика определяется здесь как область комбинаторной оптимизации, задачи которой состоят в отыскании среди структуризованного конечного множества альтернатив наилучшего (относительно заданного критерия) подмножества объектов (решений, видов деятельности и т. д.). Такие задачи формулируются как задачи максимизации или минимизации некоторого функционала. *Структурные особенности* заданного конечного множества, какими бы они ни были, служат исходной предпосылкой для построения некоторого системно упорядоченного метода решения задачи, который используется вместо прямого перебора и сравнения всех альтернативных вариантов (для задач, описывающих реальные ситуации, такой перебор может потребовать астрономически большого объема вычислений). Область применения целочисленного программирования и комбинаторных методов включает большое число практических задач. Те из них, которые относят к комбинаторным, как правило, целесообразно формулировать в характерных терминах теории графов или теории матроидов. Задачи, относящиеся к области целочисленного программирования, обычно удобнее представлять, используя понятия математического программирования. Существуют и задачи, находящиеся как бы на нейтральной полосе. Их обычно относят к какой-либо одной из указанных групп или к обеим группам задач в зависимости от желания автора придать исследованию тот или иной оттенок.

В данной главе внимание уделяется главным образом (но не только) тем задачам и формулировкам, которые обычно даются в терминах ЦП. (Графо-теоретический аспект комбинаторных методов рассматривается в гл. II-3.)

Не вполне строго ЦП можно определить как область математической оптимизации, связанную с задачами, в которых все или некоторые переменные должны иметь целочисленные значения

[1)] Fred Glover, University of Colorado.

(быть целыми числами). Нелинейность, вытекающая из требования целочисленности переменных, выражена достаточно слабо для того, чтобы проявиться в неожиданных изменениях других нелинейных зависимостей, что позволяет выделить в большинстве нелинейных моделей ЦП линейные и целочисленные компоненты. Поэтому ЦП часто рассматривается как раздел математической оптимизации линейных моделей (в частности, линейного программирования), в которых на некоторые или все переменные наложено условие целочисленности.

1.1. Один из примеров

Простым примером задачи ЦП может служить задача о садовнике, которому для участка, занятого садом, необходимо купить 107 фунтов удобрений. Садовник может закупить удобрения или в мешках весом 35 фунтов стоимостью 14 долл., или в мешках весом 24 фунта стоимостью 12 долл. Цель садовника — купить (не менее) 107 фунтов удобрений, затратив минимальную сумму денег. Обозначив количество покупаемых мешков весом 35 фунтов и весом 24 фунта через x_1 и x_2 соответственно, можно сказать, что садовник стремится

$$\text{минимизировать } 14x_1 + 12x_2$$

при ограничениях

$35x_1 + 24x_2 \geqslant 107$, x_1, x_2, $\geqslant 0$ и принимают целочисленные значения.

Условие целочисленности означает, что садовник не может купить половины или треть мешка удобрений, а должен либо купить целый мешок, либо не покупать его совсем. Без этого условия рассматриваемая задача представляет собой типичный пример обычной задачи ЛП.

1.2. Значение условия целочисленности

Чтобы получить простейшее представление о том, каким образом условие целочисленности может повлиять на характер решения задачи, рассмотрим, что произойдет, если это условие будет опущено. Садовник учтет, что цена фунта удобрений в мешках весом 35 фунтов равна 40 центам, а в мешках весом 24 фунта — 50 центам. Исходя из этого, он сразу же придет к выводу, что наилучшим для него решением будет покупка $3^2/_{35}$ мешка весом по 35 фунтов. Однако при соблюдении условия целочисленности лучшим решением для него будет покупка только одного мешка весом 35 фунтов и трех мешков по 24 фунта. Ясно видно, как резко изменился характер оптимального решения садовника,

и в таком влиянии условия целочисленности нет ничего удивительного. (В частности, можно сослаться на пример транспортной задачи со специально сконструированными условиями [26]. Эту задачу можно представить в виде квадратной матрицы затрат размера 5 × 5, а результаты ее решения как обычной задачи ЛП можно округлить более чем миллионом различных способов, ни один из которых не даст допустимого целочисленного решения, не говоря уже об оптимальном.

1.3. Области применения

В предыдущем примере как интерпретация, так и мотивы появления требования целочисленности были достаточно очевидными, что характерно и для тех случаев, когда речь идет об определении оптимального количества самолетов, грузовых судов или людей. Однако встречается множество задач, на первый взгляд не имеющих ничего общего или весьма слабо связанных с оптимизацией целочисленной линейной модели, но которые тем не менее можно сформулировать как задачи ЦП. Действительно, требование дискретности переменных, если не в явном виде, то в скрытой форме, присуще многим практически важным классам задач, что обеспечивает необычайно широкую область применения ЦП во многих теоретических и прикладных дисциплинах. Составление последовательности производственных процессов, календарное планирование работы предприятия, планирование и обеспечение материально-технического снабжения, размещение предприятий, баланс сборочных линий, геологоразведка, смета капиталовложений, размещение ресурсов, планирование использования оборудования — все эти важные производственные задачи представляют лишь небольшую часть широкой области применения ЦП.

Однако эта область не ограничена задачами только производственного характера и включает множество других задач комбинаторной оптимизации, возникающих при инженерных разработках и научных исследованиях. Задачи, связанные с вопросами конструирования вычислительных машин, надежности систем, выбора простой импликанты, кодирования сигналов и проектирования систем аккумуляции энергии, дополняют те классы задач, которые формулируются в рамках ЦП.

Целочисленное программирование находит применение и в экономических исследованиях. Допущение о непрерывности, лежащее в основе традиционных теоретических методов исследования экономических процессов, не совместимо с наличием неделимых величин (объектов, издержек на наладочные работы и расходов, связанных с расширением предприятий). Поэтому выводы, получаемые на основе маргинального анализа, зачастую должны

исправляться (или формулироваться с соответствующими оговорками), чтобы не противоречить положениям, составляющим основу методов ЦП.

1.4. Математическая формулировка линейных и целочисленных задач

Обычная формулировка задачи ЛП в матричном представлении имеет вид

$$\text{минимизировать } \mathbf{cx}$$

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant 0,$$

где $\mathbf{c} = (c_j)_{1\times n}$, $\mathbf{x} = (x_j)_{n\times 1}$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ и $\mathbf{b} = (b_i)_{m\times 1}$. Неравенство $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$ в матричном представлении можно использовать как общую форму ограничений вида $\mathbf{Dx} \geqslant \mathbf{d}$ и $\mathbf{Dx} = \mathbf{d}$, если применить хорошо известное эквивалентное преобразование соотношений

$$\mathbf{Dx} \geqslant \mathbf{d} \Leftrightarrow \quad -\mathbf{Dx} \leqslant -\mathbf{d} \quad \text{и}$$

$$\mathbf{Dx} \leqslant \mathbf{d},$$

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{d} \Leftrightarrow$$

$$-\mathbf{eDx} \leqslant -\mathbf{ed},$$

где $\mathbf{e}$ — вектор, все компоненты которого равны 1 и интерпретируемый в зависимости от контекста как вектор-строка или вектор-столбец. (Таким образом, неравенство $-\mathbf{eDx} \leqslant -\mathbf{ed}$ есть итог суммирования строк-неравенств, входящих в $\mathbf{Dx} \leqslant \mathbf{d}$, и замены знаков их левых и правых частей на противоположные.) Итак, задачу максимизации $\mathbf{dx}$ путем замены $\mathbf{c} = -\mathbf{d}$ можно свести к ранее сформулированной задаче минимизации.

1.5. Полностью и частично целочисленные задачи

Задача ЛП, в которой на все компоненты вектора $\mathbf{x}$ наложено дополнительное условие целочисленности, называется *полностью* целочисленной; если это условие относится только к некоторым компонентам $\mathbf{x}$, то задача называется *частично* целочисленной. Переменные, не связанные условием целочисленности, называют непрерывными. (Так, в обычных задачах ЛП непрерывными являются все переменные.)

Термин «целочисленное программирование» часто связывают с полностью целочисленными задачами, однако здесь в зависимости от постановки рассматриваемых задач этот термин будет распространяться и на более общий класс задач, включающий и частично целочисленные.

2. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЦП

2.1. Задача о ранце (или о загрузке)

Одной из простейших задач ЦП является задача *о ранце*, названная так в силу ее интерпретации как задачи выбора наилучшего состава предметов, подлежащих укладке в походный ранец, причем каждому из предметов поставлена в соответствие оценка его важности и установлен предельный вес ранца. Получающаяся задача имеет линейную целевую функцию и линейное ограничение, выраженные через целочисленные переменные. Например,

$$\text{максимизировать } 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5$$

при ограничениях

$$54x_1 + 35x_2 + 57x_3 + 46x_4 + 19x_5 \leqslant 100$$

и $x_j \geqslant 0$ и целые, $j = 1, \ldots, 5$.

В практических ситуациях на переменные задачи о ранце часто накладываются ограничения вида: $x_j \leqslant 1$; в этом случае ее иногда называют «0—1» задачей о ранце (т. е. с альтернативой «да — нет»). В более общем случае может потребоваться, чтобы значения переменных удовлетворяли условиям $x_j \leqslant U_j$. При этих условиях рассматриваемая задача называется задачей о ранце с ограниченными сверху переменными.

Задачу о ранце очень легко решить в виде обычной задачи ЛП путем простого ранжирования переменных в соответствии со значениями отношений коэффициентов целевой функции к коэффициентам ограничений (так называемый алгоритм «жадности»). Таким образом, при формулировке задачи в виде

$$\text{максимизировать } \sum d_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum a_j x_j \leqslant b, \quad x_j \geqslant 0 \text{ и целые},$$

где $d_j > 0$ и $a_j > 0$ при всех j, осуществляется ранжировка переменных в соответствии с такой штриховой индексацией, что

$$d_{1'}/a_{1'} \geqslant d_{2'}/a_{2'} \geqslant \ldots,$$

где последовательность $1', 2', \ldots$ получена перестановкой прежних индексов $1, 2, \ldots$. Затем задача решается путем приписывания переменной $x_{1'}$ максимально возможного значения, не нарушающего ограничения $\sum a_j x_j \leqslant b$ или другого ограничения, наложенного на $x_{1'}$, как это имеет место в задаче с выбором «0—1». После этого переменной $x_{2'}$ приписывается максимально возможное значение, не нарушающее ограничения с учетом уже присвоенного значения переменной $x_{1'}$, и т. д.

Таким образом, в приведенном примере имеем

$$1' = 5,\ 2' = 3,\ 3' = 2,\ 4' = 4,\ 5' = 1,$$

и оптимальным решением задачи в случае неограниченных и непрерывных переменных будет

$$x_5 = 100/19,\ x_3 = x_2 = x_4 = x_1 = 0,$$

тогда как оптимальным решением задачи с выбором «0—1» будет

$$x_5 = 1,\ x_3 = 1,\ x_2 = 24/35,\ x_4 = x_1 = 0.$$

Часто встречающимся обобщением задачи о ранце является так называемая многомерная задача о ранце, постановка которой «минимизировать $\mathbf{cx}$ при ограничениях $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$ и т. д.», характеризуется наличием условий $\mathbf{c} \leqslant 0$ и $\mathbf{A} \geqslant 0$. Очевидная и благоприятная для ряда ситуаций особенность многомерной задачи о ранце состоит в том, что дробный (т. е. «не полностью целочисленный») вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий условию $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$, можно округлить до ближайшего нижнего целочисленного значения $\mathbf{x}$, также удовлетворяющего этому условию. Практическое использование многомерной задачи о ранце связано с вопросами распределения капиталовложений, ведения лесного хозяйства и загрузки транспортных средств.

Подробное обсуждение задачи о ранце проводится не только для исторической справки, но и в связи с тем, что, несмотря на кажущуюся простоту этой задачи, при изложении вопросов ЦП неоднократно приходится обращаться в той или иной связи к различным ее формулировкам. (Задача о садовнике, приведенная в начале главы, представляет собой один из вариантов задачи о ранце.) Действительно, ряд методов решения задач ЦП можно рассматривать как непосредственное развитие метода укладки ранца или в связи с формулировками вспомогательных подзадач о ранце, решение которых содержит ценную информацию для решения исходной задачи. Более подробно это будет рассмотрено в последующих разделах.

2.2. Задача с постоянными элементами затрат

Рассмотрим задачу, которая характеризуется наличием в составе управляемых переменных «единовременных» затрат (или первоначальных инвестиций) и связана с процессами выбора вариантов при создании или расширении сферы деятельности какого-либо предприятия. Так, управляющий, которому необходимо выбрать один из нескольких возможных типов объектов, например при закупке оборудования, строительстве автомобильных заводов, бурении нефтяных скважин или освоении земельных участков, должен учитывать не только текущие издержки, связанные с функ-

ционированием соответствующих объектов (в том случае, если проекты или решения реализуются), но и начальные единовременные затраты. Этот класс задач принадлежит к числу тех, которые наиболее часто встречаются в практических приложениях производственного характера. Типичная формулировка рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$\text{минимизировать } \mathbf{cx} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{y}$$

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0},$$

где векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют одинаковую размерность, а $x_j > 0$ означает, что $y_j = 1$. (Здесь, конечно, не имеется в виду соответствие векторов $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ аналогично обозначенным векторам из ранее приведенной общей формулировки задачи ЦП.) Взаимосвязь соотношений $x_j > 0$ и $y_j = 1$ выражает тот аспект задачи, что изготовление, покупка или обработка некоторого положительного «количества» x_j требует фиксированных затрат α_j (> 0). Можно отметить, что из $x_j = 0$ автоматически следует $y_j = 0$ при любом минимизирующем решении, так как всякий раз, когда $x_j = 0$ и $y_j = 1$, полагая $y_j = 0$, можно всегда получить лучшее решение (не нарушая при этом ни одного из ограничений). Однако приведенные условия пока еще не приемлемы для окончательной формулировки задачи ЦП, поскольку ограничение «$x_j > 0$ означает, что $y_j = 1$» является логическим, а не линейным. Чтобы придать формулировке задачи приемлемую структуру, допустим, что существует такая предельная величина U_j, при которой условие $x_j \leqslant U_j$ выполняется для всех значений x_j, удовлетворяющих ограничениям $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. Тогда ограничения вида

$$U_j y_j \geqslant x_j$$

всегда выполняются при $y_j = 1$, и, кроме того, если y_j — целое число, то $x_j > 0$ означает, что $y_j \geqslant 1$ и, следовательно, в минимизирующем решении $y_j = 1$ (в силу тех же соображений, из которых следовало, что при $x_j = 0$ должно выполняться равенство $y_j = 0$). Таким образом, формулировка рассматриваемой задачи в виде задачи ЦП может быть дана следующим образом:

$$\text{минимизировать } \mathbf{cx} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{y}$$

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} - \mathbf{Uy} \leqslant \mathbf{0},$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}, \ \mathbf{y} \text{ — целое},$$

где $\mathbf{U} = (U_j)$. Чтобы в явном виде показать, что переменная y_j должна принимать значения либо 0, либо 1, можно также доба-

вить ограничение $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{e}$ (т. е. $y_j \leqslant 1$ для всех j), однако, как уже отмечалось, при допущении о том, что $\alpha > 0$, это делать не обязательно.

2.3. Задача о гармоничном составе экспедиции и комбинаторная задача о паросочетании

Задача о гармоничном составе экспедиции заключается в следующем. Группа исследователей намерена отправиться в экспедицию, причем желательно, чтобы количество участников экспедиции было максимальным. Однако некоторые из них не ладят друг с другом, и поэтому, если одно из лиц, входящих в конфликтующую пару, отправится в экспедицию, то другому придется остаться дома. Такую задачу можно сформулировать как «0—1» задачу ЦП, определяя переменную x_j следующим образом:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-е лицо отправляется,} \\ 0, & \text{если } j\text{-е лицо остается.} \end{cases}$$

Тогда цель заключается в том, чтобы

$$\text{максимизировать } \sum x_j$$

при ограничениях

$$x_h + x_k \leqslant 1$$

для всех несовместимых пар лиц h и k. Формулировка задачи становится полной при условиях $1 \geqslant x_j \geqslant 0$ и целочисленности x_j при всех j.

Задача о гармоничном составе экспедиции тесно связана с задачей о паросочетании максимальной мощности, рассматриваемой в комбинаторном направлении теории графов. На рис. 1 показан типичный граф, состоящий из узлов (точек) и соединяющих их ребер (линий). Паросочетание такого графа определяется как множество ребер, не имеющих общих точек. Ребра 1 и 4 на рис. 1 образуют паросочетание, а ребра 5 и 7 — нет (так как ребра 5 и 7 имеют общую точку). Паросочетание максимальной мощности определяется как паросочетание, состоящее из максимального числа ребер. Такое определение аналогично определению гармоничного состава экспедиции при условии

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{когда ребро } j \text{ входит в паросочетание,} \\ 0, & \text{когда ребро } j \text{ не входит в паросочетание,} \end{cases}$$

и ограничении $x_h + x_k \leqslant 1$ для тех пар ребер h, k, которые имеют общую точку.

Обобщенная задача о гармоничном составе экспедиции получается при введении оценок «полезности» d_j каждого лица j и

Рис. 1.

построении целевой функции, максимизирующей общую полезность $\Sigma d_j x_j$ экспедиции, а не количество участников экспедиции. Обобщение соответствующей задачи теории графов приводит к задаче о паросочетании максимального веса и связано с приписыванием каждому ребру некоторого веса и постановкой вопроса об отыскании такого паросочетания, общий вес ребер которого максимален. Легко усмотреть и другие обобщения рассматриваемой задачи. Например, в задаче о гармоничной экспедиции можно считать, что каждая «несовместимая» группа состоит не из двух, а из некоторого множества лиц. Если S означает такое множество, а $|S|$ — число элементов этого множества, то ограничения задачи можно усилить за счет требования

$$\sum_{j \in S} x_j \leqslant |S| - 1,$$

означающего, что по крайней мере одно из лиц, входящих в конфликтующую группу, должно остаться дома.

2.4. Задача об эффективной экспедиции и комбинаторная задача о покрытии

В задаче об эффективной экспедиции группа исследователей стремится *минимизировать* число участников экспедиции. Однако экспедиции предстоит выполнение нескольких обязательных видов работ, поэтому для ее успеха необходимо, чтобы для каждой из таких работ в составе участников было по крайней мере одно лицо, способное к ее выполнению. Определяя переменную x_j так же, как в предыдущей задача, и обозначая через S_i множество лиц, способных к выполнению i-го вида работ, приходим к следующей формулировке задачи:

$$\text{минимизировать } \sum x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in S_i} x_j \geqslant 1.$$

Как и раньше, формулировка задачи заканчивается введением неравенств $1 \geqslant x_j \geqslant 0$ и условия целочисленности x_j.

Существует тесная связь рассмотренной задачи (и это можно было бы предположить) с соответствующей задачей комбинаторного направления теории графов, которая в данном случае называется *задачей о покрытии наименьшей мощности. Покрытием* называется множество ребер, узлы которых включают все узлы графа. Так, в графе, представленном на рис. 1, ребра 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 образуют покрытие, а ребра 1, 3, 5 и 9 — нет (так как не хватает ребра, покрывающего узел, общий для ребер 7 и 8). Покрытием наименьшей мощности называется покрытие, которое содержит наименьшее число ребер; его определение аналогично формулировке задачи об эффективной экспедиции: x_j определяется так же, как и в задаче о паросочетании, а через S_i обозначается множество ребер, пересекающихся в узле i (для каждого узла графа это дает одно ограничение).

Непосредственное обобщение этих задач состоит в приписывании ребрам определенных весов и требовании многократного покрытия узлов.

2.5. Задача о доставке

Некоторая фирма каждый день доставляет своим клиентам товары на грузовых машинах (или по железной дороге, воздушным путем, на баржах и т. д.). Существует множество допустимых маршрутов доставки, каждый из которых позволяет обслужить определенное подмножество клиентов и требует использования в течение дня одного транспортного средства. Каждый маршрут характеризуется определенными расходами, которые могут соответствовать его длине, или стоимости расходуемого топлива и т. д. Цель состоит в том, чтобы выбрать такое множество маршрутов, при котором обеспечивается обслуживание каждого из клиентов и, кроме того, суммарные расходы минимальны.

Введем переменную

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если маршрут } j \text{ выбран,} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и сформируем матрицу **A**, j-й столбец которой имеет (постоянные) элементы

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент обслуживается по маршруту } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если обозначить стоимость доставки по маршруту j через c_j, то задача о доставке приобретает вид

минимизировать $\mathbf{cx}$

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{e},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \text{ и целое},$$

где, как и раньше, $\mathbf{e}$ — единичный вектор (в данном случае вектор-столбец).

Задача о доставке может также содержать и ограничение вида

$$\sum x_j \leqslant k,$$

которое определяет максимально возможное число выбираемых маршрутов (если, например, фирма ежедневно может выпускать на линию не более k грузовиков).

Отметим, что в силу специфичной формы матрицы $\mathbf{A}$ из ограничений «$\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ и целые» автоматически следует $x_j = 0$ или 1 для каждого j (это будет справедливо и в том случае, если условие $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$ заменить на $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{e}$). В рассматриваемой задаче, конечно, сделано допущение об отсутствии в матрице $\mathbf{A}$ полностью нулевых столбцов (наличие нулевых столбцов соответствовало бы маршруту, на котором нет ни одного клиента). Уравнение в матричной форме $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$ устанавливает, что каждый из клиентов обслуживается один раз в день.

2.6. Задачи с многократными альтернативами

Если ввести соответствующим образом определенные булевы (т. е. 0—1) переменные, то можно сформулировать задачи, описывающие многие ситуации при наличии дихотомии или многократных альтернатив. Подобные задачи относятся к самым разным областям — от создания ядерных реакторов до выбора мест расположения водохранилищ при разработке проектов распределения водных ресурсов.

Обычно такие задачи решаются при ограничениях вида

$$\begin{gathered}\mathbf{A}^{(1)}\,\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^{(1)},\\ \mathbf{A}^{(2)}\,\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^{(2)},\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \mathbf{A}^{(r)}\,\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^{(r)},\end{gathered}$$

из которых по крайней мере q должны выполняться, а остальные $(r - q)$ могут соблюдаться или нет. Поставим в соответствие каждому вектору $\mathbf{b}^{(k)}$ некоторый вектор $\mathbf{M}^{(k)}$ такой же размерности (которая для разных k может быть различной), компоненты которого имеют достаточно большую величину, так что для всех векторов $\mathbf{x}$, фигурирующих в условиях рассматриваемой задачи, выполняется соотношение $\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^{(k)} + \mathbf{M}^{(k)}$. Тогда ограничение

$$\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^{(k)} + y_k\mathbf{M}^{(k)},$$

где y_k — булева переменная, будет иметь вид $\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^{(k)}$ при $y_k = 0$ и $\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^{(k)} + \mathbf{M}^{(k)}$ при $y_k = 1$. Для того чтобы выполнялись по крайней мере q неравенств вида $\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^{(k)}$, по меньшей мере q переменных y_k должны иметь нулевое значение. Это достигается за счет введения ограничений $\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^{(k)} + y_k\mathbf{M}^{(k)}$ при $k = 1, \ldots, r$, а также условия $\sum y_k \leqslant r - q$. Последнее ограничение можно заменить ограничением в виде равенства $\sum y_k = r - q$, что не меняет получаемого результата.

2.7. Задачи с булевыми переменными и полиномиальными функциями

Задачу нелинейного программирования с булевыми переменными вида

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{x})$$

при ограничениях

$$g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, m; \; x_j = 0 \text{ или } 1 \text{ при всех } j,$$

где f и g_i — полиномы, можно заменить эквивалентной задачей линейного программирования с булевыми переменными, если:

а) все ненулевые степени переменной x_j заменить на первую степень (так как при $x_j = 0$ или 1 имеем $x_j = x_j^2 = x_j^3$ и т. д.);

б) каждое произведение $\prod_{j \in Q} x_j$ заменить булевой переменной x_Q, которая должна удовлетворять условиям

$$x_Q \geqslant \sum_{j \in Q} x_j + 1 - |Q|,$$

$$x_Q \leqslant \Big(\sum_{j \in Q} x_j\Big) / |Q|,$$

где $|Q|$ означает число элементов в Q.

Обоснование введения второй процедуры состоит в следующем. Ограничение, определяющее нижний предел величины x_Q, всегда будет излишним, за исключением случая $\sum_{j \in Q} x_j = |Q|$ (что имеет место при $x_j = 1$ для всех $j \in Q$), когда это ограничение принимает вид $x_Q \geqslant 1$. С другой стороны, ограничение, определяющее верхний предел величины x_Q, всегда будет эквивалентно требованию $x_Q < 1$ (т. е. $x_Q = 0$), опять за исключением случая $\sum_{j \in Q} x_j = |Q|$, когда допускается значение $x_Q = 1$. Таким образом, $x_Q = 1$, если $x_j = 1$ при всех $j \in Q$ (и $x_Q = 0$ в противном случае), что идентифицирует переменную x_Q в качестве эквивалентной замены $\prod_{j \in Q} x_j$. Для соответствующего представления таких полиномиальных функций разработаны и другие, более эффективные способы [29].

2.8. Эквивалентность задач ЦП с ограниченными переменными и задач ЦП с булевыми переменными

Существует несколько способов представления задачи ЦП с ограниченными переменными в виде задачи ЦП с булевыми переменными.

Чтобы показать это, допустим, что на каждую целочисленную переменную x_j исходной задачи наложено ограничение вида $0 \leqslant x_j \leqslant U_j$ с конечным верхним пределом U_j. Тогда x_j можно заменить линейным выражением

$$x_{0j} + 2x_{1j} + 4x_{2j} + \ldots + 2^r x_{rj},$$

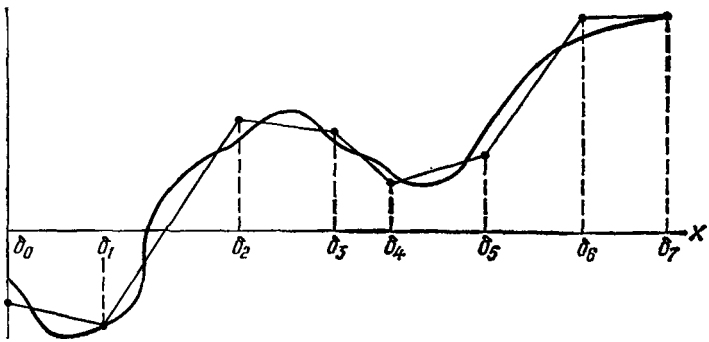
где каждая переменная x_{ij} является булевой переменной, а r равно единственному целому числу, для которого $2^r \leqslant U_j < 2^{r+1}$. Два других способа замены целочисленной переменной связаны с простым использованием взвешенной суммы булевых переменных. При этом все веса либо принимаются равными 1 (что приводит к обычной сумме различных переменных, число которых равно U_j), либо считаются положительными целыми числами 1, 2, 3, . . ., U_j и вводится дополнительное ограничение, в соответствии с которым сумма булевых переменных, ассоциированных с этими весами, не должна превышать 1.

Благодаря широким возможностям, появляющимся при представлении задач ЦП в виде задач с булевыми переменными, а также вследствие того что для многих практических задач естественно введение таких переменных, большое внимание уделялось как методам решения задач с булевыми переменными, так и анализу получаемых результатов. И действительно, многие задачи нелинейного программирования (НЛП) можно сформулировать (в допустимом приближении) как задачи ЦП с булевыми переменными. Два способа такого преобразования исходной задачи, принадлежащие к числу наиболее эффективных, рассматриваются в следующем разделе.

2.9. Кусочно-линейная аппроксимация сепарабельной нелинейной функции

Нелинейная функция $f(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} = (x_j)_{n\times 1})$ называется *сепарабельной*, если ее можно представить в виде $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$, где каждая функция f_j является функцией одной переменной x_j. Если поведение функции достаточно хорошее, то без особого труда можно подобрать для ее аппроксимации подходящую кусочно-линейную функцию. Для упрощения изложения этого вопроса опустим индекс j и будем считать, что $f(x)$ означает одну из функций $f_j(x_j)$; при этом x будет соответствовать уже не вектору, а единственной перемен-

ной. Пусть, например, подобная функция $f(x)$ и ее линейная аппроксимация такие, как показано на рисунке, где $f(x)$ изображена кривой, а $L(x)$ — ломаной прямой.



Разобьем область определения этих функций на интервалы $[\delta_{k-1}, \delta_k]$, $k = 1, \ldots, 7$, в пределах которых $L(x)$ представлена прямолинейными отрезками. Обозначим через α_k тангенс угла наклона $L(x)$ на интервале $[\delta_{k-1}, \delta_k]$; заметим, что если $x \in [\delta_{k-1}, \delta_k]$, то $L(x) = L(\delta_{k-1}) + \alpha_k (x - \delta_{k-1})$. Это соотношение дает возможность представить $L(x)$ в виде линейной функции следующим образом. Пусть y_k — булева переменная, а z_k — непрерывная переменная, причем $y_k = 1$ соответствует случаю, когда $x \in [\delta_{k-1}, \delta_k]$, а z_k не равна нулю, если только $y_k = 1$; в этом случае $z_k = x - \delta_{k-1}$. Тогда $L(x)$ можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{r} [L(\delta_{k-1}) y_k + \alpha_k z_k]$$

при наличии ограничений

$$\sum_{k=1}^{r} y_k = 1, \quad (\delta_k - \delta_{k-1}) y_k \geqslant z_k \geqslant 0,$$

$y_k \geqslant 0$ и принимает целочисленные значения; $k = 1, \ldots, r$.

Такое представление функции $L(x)$ может быть правомерным и в том случае, если она не является непрерывной. Для этого выберем δ_k таким, чтобы на полуоткрытом интервале $[\delta_{k-1}, \delta_k)$ функция $L(x)$ была непрерывной, и будем считать, что $y_k = 1$ при $x \in [\delta_{k-1}, \delta_k]$, тогда как на z_k накладывается ограничение $(\delta_k - \delta_{k-1}) y_k - \varepsilon \geqslant z_k \geqslant 0$, где ε — достаточно малое положительное число.

Вполне возможно добиться допустимости такого представления функции $L(x)$ и в том случае, если она определена на несмежных интервалах. В частности, когда $L(x)$ определена только в точках δ_k, простое представление $L(x)$ может иметь вид

$\sum_{k=1}^{r} L(\delta_k) y_k$, и при этом нет необходимости использовать переменные z_k.

Существует и другой способ представления $L(x)$. Однако в этом случае требуется, чтобы функция $L(x)$ была непрерывной. При таком допущении $L(x)$ можно определить следующим выражением:

$$L(0) + \sum_{k=1}^{r} \alpha_k z_k,$$

где переменная z_k теперь имеет следующую интерпретацию: она равна длине интервала $[\delta_{k-1}, \delta_k]$, если $x > \delta_k$; равна $x - \delta_{k-1}$ (как и раньше), если $x \in [\delta_{k-1}, \delta_k]$, и равна нулю, если $x < \delta_{k-1}$. (Таким образом, $\sum z_k = x$.) Такая интерпретация z_k обеспечивается включением следующих ограничений:

$$y_{k-1}(\delta_k - \delta_{k-1}) \geqslant z_k \geqslant y_k(\delta_k - \delta_{k-1}),$$

$y_k \geqslant 0$ и принимает целочисленные значения; $k = 1, \ldots, r$,

где принято, что $y_0 = 1$. Тогда условие «$y_k = 1$» соответствует условию «$x \geqslant \delta_k$». Из ограничений следует, что $1 \geqslant y_1 \geqslant y_2 \ldots \ldots \geqslant y_r$ и каждая переменная z_k принимает только те значения, которые были указаны ранее.

Вводя в выражение для $L(x)$ булевы переменные, можно слегка видоизменить второй способ представления $L(x)$, с тем чтобы использовать его и в тех случаях, когда $L(x)$ не является непрерывной или определена на несмежных интервалах.

Если функция $L(x)$, аппроксимирующая $f(x)$, является *выпуклой* и в задаче требуется минимизировать $f(x)$, то выражение, имеющее вид $L(0) + \sum \alpha_k z_k$, обеспечивает приемлемое линейное представление $L(x)$ без введения булевой переменной y_k. Единственное требуемое при этом условие имеет вид

$$\delta_k - \delta_{k-1} \geqslant z_k \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Это следует из того факта, что $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k$, и определяется выпуклостью функции $L(x)$.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К настоящему времени разработано большое количество методов решения задач ЦП и специальных модификаций этих методов применительно к частным случаям. Однако почти все их можно описать на основе единой принципиальной схемы, обсуждая которую в дальнейшем мы рассмотрим в качестве конкретных иллюстраций некоторые наиболее распространенные методы ее реализации.

Методы решения задач ЦП, как правило, предусматривают процедуры формирования и решения последовательности взаимосвязанных задач, которые мы определим как задачи, *порожденные* исходной задачей. Каждой порожденной задаче ставится в соответствие определенная *ослабленная* задача, поддающаяся решению легче, чем соответствующая ей порожденная задача (в этом случае последняя называется задачей-истоком). Решение ослабленной задачи показывает, как следует поступить с ее истоком, т. е. можно ли его исключить или необходимо заменить одной или несколькими задачами, порождаемыми им самим (которые, таким образом, также обязаны своим происхождением исходной задаче). После этого выбирается одна из тех порожденных задач, которая еще не была либо исключена, либо заменена, и такой процесс повторяется до тех пор, пока ни одна из порожденных задач не останется нерассмотренной. Во многих методах (например, в методах отсечения) просмотр каждой задачи приводит к появлению точно одной порожденной задачи, хотя идентификация этой порожденной задачи обычно обеспечивается выбором из нескольких альтернатив.

Раскроем теперь сущность порожденных и ослабленных задач более содержательно и точно.

3.1. Порожденные задачи

Подобно тому как каждая ослабленная задача имеет свой исток, порожденной задаче соответствует породившая ее задача (т. е. непосредственно предшествующая ей задача, от которой «происходит» порожденная). Совокупность таких непосредственно порожденных задач должна обладать тем свойством, что оптимальное решение по крайней мере одной из задач этой совокупности такое же, как и породившей ее задачи. Если породившая задача имеет множество оптимальных решений, некоторое непустое подмножество этих оптимальных решений должно составлять множество оптимальных решений одной из порожденных задач.

Приведем два характерных примера порожденных задач, обладающих такими свойствами. В так называемом методе отсечения неравенства или уравнения ограничений, называемые отсечениями, выбираются так, чтобы они удовлетворялись при всех решениях породившей задачи. (Полезное отсечение обычно представляет собой ограничение, которое не должно удовлетворяться в оптимальной точке ослабленной задачи, решаемой вместо породившей задачи.) Затем эти ограничения добавляются к условиям породившей задачи, что приводит к появлению одной новой задачи, имеющей точно такое же множество оптимальных решений, как и задача, от которой она происходит.

В другом случае — в методе ветвей и границ — выводится совокупность таких неравенств (или равенств), каждое из которых предполагает некоторое подмножество допустимых решений породившей задачи, причем объединение этих подмножеств включает все ее допустимые решения. Каждое из выведенных неравенств, или предварительных отсечений, присоединяется к условиям породившей задачи независимо от других (так как заранее не известно, при каком из этих ограничений оптимальное решение соответствующей порожденной задачи будет допустимым решением породившей задачи). Это приводит к появлению совокупности порожденных задач, обладающих указанными ранее свойствами.

В других случаях (например, при использовании графотеоретических методов) к породившей задаче никаких условий не добавляется, однако на основе решения ослабленной задачи форма представления породившей задачи изменяется таким образом, чтобы можно было сформулировать одну порожденную задачу, для которой эта процедура повторяется.

3.2. Ослабленные задачи (т. е. задачи с ослабленными ограничениями)

Основной особенностью ослабленной задачи является то, что по сравнению с ограничениями задачи-истока ее ограничения являются менее жесткими, т. е. определяют более широкую (по крайней мере не меньшую) область допустимых решений. Нередко формулировка ослабленной задачи предусматривает только исключение некоторых из ограничений задачи-истока. Например, ослабленные задачи, используемые обычно в ЦП, представляют собой обыкновенные задачи ЛП (получаемые за счет отбрасывания требований целочисленности). Целевая функция ослабленной задачи также может отличаться от целевой функции задачи-истока при условии, что оптимальное значение первой не превосходит оптимального значения второй (если речь идет о задаче минимизации).

Указанные условия непосредственно приводят к следующему двустороннему неравенству: оптимальное значение целевой функции ослабленной задачи должно быть не больше ($\leqslant$) оптимального значения целевой функции задачи-истока, которое в свою очередь должно быть не больше ($\leqslant$) значения целевой функции задачи-истока при любом допустимом решении.

Отсюда следует, что всякий раз, когда можно найти решение, которое делает равными левую и правую части указанного двустороннего неравенства, средняя величина по необходимости становится равной двум крайним и оптимальное решение задачи-истока оказывается найденным.

В теории двойственности ЛП, НЛП и комбинаторного програм-

мирования используется такая особенность задачи, которая в соответствии с только что данным определением присуща ослабленной задаче и, следовательно, обусловливает выполнение указанного двустороннего ограничения. В теории двойственности каждого из указанных выше разделов математического программирования двойственная задача служит для определения наиболее жесткой из ослабленных задач, т. е. такой ослабленной задачи, которой в указанном выше двустороннем неравенстве соответствует наибольшее значение левой части неравенства.

Потенциальную возможность выполнения двустороннего ограничения в виде равенства предоставляет только наиболее жесткая ослабленная задача, которая поэтому служит средством для нахождения оптимального решения задачи-истока. (Однако даже наиболее жесткая ослабленная задача из числа тех, которые формулируются исходя из теории двойственности в конкретных областях математического программирования, может и не обеспечить выполнения такого равенства; результирующие условия для такого случая называются невязкой двойственности.)

С учетом этих замечаний все методы, которые охватываются рассмотренной принципиальной схемой, можно определить как методы, использующие двойственность, или *двойственные методы*. Действительно, одной из существенных особенностей этих методов является то, что они дают средства для решения задачи-истока даже в тех случаях, когда имеет место невязка двойственности. При использовании этих методов для решения задачи-истока, во-первых, осуществляется последовательная генерация порожденных задач и, во-вторых, используются следующие три полезные особенности ослабленных задач, соответствующих порожденным:

а) во всех случаях, когда ослабленная задача не имеет допустимого решения, его не имеет и задача-исток;

б) оптимальное значение целевой функции ослабленной задачи определяет нижнюю границу оптимального значения целевой функции задачи-истока;

в) если оптимальное решение ослабленной задачи соответствует равным значениям целевых функций задачи-истока и ослабленной задачи (что получается автоматически, если обе эти целевые функции одинаковы) и если это решение для задачи-истока является допустимым, то оно является также и ее оптимальным решением.

Следовательно, всякий раз, когда выполняются условия (а) или (в), процесс решения ослабленной задачи позволяет избежать решения задачи-истока и благодаря этому трудная цель (получение решения задачи-истока) достигается путем решения более легкой ослабленной задачи. Кроме того, если для оптимального значения целевой функции задачи-истока установлен «потолок»,

так что допустимый оптимум должен быть ниже этой границы (что, как правило, имеет место при использовании метода ветвей и границ), решение ослабленной задачи при выполнении условия (в) также «ликвидирует» задачу-исток, если только нижняя граница, задаваемая этим условием, не меньше установленного «потолка» для значения целевой функции задачи-истока.

Теперь, принимая во внимание эти соображения, можно построить общую операционную схему двойственных методов ЦЦ и комбинаторной оптимизации.

3.3. Двойственные методы: общая схема реализации

1. Начать со списка задач, который содержит в качестве единственного элемента исходную задачу.

2. Выбрать из списка задачу. (Если на данной стадии в списке нет задач, реализация метода на этом кончается и наилучшее из найденных до сих пор решений есть оптимальное решение исходной задачи. Если такие возможные решения не найдены, то исходная задача не имеет допустимого решения.)

3. Решить ослабленную задачу (или совокупность ослабленных задач), соответствующую выбранной задаче.

- Если ослабленная задача не имеет допустимого решения [ср. с условием (а)], исключить выбранную задачу из списка и вернуться к шагу 2.
- Если оптимальное значение целевой функции ослабленной задачи равно или больше значения целевой функции лучшего из найденных пока решений исходной задачи [ср. с условием (б)], исключить выбранную задачу из списка и вернуться к шагу 2.
- Если ни одна из перечисленных выше ситуаций не имеет места и оптимальное решение ослабленной задачи является оптимальным для выбранной задачи [ср. с условием (в)], проверить, будет ли это решение допустимым решением исходной задачи. (Для обычных методов ветвей и границ и методов отсечения в том виде, как они были описаны, такая проверка не требуется, так как при использовании этих методов множество допустимых решений каждой из выбранных задач является подмножеством допустимых решений исходной задачи.) Если допустимость этого решения для исходной задачи установлена, внести его в список в качестве нового возможного решения исходной задачи и вернуться к шагу 2.
- Если ни одна из перечисленных выше ситуаций не имеет места, рассмотреть выбранную задачу в качестве порождающей и сформулировать множество из одной или нескольких порожденных задач (используя отсечения, предварительные

отсечения, видоизмененное представление задачи и т. д.), с указанными ранее особенностями. Внести эти задачи в список (вместо породившей их задачи) и вернуться к шагу 2.

Полезно дать некоторые пояснения к изложенной схеме. Во-первых, на шаге 3 для получения ослабленных задач с последовательным усилением ограничений можно использовать стандартные процедуры. Эти процедуры относятся к ослабленным задачам, появление которых обусловлено такой заменой некоторого подмножества ограничений задачи-истока неотрицательной линейной комбинацией этих ограничений, при которой эта линейная комбинация либо вводится в целевую функцию, как это делается в обобщенном методе Лагранжа, либо применяется в виде одного или более составных ограничений, как в методах, использующих замещенные ограничения. (В дальнейшем оба этих метода будут рассмотрены более подробно.) Все эти методы формирования ослабленных задач с последовательным усилением ограничений основываются на одном из вариантов следующей простой процедуры:

а) решить очередную ослабленную задачу;

б) если это решение для задачи-истока недопустимо, определить подмножество нарушенных ограничений и подмножество ограничений, имеющих «запас» (чтобы по крайней мере одно из этих подмножеств не было пустым), и видоизменить ослабленную задачу путем увеличения весов линейных комбинаций, связанных с первым множеством, и уменьшения весов, связанных со вторым множеством. В пределах заданного множества это увеличение или уменьшение для каждого из ограничений может быть различным, однако результирующее изменение делается достаточно большим, с тем чтобы предыдущее решение ослабленной задачи стало неоптимальным для условий модифицированной ослабленной задачи. (Одним из примеров таких методов является метод Франка — Вулфа [19, 43].) Многие методы штрафных функций для задач нелинейного программирования используют, по существу, ту же самую процедуру, за исключением того, что веса могут быть приписаны функциям, отличным от линейных.

В качестве другого пояснения к схеме следует указать на то обстоятельство, что на шаге 2 или 3 можно воспользоваться эвристическими методами получения пробных решений выбранной задачи, после чего можно проверить, обеспечивают ли они улучшение возможных решений исходной задачи.

В схеме реализации двойственных методов, помимо указанной, имеются еще три основные процедуры, связанные с выбором: 1) следующей задачи из списка, 2) ослабленной задачи (или совокупности таких задач) для заданной задачи-истока, 3) отсечения или множества предварительных отсечений, необходимых для получения новых порожденных задач. Каждый из этих моментов

выбора оказывает решающее влияние на эффективность реализации схемы [4, 20, 22, 52, 53, 55, 58].

Следует также подчеркнуть, что если при выборе метода реализации схемы предпочтение без должных оснований отдается методу ветвей и границ, а не методу отсечения, что случается довольно часто, то предварительные отсечения должны быть намного сильнее (более глубокими) по сравнению с обычными отсечениями. Это связано с тем, что использование предварительных отсечений приводит к появлению двух или большего числа задач, порождаемых каждой данной задачей. Поэтому, чтобы использование метода ветвей и границ не давало проигрыша в общем времени решения исходной задачи, порождаемые задачи должны решаться легче, чем единственная порождаемая задача, появляющаяся при использовании метода отсечения. Однако метод ветвей и границ имеет одно преимущество, которое можно реализовать даже в том случае, если некоторые из предварительных отсечений сравнительно слабые, но при условии, что некоторые из них являются достаточно глубокими. Это преимущество заключается в следующем. Если получение оптимального решения исходной задачи требует чрезмерных затрат машинного времени, то, несмотря на это неблагоприятное обстоятельство, с помощью метода ветвей и границ, уже на начальной стадии расчетов могут быть найдены сравнительно хорошие решения исходной задачи. Благодаря этому расчеты можно прекратить в любой подходящий момент и наилучшее из найденных к этому времени решений использовать вместо потенциально достижимого оптимума.

3.4. Включение прямых и прямо-двойственных методов в общую операционную схему двойственных методов

Рассмотренной схемой не был охвачен класс так называемых прямых методов. Тем не менее эти методы характеризуются достаточно просто, и их можно включить в данную схему в качестве альтернативных средств получения пробных решений задачи, выбираемой на шаге 2, или как средств улучшения возможного решения, получаемого на шаге 3, и в отдельных случаях даже как средств решения ослабленной задачи или соответствующей ей задачи-истока.

Методы, относящиеся к классу прямых, основаны на получении последовательности допустимых решений, каждое из которых лучше (или не хуже), чем предшествующее решение. Характерная черта стратегии прямых методов состоит в том, что в них используются все ограничения задачи-истока и ряд дополнительных ограничений, требующих, чтобы новые допустимые решения были примерно такие же, как допустимое решение задачи-истока. (Так, дополнительные ограничения прямого симплекс-метода требуют,

чтобы все текущие небазисные переменные, за исключением одной, равнялись 0, и тем самым допускается лишь весьма «ограниченное» отличие нового решения от решения, определяемого текущим базисом. Аналогично в прямом методе отыскания максимального потока все изменения потока ограничиваются таким образом, чтобы они проявлялись лишь на некотором элементарном пути, который на данной итерации обладает положительной результирующей пропускной способностью (это также обусловливает близость измененного и текущего решений). Полученная задача, сформулированная при более благоприятных ограничениях, как правило, поддается решению намного легче, чем ее исток (точно так же, как составленную надлежащим образом ослабленную задачу решить намного проще, чем ее задачу-исток), и всегда при этом получается допустимое решение, которое лучше, или по крайней мере не хуже, чем уже найденное текущее решение.

В целочисленном программировании осуществить реализацию прямых методов, гарантирующих получение оптимального решения, намного сложнее, чем в ЛП [44, 62—64], однако принципиальная основа их стратегии для решения задач ЦП все же может считаться приемлемой. Прямые методы ЦП являются, по существу, прямо-двойственными методами, поскольку их можно рассматривать как сочетание процедур ослабления задачи и формирования ее ограничений.

Преобразование рассмотренной ранее операционной схемы двойственных методов в общую принципиальную схему, охватывающую как прямые, так и прямо-двойственные методы, достигается простым включением процедур, присущих прямым методам, в шаг 3 этой схемы. Кроме того, в рамках стратегии прямых методов отсечения (и предварительные отсечения) могут осуществляться таким образом, чтобы была обеспечена приемлемость этих отсечений и для задачи-истока. В частности, границы сечений, определяемые в процессе последовательного рассмотрения порожденных задач при использовании прямого метода, должны быть установлены с учетом ограничений задачи-истока. (Фактически в этом и заключается один из способов интерпретации известных прямых методов ЦП). Таким образом, определение границ сечений или предварительных сечений для формирования условий порождаемых задач можно осуществить, включая стратегию прямых методов в общую операционную схему прямо-двойственных методов.

3.5. Несколько примеров конкретных методов

Чтобы дать более ясное представление о том, как можно применить описанную схему, рассмотрим в качестве примеров некоторые из наиболее распространенных методов, реализующих эту схему в различных вариантах.

3.5.1. Метод отсекающих плоскостей. Для полностью целочисленных задач ЦП, в которых все переменные имеют целочисленные значения, обычно используется метод, разработанный Гомори [31]. Уравнение, получаемое из симплекс-таблицы ЛП, представленной в форме, которая была предложена Таккером (см. гл. II-1), можно записать в виде

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j \in N} a_{ij}(-t_j),$$

где x_i — целочисленная переменная и t_j, $j \in N$,— текущие небазисные переменные, относительно значений которых принимается условие неотрицательности и целочисленности. Уравнение отсекающей гиперплоскости, получаемое из предыдущего уравнения, имеет вид

$$S = -f_{i0} - \sum_{j \in N} f_{ij}(-t_j),$$

где S — неотрицательная целочисленная переменная, а константа f_{ij} — положительная дробная часть константы a_{ij}, т. е. $f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$, где $[a_{ij}]$ — наибольшее целое число, не превосходящее величины, стоящей в скобках. Так как переменная x_i не обязательно должна быть неотрицательной, уравнение отсекающей гиперплоскости может быть выведено из любого уравнения, получаемого в виде некоторой линейной комбинации уравнений симплекс-таблицы.

Стандартный способ использования таких отсечений в рамках общей операционной схемы расчетов заключается в том, что в качестве ослабленной задачи на шаге 3 выбирается обычная задача ЛП (разд. 3.3). При этом границы сечения устанавливаются из уравнения, в котором a_{i0} не являются целым числом (следовательно, $f_{i0} > 0$); тем самым обусловливается появление одной порожденной задачи (имеющей такое же множество допустимых решений, как и порождающая ее задача). Для каждой последующей порожденной задачи, выбранной на шаге 2, решение соответствующей ослабленной задачи ЛП осуществляется на шаге 3 путем «дооптимизации» с использованием ДСМ.

В последнее время в теорию отсечений были внесены некоторые усовершенствования, связанные с применением субаддитивных функций [11, 33—35, 46] и выпуклых областей специальной конфигурации [2, 4, 10, 27, 45, 61]. Углубление сечений, достигаемое при использовании этих усовершенствований, может обеспечить более эффективную реализацию методов отсечения.

3.5.2. Метод ветвей и границ. Простой алгоритм метода ветвей и границ, довольно успешно применяющийся при решении некоторых частично целочисленных задач, базируется на ветвящейся схеме Дейкина [16], в которой на шаге 3, соответствующем общей

схеме, в качестве ослабленной задачи также формулируется обычная задача ЛП. При таком подходе исходная задача порождает две задачи, формулировка которых связана с изменением ограничений, накладываемых на целочисленную переменную x_i, текущая величина которой x_i^* в линейном решении исходной задачи не имеет целочисленного значения. Эти две порожденные задачи формулируются путем независимого добавления к условиям исходной задачи двух ограничений: $x_i \leqslant [x_i^*]$ и $x_i \geqslant [x_i^*] + 1$.

В более совершенных алгоритмах метода ветвей и границ используется исчисление штрафов, назначаемых исходя из решений ослабленных задач, которые могут отличаться от задач ЛП. Такие штрафы устанавливают нижнюю границу разности оптимальных значений целевых функций порожденной и породившей задач при введении ограничений $x_i \leqslant [x_i^*]$ или $x_i^* \geqslant [x_i^*] + 1$. Это позволяет сразу же исключить некоторые порожденные задачи, а другие внести в конец списка задач в качестве маловероятных претендентов на получение улучшенного решения исходной задачи.

Обсудим теперь отдельные виды ослабленных задач, решения которых можно использовать при исчислении штрафов в процессе реализации метода ветвей и границ и в других случаях.

3.5.3. Построение ослабленных задач. Возможно, наиболее общим способом ослабления задачи является ослабление с помощью обобщенного метода Лагранжа, при котором некоторое подмножество ограничений задачи накладывается на целевую функцию.

Для построения модифицированной целевой функции метод Лагранжа предусматривает приписывание подмножеству неравенств-ограничений задачи (обозначаемому, например, индексом P) некоторых неотрицательных весов u_i. При использовании обозначений, принятых ранее в формулировках задач ЛП и ЦП, новая задача принимает вид

$$\text{минимизировать } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i \in P} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right).$$

Таким образом, накладываемые на целевую функцию ограничения исключаются из множества ограничений ослабленной задачи. При решении задач ЛП с помощью симплекс-метода коэффициенты видоизмененной целевой функции появляются аналогичным образом (при этом «поднятые» ограничения соответствуют ограничениям, связанным с небазисными переменными). Фактически на таком способе ослабления базируется теория двойственности большинства разделов математического программирования, поэтому глубина соответствующих отсечений действительно

очень велика. Различные варианты применения указанного метода рассмотрены в работах [17, 18, 22, 40, 54].

Второй способ ослабления задачи, также нашедший широкое применение в ЦП, состоит в использовании «замещенных ограничений». Он базируется на замене подмножеств заданных ограничений задачи одним или несколькими замещенными ограничениями. Такое замещенное ограничение можно построить, вводя некоторые неотрицательные веса u_i, $i \in P$, точно так же, как и при использовании метода Лагранжа (хотя *значения* этих весов, которые дают наиболее сильное ослабление, в рассматриваемых методах обычно бывают различными). Целевая функция исходной задачи остается при этом неизменной, но ограничения, входящие в подмножество P, заменяются ограничениями вида

$$\sum_{i \in P} u_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant \sum_{i \in P}^{n} u_i b_i.$$

Несмотря на начальный этап соответствующих исследований [1, 21, 25], ослабление с помощью замещенных ограничений обеспечивает в отдельных случаях более сильные штрафы, чем метод Лагранжа, и в связи с ослаблениями такого вида возникает вопрос о новой теории двойственности математического программирования [27, 36, 37], которая может привести к более широкому использованию этих методов. Применение методов «укладки» ранца для решения задач более общего вида, чем задача о ранце, осуществляется преимущественно в рамках такой постановки.

Третий из обычно используемых способов ослабления задачи основан на применении теоретико-группового подхода и предусматривает снятие условий неотрицательности переменных, входящих в оптимальное решение задачи ЛП, и сохранение всех условий целочисленности. Этот способ фактически можно рассматривать как частный случай ослабления с помощью обобщенного метода Лагранжа. Однако он представляет особый интерес благодаря обеспечиваемым им теоретико-групповым построениям. Исследованиям этого способа ослабления посвящены работы [33—35, 44, 54].

Итак, концепция двойственности объединяет обобщенный метод Лагранжа и метод замещенных ограничений, а также их элементы в единую схему [27]; различные сочетания этих подходов уже находят практическое применение [52].

3.5.4. Практические аспекты. Необходимо сделать ряд замечаний относительно некоторых практических аспектов решения задач ЦП и принятия соответствующих мер предосторожности.

Прежде всего следует отметить, что трудности, возникающие при решении отдельных задач ЦП, обусловлены, по-видимому, самой сущностью таких задач безотносительно к используемому

методу решения. Поэтому, хотя такие простые методы, как, например, округление решения, могут быть совершенно бесполезными для этих задач, может оказаться, что нет и никакого другого метода (известного в настоящее время), обеспечивающего получение оптимального или даже допустимого целочисленного решения за приемлемый отрезок времени.

Во-вторых, даже в тех случаях, когда такие задачи можно успешно решить с помощью имеющихся методов ЦП, весьма полезно проявить осторожность и критически оценить истинную оптимальность полученного оптимального решения. Реальные процессы, которые пытаются моделировать, формулируя задачи ЦП, могут быть намного сложнее, и, даже полностью отвлекаясь от вопроса о достоверности исходных данных, легко упустить из виду определенные аспекты реальных проблем, которые следовало бы отразить в ограничениях или целевой функции модели. В таких случаях решение задачи ЦП может быть неоптимальным, если не предпринимаются меры предосторожности для того, чтобы удостовериться в соответствии получаемого решения фактическим характеристикам моделируемого процесса. Но положительным моментом здесь является то, что получение абсурдных или неприемлемых оптимальных решений открывает конструктивный путь выявления некорректных допущений и неточной информации, использованных при построении модели, а устранение этих недостатков позволяет разработать более совершенную модель.

4. ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОБЛАДАЮЩИЕ ОСОБЫМИ СВОЙСТВАМИ

Некоторые задачи ЦП, например классические транспортная задача и задача о назначениях, рассматриваемые во многих учебниках по ЛП, обладают той особенностью, что их решение в рамках ЛП или, точнее, каждая экстремальная точка области допустимых решений естественным образом определяется целочисленными значениями переменных. Следовательно, для решения таких задач вполне достаточно использовать стандартные методы ЛП и отпадает необходимость в применении специальных методов ЦП.

Но имеются и другие задачи ЦП с весьма специфическими характеристиками, не обладающие, однако, свойством целочисленности экстремальных решений. Большинство задач, рассмотренных ранее в данной главе, относится именно к таким задачам. Применительно к этим классам задач методы ЛП в общем случае не обеспечивают получения целочисленного решения, и необходим поиск других подходов. Каким образом, исходя из специфических особенностей задачи, выбрать самый подходящий метод ее решения? Ответить на этот вопрос очень трудно, и, к сожалению, проблема определения целесообразных сочетаний «метод ЦП — структура задачи»

изучена намного слабее, чем хотелось бы. Тем не менее в этом вопросе нет полной неопределенности, и в процессе исследований постепенно вырабатываются соответствующие рекомендации [22, 24, 48, 52, 55, 59]. Однако к этим рекомендациям следует относиться осторожно, так как методы, которые при одной постановке сначала представляются неэффективными, оказываются иногда гораздо более продуктивными либо после их незначительной модификации, либо при использовании в несколько другом направлении. Но рассматриваемый вопрос о соответствии методов решения особенностям задачи имеет и ряд других аспектов. Некоторые задачи можно сформулировать в виде задач ЦП несколькими способами, и задачу, представляющуюся почти неразрешимой в одной формулировке, можно легко решить в другой постановке. С результатами таких исследований, проведенных в последнее время, можно познакомиться в работах [18, 24, 28, 55, 59, 60].

Еще более принципиальным дискуссионным вопросом при анализе отдельных задач является вопрос о том, следует ли их вообще формулировать как задачи ЦП. По существу, любую задачу математического программирования, функции которой отображаются в области действительных чисел, можно с любой степенью приближения (если не абсолютно точно) сформулировать в виде соответствующей задачи ЦП. Однако уместно поставить вопрос о том, стоит ли формулировать такую «искусственную» задачу ЦП или же лучше решать ее в «естественном» виде, используя специально разработанный метод. Чтобы усложнить рассматриваемую проблему, можно поставить и другой, более трудный вопрос: какие факторы определяют, является ли данная формулировка задачи естественной или искусственной? Отчасти этот вопрос решается эмпирически; новый алгоритм может сделать искусственную формулировку естественной, если с его помощью задача в данной постановке будет легко поддаваться решению. Заметный прогресс в этой области обеспечивают специальные методы решения, разработанные применительно к задачам с решетчатой структурой и дизъюнктивным задачам [13, 47, 48].

С другой стороны, очевидно, что при решении вопроса о том, является ли данная формулировка задачи естественной или нет, нельзя не учитывать изменения размерности задачи. Многие задачи НЛП и комбинаторной оптимизации при постановке их в виде задач ЦП имеют тенденцию к «разбуханию». Задачи НЛП и комбинаторной оптимизации, содержащие небольшое количество параметров и ограничений, будучи сформулированными в виде задач ЦП, могут легко превратиться в задачи с огромным числом переменных и ограничений. Однако и в данном случае следует проявлять осторожность: совсем не очевидно, что большая размерность задачи должна рассматриваться как «пугало», в качестве которого она иногда и воспринимается. Нередко «разбуханию»

задачи сопутствует соответствующее уменьшение ее «плотности», т. е. матрица условий для такой «разбухшей» задачи ЦП обычно оказывается заполненной очень слабо и содержит лишь небольшое число ненулевых элементов. Разработка специальных вычислительных методов, ориентированных на операции с такими разреженными матрицами, которая в последние годы осуществлялась очень интенсивно, может в ближайшем будущем в определенной степени изменить существующие представления о непреодолимых трудностях решения отдельных классов задач ЦП, имеющих большую размерность. В особенности это относится к задачам, включающим вложенные сети, что обусловлено значительным прогрессом, достигнутым в последнее время в области вычислительных методов для сетевых задач [14, 30].

В свою очередь структурные особенности задачи часто инициируют разработку специальных подходов, ориентированных на использование этих особенностей. Общеизвестно, что почти всегда найдется специальный метод решения, который окажется для данной задачи более эффективным, чем общий метод решения. (И здесь также можно сослаться на приложения, связанные с вложенными сетями). Фактически же общий метод, адаптированный применительно к структурным особенностям задачи, обычно представляет пример более эффективного специального метода. Нередко специальные методы, разработанные для комбинаторных (и даже отдельных нелинейных) задач, на самом деле оказываются лишь улучшенной модификацией более общих методов ЦП.

В заключение следует указать еще на одну бесспорно важную область исследования задач ЦП — построение эвристических методов их решения. Важность этого направления, постоянно открытого для новых разработок и совершенствования, оказалась упущенной из вида в поспешном стремлении к разработке более надежных и строго формализованных методов. В настоящем контексте под эвристическими методами подразумеваются схемы получения «хороших» решений, являющиеся результатом творческого мышления. Такие схемы обычно не гарантируют оптимальных решений и в конечном счете даже *какого-либо* решения. Систематический учет и накопление характерных свойств продуктивных эвристических методов — весьма нелегкая задача; тем не менее можно указать на ряд попыток, предпринятых в этом направлении [8, 15, 26, 41].

В практических ситуациях математическая гарантия сходимости к оптимальному решению за конечное число итераций равносильна обещанию, что решение будет получено за день до второго пришествия (если оптимистически оценивать возможности решения некоторых задач ЦП). Следовательно, можно точно отразить суть вопроса, сказав, что эффективность конкретного алгоритма зависит от его эвристической насыщенности. Такая точка зрения.

кажется, постепенно завоевывает общее признание, и поэтому можно надеяться, что интенсивные поиски принципов построения эвристических алгоритмов все же откроют путь к эффективному применению ЦП в той пока еще недоступной области, которая в настоящее время считается областью почти неразрешимых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Balas Egon. Discrete Programming by the Filter Method, *Operations Res.*, **19**, 915–957 (1967).
2. Balas Egon, The Intersection Cut—A New Cutting Plane for Integer Programming, *Operations Res.*, **19**, 19–39 (1970).
3. Balas Egon, Integer Programming and Convex Analysis, Intersection Cuts from Outer Polars, *Math. Prog.*, **2**, 330—382 (1972).
4. Balas Egon, On the Use of Intersection Cuts in Branch and Bound, paper presented at the Eighth International Symposium on Mathematical Programming, Stanford, August 1973.
5. Beale E. M. L., Sparseness in Linear Programming, in Large Sparse Sets of Linear Equations, Ed. J. K. Reid, Academic Press, London, 1971, pp. 1—15.
6. Benders J. F., Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems, *Numerische Mathematik*, **4**, 238—252 (1962).
7. Bowman V. J., Nemhauser G. L., Deep Cuts in Integer Programming, *Opsearch*, 8, 89—111 (1971).
8. Bradley G. H., Heuristic Solution Methods and Transformed Integer Linear Programming Problems, Yale Report No. 43, March 1971.
9. Bradley G. H., Hammer P. L., Wolsey L. A., Coefficient Reduction for Inequalities in 0—1 Variables, *Math. Prog.*, **7**, 263—282 (1974).
10. Burdet C. A., Polaroids: A New Tool in Non-Convex and in Integer Programming, *Nav. Res. Log. Quart.*, **20**, 13—24 (1973).
11. Burdet C. A., Johnson E. L., A Subadditive Approach to the Group Problem of Integer Programming, released by the Mathematical Sciences Department, IBM Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, September 1973.
12. Cabot V. A., An Enumeration Algorithm for Knapsack Problems, *Operations Res.*, 18, 306—311 (1970).
13. Cabot V. A., Hurter A. P., An Approach to 0—1 Integer Programming, *Operations Res.*, 16, 1206—1211 (1968).
14. Charnes A. Glover F., Karney D., Klingman D., Stutz J., Past, Present and Future of Development, Computational Efficiency, and Practical Use of Large-Scale Transportation and Transhipment Computer Codes, *Computers and Operations Research*, **2**, 71—82 (1975).
15. Cooper L., Drebes C., Investigations in Integer Linear Programming by Direct Search Methods, Report No. COO-1493-10, Washington University, 1967.
16. Dakin R. J., A Tree Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems, *Computer J.*, 8, 250—255 (1965).
17. Everett H., Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources, *Operations Res.*, **11**, 399—417 (1963).
18. Fisher M. L., Shapiro J. F., Constructive Duality in Integer Programming, *SIAM J. Appl. Math.*, **27**, 31—52 (1974).
19. Frank M., Wolfe P., An Algorithm for Quadratic Programming, *Nav. Res. Log. Quart.*, 3, 95—110 (1956).

20. Garfinkel R. S., Nemhauser G. L., Integer Programming, Wiley, New York, 1972.
21. Geoffrion A. M., An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming, *Operations Res.*, **17**, 437—454 (1969).
22. Geoffrion A. M., Lagrangean Relaxation for Integer Programming, *Math. Programming Study*, **2**, 82—114 (1974).
23. Geoffrion A. M., Duality in Nonlinear Programming, *SIAM Rev.*, **13-1**, 1—37 (January 1971).
24. Geoffrion A. M., Marsten R. E., Integer Programming Algorithms, A Framework and State-of-the-Art Survey, *Management Sci.*, **18**, 465—491 (1972).
25. Glover F., Surrogate Constraints, *Operations Res.*, **16**, 741—749 (1968).
26. Glover F., Heuristics for Integer Programming Using Surrogate Constraints, *Decision Sciences*, **8**, 156—166 (1977).
27. Glover F., Convexity Cuts and Cut Search, December 1969, опубликовано в *Operations Res.*, **21**, 123—134 (1973).
28. Glover F., Improved Linear Representations of Nonlinear Integer, *Management Sci.*, **22**, 455—460 (1975).
29. Glover F., Surrogate Constraint Duality in Mathematical Programming, *Operations Res.*, **23**, 434—451 (1975).
30. Glover F., Karney D., Klingman D., Napier A., A Computation Study on Start Procedures, Basis Change Criteria, and Solution Algorithms for Transportation Problems, *Management Sci.*, **20**, 793—813 (1974).
31. Gomory E. E., An Algorithm for Integer Solutions for Linear Programs, in Recent Advances in Mathematical Programming, R. L. Graves, P. Wolfe, eds., McGraw-Hill, 1963, pp. 269—302.
32. Gomory R. E., An Algorithm for the Mixed Integer Problem, RM-2597, RAND Corporation, 1960.
33. Gomory R. E., Faces of an Integer Polyhedron, *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, **57**, 16—18 (1967).
34. Gomory E. E., Johnson E. L., Some Continuous Functions Related to Corner Polyhedra, *Math. Prog.*, **3**, 23—85 (1972).
35. Gomory E. E., Johnson E. L., Some Continuous Functions Related to Corner Polyhedra, II, *Math. Prog.*, **3**, 359—389 (1972).
36. Greenberg H. J., The Generalized Penalty Function Surrogate Model, *Operations Res.*, **21**, 162—178 (1973).
37. Greenberg H. J., Pierskalla W. P., Surrogate Mathematical Programs, *Operations Res.*, **18**, 924—939 (1970).
38. Hammer P. L., Rudeanu S., Boolean Methods in Operations Research and Related Areas, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg—New York, 1968.
39. Hammer P. L., Johnson E. L., Peled U. N., Facets of Regular 0—1 Polytopes, *Math. Prog.*, **8**, 179—206 (1975).
40. Held M., Karp R. M., The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees, *Operations Res.*, **18**, 1138—1162 (1970).
41. Hillier F. S., Efficient Heuristic Procedures for Integer Linear Programming with an Interior, *Operations Res.*, **17**, 600—637 (1969).
42. Hillier F. S., A Bound-and-Scan Algorithm for Pure Integer Linear Programming with General Variables, *Operations Res.*, **17**, 638—679 (1969).
43. Hogan W. W., Convergence Results for Some Extensions of the Frank-Wolfe Method, Working Paper No. 169, Western Management Science Institute, University of California, Los Angeles, January 1971.
44. Hu T. C., Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley, 1969. [Имеется перевод: Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.]
45. Jeroslow R. G., The Either-Or Cut from Convex Domains, Carnegie-Mellon University, September 1973.
46. Jeroslow R. G., The Principles of Cutting-Plane Theory, Part I, preliminary report, Carnegie-Mellon University, February 1974.

47. Klingman D., Glover F., The Generalized Lattice Point Problem, *Operations Res.*, 21, 141-156 (1973).
48. Klingman D., Glover F., Stutz J., The Disjunctive Facet Problem, Formulation and Solution Techniques, *Management Sci.*, 22, 582—601 (1974).
49. McDaniel D., Devine M., Alternative Benders-Based Partitioning Procedures for Mixed Integer Programming, School of Industrial Engineering, University of Oklahoma, May 1973.
50. Lemke C. E., Spielberg K., Direct Search Zero-One and Mixed Integer Programming, *Operations Res.*, 15, 892—914 (1967).
51. Padberg, M. W., Equivalent Knapsack-type Formulations of Bounded Integer Linear Programs, Management Sciences Research Report No. 227, Carnegie-Mellon University, September 1970.
52. Ross T., Glover F., Strong Penalty Calculations for a Class of 0—1 Programs, MSRS 74—5, University of Colorado, April 1974.
53. Salkin H. M., On the Merit of the Generalized Origin and Restarts in Implicit Enumeration, *Operations Res.*, 18, 549—554 (1970).
54. Shapiro J. F., Generalized Lagrange Multipliers in Integer Programming, *Operations Res.*, 19, 68—76 (1971).
55. Sommer D., Computational Experience with the Ophelie Mixed Integer Code, Control Data Corp., Minneapolis, May 1972.
56. Sommer D., Glover F., Pitfalls of Rounding in Discrete Management Decision Problems, *Decision Sciences*, 6, 211—220 (1975).
57. Tomlin J. A., An Improved Branch and Bound Method for Integer Programming, *Operations Res.*, 19, 1070—1075, July—August 1971.
58. Tomlin J. A., Survey of Computational Methods for Solving Large Scale Systems, Technical Report 72—25, Department of Operations Research, Stanford University, October 1972.
59. Williams A. C., Some Modeling Principles for MIP's paper presented at the VIII International Symposium on Mathematical Programming, Stanford University, August 1973, Mobil Oil Corp., Princeton, N. J.
60. Williams H. P., Experiments in the Formulation of Integer Programming Problems, *Math. Programming Study*, 2, 180—197 (1974).
61. Young R. D., Hypercylindrically Deduced Cuts in Zero-One Integer Programming, *Operations Res.*, 19, 1393—1405 (1971).
62. Young R. D., A Primal (All-Integer) Integer Programming Algorithm, *J. of Res., Nat. Bureau of Stand. Section B, Math. and Mathematical Physic*, 69B (3), 213—250 (July—September 1965).
63. Young R. D., A Simplified Primal (All-Integer) Integer Programming Algorithm, *Operations Res.*, 16, 750—782 (1968).
64. Zionts S., Linear and Integer Programming, Prentice-Hall, 1974.

II-3. Теория графов: некоторые методы и приложения

Т. Саати[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

Основу научной дисциплины, называемой теорией графов, составляет совокупность методов и представлений, сформировавшихся при решении конкретных задач. Однако, хотя эту дисциплину иногда и склонны рассматривать как теорию в истинном смысле, целостной теории она не представляет. Возможно, некоторые факты из истории развития теории графов помогут пояснить такую точку зрения.

Теория графов зародилась в восемнадцатом столетии в прусском городе Кенигсберге, жителей которого интересовал вопрос: можно ли в их городе совершить прогулку по замкнутому маршруту, проходя по каждому из семи мостов один и только один раз? Известный математик Эйлер математически сформулировал и решил эту задачу. Его решение (дающее для данной задачи отрицательный ответ) мы рассмотрим позднее.

В девятнадцатом столетии в Англии возникла другая трудноразрешимая математическая задача, имеющая прямое отношение к теории графов. Это задача о четырех красках: достаточно ли четырех цветов для такой раскраски карты, нанесенной на плоскость или сферу, чтобы на ней не оказалось двух смежных областей одинакового цвета? Эта задача была решена совсем недавно. Ниже мы рассмотрим ее более подробно.

В двадцатом столетии теория графов прошла определенные стадии формирования и после выхода в свет в 1930 г. книги Кенига [24] была признана самостоятельной дисциплиной.

Используя простую терминологию, можно сказать, что граф характеризует отношения между множествами объектов, и теория графов направлена на исследование некоторых из многих возможных в заданном представлении свойств этих объектов. Более строго, граф есть совокупность точек и линий, соединяющих эти точки. Эти соединения могут обладать многими характеристиками, и теория графов, по существу, занимается изучением этих характеристик. Заметим, что граф, определенный подобным образом, не является разновидностью графических изображений, встречающихся в книгах по аналитической геометрии и математическому анализу, где положение точки, наклон и длина линий

[1)] Thomas L Saaty, University of Pennsylvania.

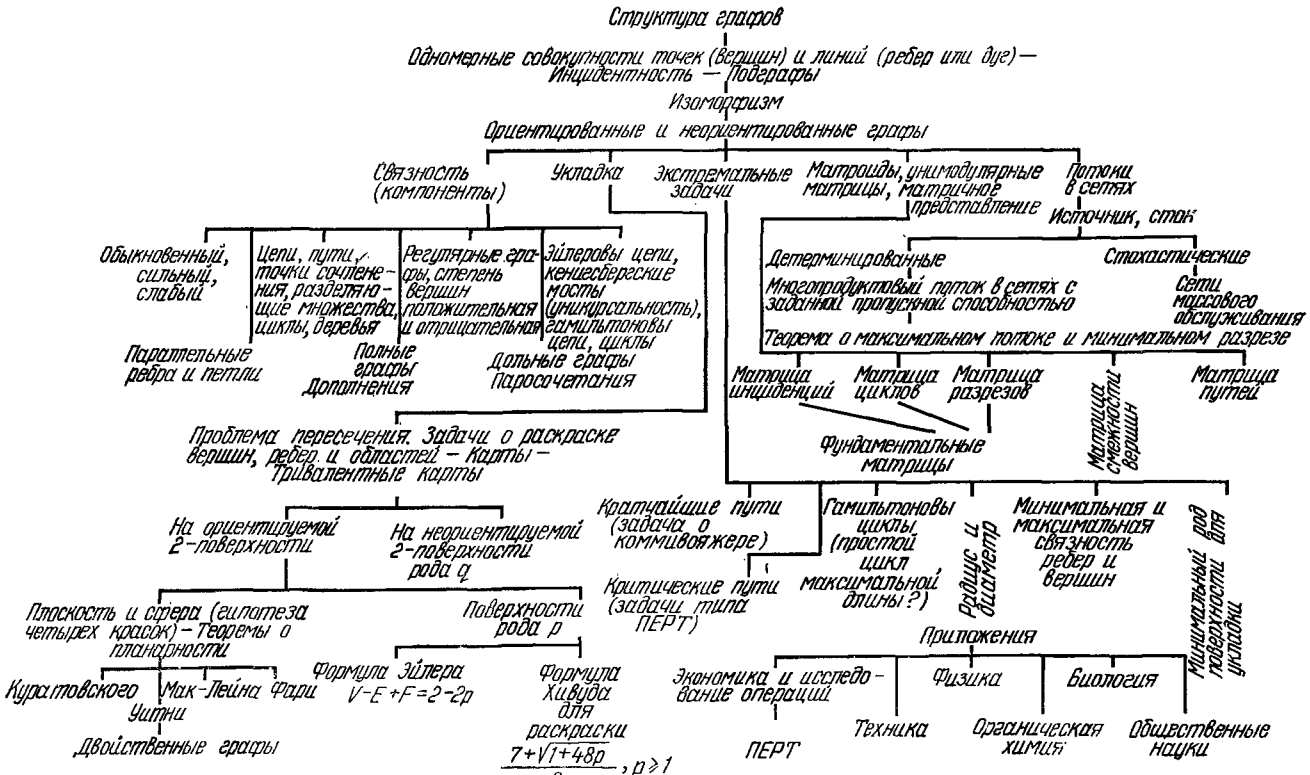
играют весьма важную роль. Здесь мы имеем дело с более свободной формой, причем основное внимание уделяется тому, связаны ли точки между собой. В некоторых случаях важен также и порядок их соединения.

Вследствие общего характера представлений теории графов ее основные концепции нашли широкую сферу применения. В настоящее время графы используются для формализованной постановки множества задач, связанных с дискретным размещением объектов. К ним, в частности, относятся [4]: проектирование и исследование сетей связи, анализ электрических сетей, анализ печатных схем, графы потока сигналов и теория обратной связи, задачи проектирования электрических и монтажных схем, блок-схемы программ, исследование автоматов, анализ и синтез логических цепей, задачи календарного планирования, максимизация производительности поточной линии, планирование и обеспечение материально-технического снабжения, поиск информации, теория информации, стратегия инвестиций, анализ качества, исследование движения транспорта, размещение предприятий коммунального обслуживания, моделирование, служебная переписка, экономические задачи, чувствительность структур, теория игр, генетика, биология, исследование поведения индивидуумов, головоломки, генеалогия, архитектура, влияние ветра на траекторию полета, задача Изинга, кристаллография, тайнопись, диаграммы Фейнмана, определение химического состава, механизм химических реакций, доказательство теорем.

Помимо того что теория графов полезна во всех этих областях применения, она интересна сама по себе, так как выдвигает множество нерешенных задач, которые легко понять начинающим математикам и непрофессионалам, но решение которых весьма проблематично и затруднительно даже для специалистов в этой области.

В теории графов сталкиваются главным образом с двумя формулировками задач. В первом случае требуется ответить на вопрос, существуют ли объекты, обладающие определенным свойством, и если да, то сколько их или каково их максимальное количество. В другом случае нужно определить, как построить граф или подграф, обладающий некоторым свойством. Иногда задаются условия, которым должен удовлетворять тот или иной граф, чтобы обладать определенными свойствами. Мы проиллюстрируем это позднее.

В настоящее время широким фронтом развернуты исследования по всем направлениям данной дисциплины. Теоретической комбинаторике и теории графов посвящен специальный журнал (Journal of Combinatorial Theory, Academic Press). Регулярно публикуются сборники материалов симпозиумов. Список литературы к настоящей главе ограничивается в основном книгами, так как в против-


Структура графов
Одномерные совокупности точек (вершин) и линий (ребер или дуг) — Инцидентность — Подграфы
Изоморфизм
Ориентированные и неориентированные графы
Связность (компоненты)
Укладка
Экстремальные задачи
Матроиды, унимодулярные матрицы, матричное представление
Потоки в сетях
Источник, сток
Обыкновенный, сильный, слабый
Цепи, пути, точки сочленения, разделяющие множества, циклы, деревья
Регулярные графы, степень вершин положительная и отрицательная
Эйлеровы цепи, кенигсберские мосты (инцидентность), гамильтоновы цепи, циклы
Паралельные ребра и петли
Полные графы Дополнения
Дольные графы Паросочетания
Детерминированные
Стохастические
Многопродуктовый поток в сетях с заданной пропускной способностью
Сети массового обслуживания
Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе
Матрица инцидентий
Матрица циклов
Матрица разрезов
Матрица смежности вершин
Матрица путей
Фундаментальные матрицы
Проблема пересечения. Задачи о раскраске вершин, ребер и областей — Карты — Тривалентные карты
Кратчайшие пути (задача о коммивояжере)
Гамильтоновы циклы (простой цикл максимальной длины?)
Радиус и диаметр
Минимальная и максимальная связность ребер и вершин
Минимальный род поверхности для укладки
На ориентируемой 2-поверхности
На неориентируемой 2-поверхности рода q
Критические пути (задачи типа ПЕРТ)
Приложения
Плоскость и сфера (гипотеза четырех красок) — Теоремы о планарности
Поверхности рода p
Куратовского
Мак-Лейна
Фари
Уитни
Формула Эйлера $V-E+F=2-2p$
Формула Хивуда для раскраски $\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}, p\geq 1$
Двойственные графы
Экономика и исследование операций
Физика
Биология
ПЕРТ
Техника
Органическая химия
Общественные науки

ном случае было бы невозможно уделить должное внимание всем имеющимся публикациям. Хорошо подобранная библиография приведена в книге Харари [18].

Чтобы дать читателю возможность взглянуть на предмет в целом, мы попытались представить основные направления теории графов в виде структурной схемы (стр. 155). Некоторые из указанных направлений обсуждаются ниже. Многие направления не рассматриваются вообще, так как из-за ограниченного объема данной главы одно лишь упоминание о них без обсуждения, по существу, было бы нецелесообразным. Сжатое изложение предмета в целом представляется весьма затруднительным, поэтому внимание сфокусировано главным образом на отдельных наиболее существенных моментах каждого из основных направлений, представленных на схеме. Тем не менее мы указали на ней и те области исследования, которые в данной главе подробно не обсуждаются.

В исследованиях графов можно выделить пять основных направлений: связность, укладка, экстремальные задачи, матрицы и матроиды, потоки в сетях. Как будет видно из дальнейшего, эти области не являются независимыми друг от друга и имеют взаимные связи и существенные пересечения.

Дав ряд основных определений и концепций, мы перейдем к рассмотрению первых четырех областей исследования, так как потоки в сетях обсуждаются отдельно в гл. II-4. Целочисленное программирование, рассматриваемое в гл. II-2, также соприкасается с теорией графов. В пределах ограничений на объем изложения мы всюду будем: 1) определять основные понятия и пояснять соответствующую терминологию; 2) иллюстрировать общие положения конкретными примерами; 3) строить модели объектов с заданной характеристикой и/или метод расчета количества объектов; 4) давать краткое описание алгоритма и иллюстрировать доказательство и 5) рассматривать соответствующие приложения. В то же время по возможности будем указывать на некоторые нерешенные проблемы.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Граф есть упорядоченная пара (V, E), где V — непустое множество, называемое множеством *вершин*; E — неупорядоченное бинарное отношение на V [т. е. если $(u\&v)$ в $V\&V$, то $(u\&v) = (v\&u)$. E называется множеством *ребер*. Говорят, что ребро, принадлежащее множеству E, *инцидентно* вершинам, которые оно соединяет. Выше дано определение *неориентированного графа*, который полностью определяется списком вершин и указанием, какие пары вершин имеют соединяющие их ребра. *Ориентированный граф* есть упорядоченная пара (V, E), где V — множество вершин, а E — упорядоченное отношение на V (т. е. $V \times V$). В этом слу-

чае E называется множеством *дуг*. Первая и вторая вершины дуги называются соответственно *начальной* и *конечной* вершинами.

Граф (V', E') называется *подграфом* графа (V, E), если V', E' содержатся соответственно в V, E. В пределах настоящей главы мы ограничимся рассмотрением графов с конечным числом ребер; такие графы называются *конечными*.

Петлей называется ребро, концевые точки которого совпадают. *Степенью* (валентностью) вершины называется число инцидентных ей ребер. *Кратностью* пары вершин называется число соединяющих их ребер.

В неориентированном (ориентированном) графе последовательность из n ребер (дуг) $e_1, \ldots, e_n$ называется *маршрутом* (*ориентированным маршрутом*) длины n, если существует соответствующая последовательность из $n+1$ (не обязательно различных) вершин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, таких, что e_i инцидентно $(v_{i-1} \& v_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Маршрут (ориентированный маршрут) называется *замкнутым* (*незамкнутым*), если $v_0 = v_n$ $(v_0 \neq v_n)$. Если $e_i \neq e_j$ для всех i и j, $i \neq j$, то маршрут (ориентированный маршрут) называется *цепью* (*путем*). Говорят, что множество ребер (дуг) образуют *цепь*. Если $v_0 = v_n$, то цепь (путь) называется *циклом* (*контуром*). Если, кроме того, вершины различны, мы имеем *простую цепь* (*простой контур*). Протяженность (число ребер) наиболее длинного (простого) цикла называется *окружением* графа. Часто для краткости вместо «простой цикл» («простой контур») говорят «цикл» («контур»). Во всех этих случаях определения относятся к такой последовательности ребер графа, когда ни одно ребро не встречается повторно. Однако вершины, например в маршруте, могут встречаться более одного раза.

Граф называется *связным*, если каждая пара вершин может быть соединена цепью. Граф, который не является связным, может быть разбит на конечное число связных подграфов, называемых *компонентами* или *частями*. *Связностью* графа называется наименьшее число вершин, удаление которых делает исходный граф несвязным. *Разрезом* графа называется минимальное множество ребер, удаление которых увеличивает число компонент. Граф является *полным*, если каждая вершина соединена ребром с каждой из всех других вершин. Граф называется *двудольным*, если его вершины могут быть разбиты на два таких множества, что каждое ребро соединяет вершину одного множества с вершиной другого. (При этом не обязательно, чтобы каждая вершина одного множества была инцидентна каждой вершине другого множества.) Связный граф называется *регулярным*, если все его вершины имеют одинаковую степень.

Деревом в неориентированном графе называется связный подграф, не имеющий циклов. Если все вершины графа принадлежат дереву, то оно называется *покрывающим*. Ориентированное дерево

имеет *корень* в вершине v, если существует путь от v к каждой из других вершин. Ребра графа, принадлежащие покрывающему дереву, называются *ветвями*. Все остальные ребра называются *хордами*.

Ориентированный граф является *сильно связным*, если для каждых двух вершин u и v существует путь от u к v и путь от v к u. Вершина связного графа, после удаления которой граф становится несвязным, называется *точкой сочленения*.

Граф называется *планарным*, если он может быть уложен (изображен) на плоскости таким образом, что его ребра будут пересекаться только в вершинах.

Плоская карта — это планарный граф вместе с областями или зонами (часто называемыми странами), простые циклы которого разделяют плоскость таким образом, что каждое ребро является границей двух областей. (Два ребра, являющихся границами смежных областей, могут быть заменены одним ребром, разделяющим эти две области.) В более общей формулировке карта M — это граф G вместе с поверхностью S, на которой G нанесен таким образом, что его ребра пересекаются только в их граничных точках. Говорят, что карта M является укладкой графа G на поверхности S.

Правильной раскраской карты в n цветов (n-раскраской) называют такую, когда каждая из областей раскрашивается в один из n цветов и ни одна пара смежных областей не окрашивается одним цветом (в дальнейшем будем иметь дело только с правильной раскраской).

Поверхность является *неориентируемой*, если можно выбрать направление вращения вокруг некоторой точки и двигать эту точку по поверхности, соблюдая одну и ту же ориентацию относительно точки задания вращения так, что, когда точка вернется в исходное положение, направление вращения будет противоположным первоначальному. (Лента Мебиуса представляет пример такой поверхности.) В противном случае поверхность называется *ориентируемой*.

Фактором графа G называется подграф, который включает все его вершины, но не является вполне несвязным. Регулярный подграф степени n является n-фактором. Граф G является суммой факторов, если он представляет собой объединение непересекающихся множеств их ребер. В этом случае имеют дело с *факторизацией* графа G.

Два графа называются *изоморфными* тогда и только тогда, когда имеется взаимно-однозначное соответствие между их вершинами и ребрами при сохранении отношений инцидентности.

Замечание. Изоморфизм графа с самим собой называется *автоморфизмом*. Автоморфизм есть перестановка вершин, сохраняющая смежность. Последовательное выполнение двух автоморфизмов

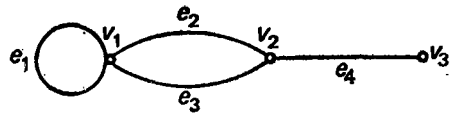


Рис. 1.

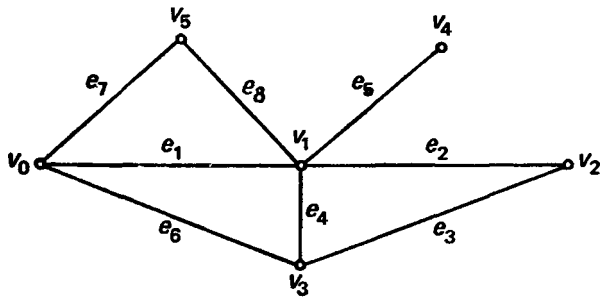


Рис. 2.

есть также автоморфизм. Фактически такая совокупность автоморфизмов образует группу, называемую *группой графа*. Задача о том, когда данная абстрактная группа изоморфна группе некоторого графа, решена. Ответ заключается в том, что каждая группа есть группа автоморфизмов некоторого графа [17].

Для уяснения соответствующих определений читателю, возможно, будет полезно обратиться к рис. 1 и 2. В графе на рис. 1 e_1 — петля; e_2 и e_3 — параллельные ребра; v_2 и v_3 — смежные вершины; e_2 и e_4 — смежные ребра. Обозначим число элементов множества S через $|S|$, так что $|V|$ — это число вершин, а $|E|$ — число ребер.

На рис. 2 $e_1e_2e_3e_4e_2$ — маршрут; $e_1e_2e_3e_4$ — цепь; $e_1e_2e_3e_4e_8e_7$ — цикл; $e_1e_2e_3$ — простая цепь; $e_2e_3e_4$ — простой цикл; e_5 — разрез.

3. СВЯЗНОСТЬ

3. 1. Эйлеров путь

Одна из самых первых задач теории графов — это известная задача о кенигсбергских мостах, интриговавшая жителей этого прусского города до тех пор, пока в 1736 г. не была решена Эйлером. Эйлер писал:

«В городе Кенигсберге имеется остров A, называемый Кнайпхофом, который охвачен двумя рукавами реки Прегель (рис. 3). Через эти два рукава перекинуты семь мостов a, b, c, d, e, f и g. Вопрос состоит в следующем: можно ли спланировать прогулку

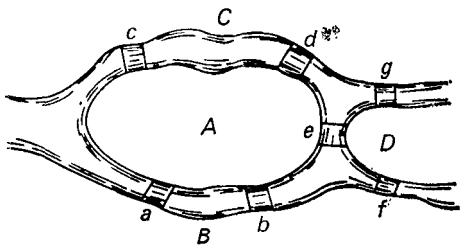


Рис. 3. Карта

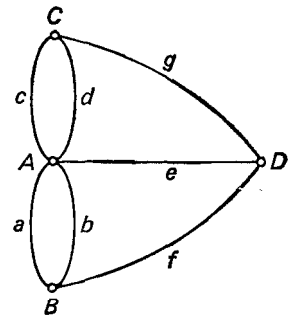


Рис. 4. Граф.

таким образом, чтобы по каждому из этих мостов пройти один и только один раз».

Поставим в соответствие каждой области суши вершину и соединим две вершины ребром, если между соответствующими областями имеется мост. В результате получится граф (рис. 4), соответствующий карте.

Эйлеровым путем в графе G называется такой путь, в котором каждое из ребер встречается только один раз. Эйлер показал, что такой путь существует тогда и только тогда, когда граф G содержит не более двух вершин нечетной степени и является связным (очевидное необходимое условие). Так как в рассматриваемом графе имеется четыре вершины нечетной степени, решение задачи о кенигсбергских мостах дает отрицательный ответ. Если граф содержит точно две вершины нечетной степени A и B, то в эйлеровом пути эти вершины должны быть конечными. Если вершин нечетной степени нет, то граф имеет замкнутый эйлеров путь (эйлеров контур).

Чтобы показать, как построить эйлеров путь, допустим, что граф G имеет точно две вершины нечетной степени A и B. Начнем движение с вершины A и используем последовательность неповторяющихся ребер до тех пор, пока это возможно. Такой путь не может окончиться в вершине четной степени, так как из любой такой вершины возможно продолжение пути по ребру, отличному от того, по которому мы в эту вершину попали. Он не может окончиться и в вершине A, так как первое ребро пути смежно с вершиной A и после его прохождения остается четное число неиспользованных ребер для продолжения пути через точку A. Такой путь заканчивается в другой конечной вершине B. Если окажется, что на пройденном пути использованы все ребра графа, то этот путь и является искомым эйлеровым путем. В противном случае мы удалим использованные ребра и получим новый граф G', каждая вершина которого имеет четную степень, так как путь через каждую

вершину содержит четное (возможно, нулевое) число ребер, за исключением вершин A и B. В силу связности графа G на рассматриваемом пути существует вершина C, смежная с некоторым ребром графа G'. Начиная движение от вершины C, построим в графе G' новый путь, который должен закончиться в C, так как все вершины G' имеют четную степень. Продлим первый путь, «сращивая» его с путем от A к C, а затем со вторым путем от C к C и в конце концов с путем от C к B. Будем повторять этот процесс до тех пор, пока не используем все ребра графа G. Таким способом можно показать, что граф, имеющий $2n > 0$ вершин нечетной степени, может быть покрыт точно n путями [4].

Интересная задача организации движения городского транспорта связана с выбором улиц для одно- и двустороннего движения. Одностороннее движение следует организовывать на максимально возможном числе улиц. Каковы условия, которым должна удовлетворять схема движения по улицам, чтобы любые два пункта города были взаимно достижимы? Это оказывается возможным, если на всех улицах, принадлежащих контурам, организовано одностороннее движение, а все улицы, не принадлежащие контурам, используются для двустороннего движения.

3.2. Гамильтоновы циклы

В девятнадцатом столетии ирландский математик Вильям Роуэн Гамильтон придумал игру и продал ее идею за 25 фунтов. В ней использовался додекаэдр (рис. 5), всем вершинам которого были даны названия известных городов. Задача играющего состояла в том, чтобы обозначить шнурком замкнутый путь, последовательно соединяя одну вершину с другой (они были снабжены гвоздиками), и при этом обойти все города, посетив каждый из них только один раз.

Граф G называется *гамильтоновым*, если он содержит простой цикл (называемый *гамильтоновым циклом*), проходящий через все его вершины. Граф, показанный на рис. 5, содержит такой цикл, а в графе на рис. 6 такого цикла нет, хотя в нем имеется простой путь, который проходит через все его вершины (такой путь называется *гамильтоновым путем*). Полный граф всегда содержит гамильтонов цикл. Следующее утверждение эквивалентно формулировке гипотезы о четырех красках: для раскраски любого гамильтонова планарного графа достаточно четырех красок.

Задача о коммивояжере принадлежит к более общему классу задач математического программирования. Ее простая формулировка состоит в следующем. Требуется найти путь коммивояжера, которому необходимо последовательно посетить $(n-1)$ городов, заезжая в каждый город только один раз, и вернуться домой, причем общая протяженность его пути должна

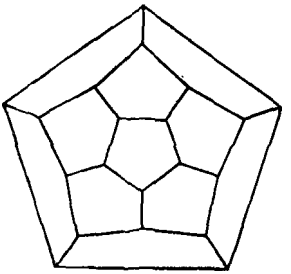


Рис. 5.

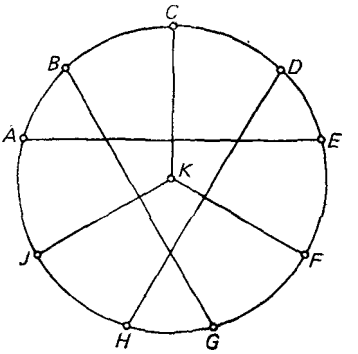


Рис. 6.

быть минимальна. Таким образом, среди всех гамильтоновых циклов полного графа с n вершинами нужно найти такой, общая длина ребер которого минимальна. Математическая формулировка этой нерешенной задачи и подход к ее решению (в той части, которая связана с поиском эффективного алгоритма) изложены в работе [22].

К рассматриваемому типу задач принадлежит также задача о маршруте школьного автобуса, собирающего учащихся из определенных районов города. Задача о коммивояжере эквивалентна задаче о последовательности выполнения различных операций на одном агрегате, когда требуется минимизировать общее время переналадки (т. е. время подготовки оборудования к последующей операции). В этом случае каждому городу соответствует определенный вид операции, расстоянию между городами — время переналадки для каждой из смен, а общей протяженности пути — суммарное время переналадки.

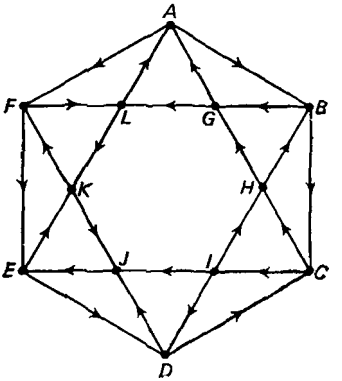


Рис. 7.

3.3. Гамильтонов цикл в ориентированном графе

На карте (рис. 7) представлена схема улиц с односторонним движением в некотором университетском городке. Направление движения показано стрелками. Студент последнего курса, проживающий в пункте A, хочет объехать городок на велосипеде и вернуться домой, проезжая каждый перекресток только один раз. Каков должен быть его маршрут?

3.4. Регулярные графы

В задачах, связанных с регулярными графами, рассматриваются кратчайшие циклы. Пусть G — регулярный граф степени r, не содержащий петель, а длина цикла измеряется числом его ребер. Кратчайшие циклы графа G, если они существуют, называются *обходами*, а длина обхода называется *обхватом* графа G. Приведем некоторые результаты, полученные при исследовании свойств регулярных графов [11].

Обозначим через $G(n, r, k)$ регулярный граф порядка [1]) n, степени r и имеющий обхват k, причем $r \geqslant 3$, $k \geqslant 2$. Для таких графов справедлива следующая теорема.

Для любых трех целых чисел $r \geqslant 3$, $k \geqslant 2$ и $d \geqslant 1$ всегда можно построить граф $G = G(n, r, k)$, обладающий следующими свойствами:

1. G содержит гамильтонов цикл.
2. Обходы графа G не содержат общих элементов, и объединение всех обходов есть 2-фактор Q графа G.
3. Если ребра Q удалить из G, то остающийся граф распадается на $(r-2)$ 1-факторов.
4. Число обходов, содержащихся в графе G, делится на d.

3.5. Деревья и покрывающие деревья

Пусть $T_{n,k}$ — число графов с $n+k-1$ помеченными вершинами $P_1, P_2, \ldots, P_{n+k-1}$, причем эти графы содержат в качестве подграфов k непересекающихся деревьев и точки $P_1, P_2, \ldots, P_k$ принадлежат разным подграфам. Кэли получил следующую формулу для определения $T_{n,k}$:

$$T_{n,k} = k(n+k-1)^{n-2}.$$

Ясно, что $T_{n,1} = T_n$, где T_n — число деревьев в полном графе.

Число $T_{n,k}$ может быть интерпретировано следующим образом. Если имеется $n+k-1$ городов, из которых k городов расположены на берегу одной и той же реки (или озера), то $T_{n,k}$ представляет собой количество таких минимальных сетей железных дорог,

[1]) Здесь под порядком графа понимается число его вершин.— *Прим. перев.*

соединяющих некоторые из городов, при наличии которых сообщение между двумя любыми городами возможно по железной дороге данной сети и затем — по водному пути между городами, расположенными на реке. Таким образом, требуемая для этого сеть железных дорог состоит из таких k подсетей, что города, расположенные на берегу реки, принадлежат различным подсетям; если города A и B принадлежат одной и той же подсети, то из A в B можно попасть по железной дороге, но если A и B принадлежат разным подсетям, то путь из A в B проходит сначала по железной дороге до прибрежного города, принадлежащего той же подсети, что и A, затем — по воде до прибрежного города, принадлежащего той же подсети, что и город B, и в конце концов — по железной дороге до города B.

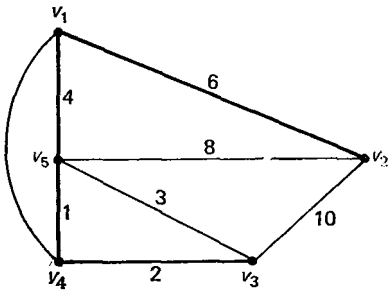
Между прочим, предположение о том, что число деревьев полного графа с n помеченными вершинами равно n^{n-2}, также было высказано Кэли. Доказательство этого приведено в книге [4].

Алгоритм построения покрывающего дерева минимальной длины в связном графе $G(V, E)$ с n вершинами состоит из следующих этапов.

1. Полагают $i = 1$.
2. Выбирают кратчайшее ребро графа G в качестве первого ребра покрывающего дерева и обозначают его через t_i.
3. Увеличивают i на единицу.
4. Из еще не использованных ребер графа G выбирают кратчайшее ребро, не образующее цикл с ранее выбранными ребрами. Это новое ребро обозначают через t_i.
5. Если $i < (n - 1)$, переходят к шагу (3), в противном случае — окончание построения дерева.

Можно доказать, что выбранные таким образом ребра $t_1, \ldots, t_{n-1}$ (где длина $t_i <$ длины t_{i+1} при $i = 1, 2, \ldots, n - 2$) образуют единственное покрывающее дерево минимальной длины графа G, если все ребра графа G имеют различную длину.

На рис. 8 приведен пример применения рассмотренного алгоритма для нахождения покрывающего дерева минимальной длины, ребра которого обозначены в правой части рис. 8. Рассмотрим несколько примеров, связанных с применением покрывающих деревьев. Требуется соединить n городов железнодорожными линиями таким образом, чтобы не прокладывать избыточных веток. Сколькими способами можно построить такую сеть? Предположим, что стоимость сооружения железнодорожной линии известна и для пары городов a и b равна $u(a, b)$. Какой должна быть железнодорожная сеть, связывающая все города, чтобы стоимость ее сооружения была минимальной? Аналогичные вопросы возникают и при строительстве сетей передачи электроэнергии. Такие задачи можно сформулировать с новых позиций, используя понятие покрывающих деревьев графа.



$t_1 = (v_4, v_5)$

$t_2 = (v_3, v_4)$

$t_3 = (v_1, v_5)$

$t_4 = (v_1, v_2)$

Рис. 8.

Построение деревьев можно использовать и при решении задач динамического распределения памяти электронных вычислительных машин. Программа для вычислительной машины может состоять из нескольких подпрограмм, запрашиваемых, или вызываемых, из программ более высокого уровня. Хотя при повторяющихся подпрограммах последовательность вызовов данной подпрограммы из программы более высокого уровня может содержать петли, мы рассмотрим для простоты только такие последовательности, которые представляют собой простые цепи. Поэтому описываемые ниже последовательности вызовов не имеют петель. Так как все подпрограммы должны вызываться некоторой другой подпрограммой, граф вызовов представляет собой дерево [45].

Каждая подпрограмма занимает определенный объем памяти оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) вычислительной машины — для хранения самой подпрограммы и ее данных, а также для информации об участках ОЗУ, занятых этой подпрограммой. Последняя информация необходима блоку распределения памяти, чтобы знать, какие участки ОЗУ заняты подпрограммой и могут освободиться для других целей, когда данная подпрограмма (включая все ее производные элементы) закончит работу.

Один из примеров реализации такого процесса иллюстрируется на рис. 9. Символами S_i обозначены подпрограммы, причем дуги, соединяющие подпрограммы, направлены от вызывающих подпрограмм к вызываемым.

Отдельная подпрограмма, например S_4, хранится в ОЗУ до тех пор, пока не будет закончена вся программа или пока занимаемый ею участок ОЗУ не потребуется для других подпрограмм. Заметим, что если некоторая подпрограмма является активной, все подпрограммы, расположенные на пути от этой подпрограммы до корневой, также считаются активными. Когда весь объем памяти ОЗУ исчерпан, блок распределения памяти использует дополнительную память, удаляя неактивную подпрограмму на внешнее

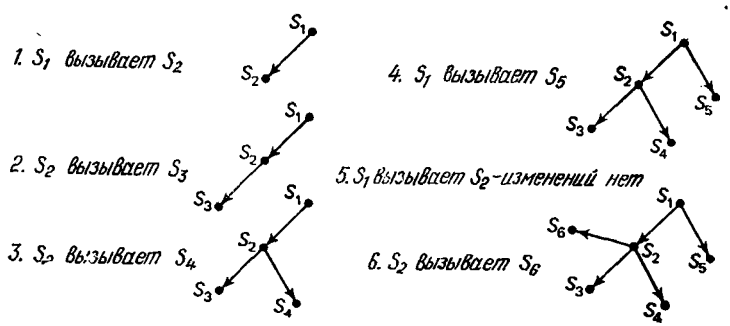


Рис. 9.

запоминающее устройство (которое имеет больший объем, но время обращения к которому также больше). После этого участок ОЗУ, занимаемый этой подпрограммой, освобождается для других подпрограмм. Если в дальнейшем вновь потребуется данная подпрограмма, она снова возвращается из внешнего запоминающего устройства.

Для последовательного просмотра таких деревьев блоку распределения памяти потребовалось бы хранить в ОЗУ информацию о разветвлениях, подлежащих просмотру. Для этого необходимо запоминающее устройство с переменной длиной поля (просмотр магазинного списка). Чтобы избежать этого, дерево пронизывается хордами с использованием следующей процедуры.

Обозначим через $L(v_0)$ расстояние вдоль дерева от корневой вершины v_p до некоторой вершины v_0, отличной от v_p. Пусть каждая из таких вершин v_0 имеет n смежных с ней вершин v_k, $k = 1, \ldots, n$, причем $L(v_k) > L(v_0)$. В каждой вершине v_k, $k = 1, \ldots, n$, добавим одну дугу от v_{k-1} к v_k (при $k > 2$ это будет хорда дерева). Свяжем вершину v_p дугами с вершинами $v \neq v_0$, смежными с ней (если они есть). Каждая вершина v_k оказывается связанной (путем) с каждой из вершин, с которыми

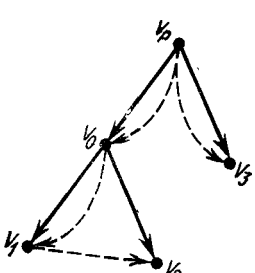


Рис. 10. Исходное дерево показано сплошными линиями, новое дерево — пунктиром.

связана вершина v_0. Новое множество дуг также образует корневое дерево с таким же числом вершин (и ребер), как и исходное дерево (рис. 10).

3.6. Пути минимальной и максимальной длины

Алгоритмы выбора кратчайших и наиболее длинных путей (или в зависимости от обстоятельств — цепей) между двумя вершинами связного графа находят применение в различных областях. Исследование задач, связанных с нахождением кратчайших путей, интуитивно ассоциируется с решением проблем, требующих экономии трудовых затрат. Понятие пути максимальной длины фигурирует в задачах определения критического пути, заключающихся в том, что для осуществления некоторого производственного процесса требуется установить согласованную во времени последовательность выполнения различных этапов этого процесса. Этапы, требующие наибольшего времени, должны постоянно и надежно обеспечиваться людьми и материалами. Завершение менее продолжительных этапов может быть на соответствующий срок отложено. Непосредственное влияние таких алгоритмов на осуществление реальных производственных процессов привело к коренному изменению методов решения задач маршрутизации на транспорте.

Ниже формулируется основная задача нахождения кратчайших цепей.

Поставив в соответствие каждому ребру сети a_{ij} некоторое расстояние d_{ij}, будем искать цепь, ведущую из v_0 к v_t, для которой сумма $\{d_{ij}\}$ минимальна. Однако иногда ставится более общая задача нахождения кратчайшей цепи, ведущей из v_0 к любой из вершин v_i. Такие алгоритмы обсуждаются в гл. II-4 и поэтому здесь не рассматриваются.

3.7. Паросочетания

Важными практическими задачами являются задачи назначения людей на работу или разделения их на пары в соответствии с различными схемами. Проблема паросочетаний заключается в том, чтобы определить, возможно ли соответствующее назначение, и как сделать это наилучшим образом.

Математическая формулировка этой задачи состоит в следующем: задан двудольный граф (V_1, V_2, E); каково максимальное число дуг, среди которых нет двух смежных?

Определение. *Паросочетанием в двудольном графе* G называется подмножество ребер E, в котором никакие два ребра не являются смежными. Паросочетание называется *максимальным*, если оно не является соответствующим подмножеством некоторого другого паросочетания. *Дефицитом* множества вершин A, входящего в V_1,

который обозначается как $\delta(A)$, называется разность $|A| - |R(A)|$, где $|A|$ — число вершин в A, а $|R(A)|$ — число вершин в V_2, которые смежны с вершинами множества A. Дефицит двудольного графа G, обозначаемый как $\delta(G)$, равен максимальному из дефицитов всех подмножеств V_1.

Теорема. В двудольном графе G максимальное число вершин множества V_1, для которых можно осуществить паросочетание с множеством V_2, равно $|V| - \delta(G)$.

Задача. *Попытаемся теперь дать алгебраическую формулировку задачи о паросочетании в двудольном графе в виде транспортной задачи. Рассмотрим простую сеть* (V_1, V_2, E), *в которой каждую из вершин множества* V_1 *сначала будем рассматривать как источник, а каждую вершину множества* V_2 *— как сток. Пусть переменная* c_{ij} *будет равна нулю или единице в зависимости от того, существует или нет дуга из вершины* i *множества* V_1 *к вершине* j *множества* V_2. *Пусть* X_{ij} *означает поток вдоль каждой дуги, причем* X_{ij} *будет принимать также два значения — нуль или единица. Будем рассматривать вершины множества* V_2 *как источники, а вершины множества* V_1 *— как стоки. Затем максимизируем общее число не пересекающихся по вершинам дуг, вдоль которых существует поток.*

Таким образом, задача о максимальном паросочетании сводится к следующей транспортной задаче:

$$\text{максимизировать } Z = \sum_{i,\ j \in V_1, V_2} X_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in V_2} c_{ij} X_{ij} \leqslant 1, \quad i \in V_1,$$

$$\sum_{i \in V_1} c_{ij} X_{ij} \leqslant 1, \quad j \in V_2.$$

4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ГРАФЫ

В двух следующих примерах будут рассмотрены задачи, связанные с перечислением специфических объектов, насчитывающихся в графе данного типа, а именно — в полном графе. В первом случае будем иметь дело с ориентированным полным графом, во втором — с неориентированным.

4.1. Число циклов ориентированного полного графа

Задача перечисления циклов в ориентированном графе встречается в статистике. Метод парных сравнений является способом упорядочивания множества объектов наблюдателем, который

из каждой возможной пары выбирает тот объект, которому отдает предпочтение. Если он предпочитает объект a объекту b, объект b объекту c, но c объекту a, это приводит к противоречивости в процессе упорядочивания.

Исходные данные задачи можно представить в виде ориентированного графа, поставив в соответствие каждому объекту некоторую точку и соединив их стрелками, направленными из точки a в точку b, если наблюдатель предпочитает объект a объекту b. Если он предпочитает a объекту b, b объекту c, но c объекту a, в графе образуется трехреберный цикл. Так как такие циклы вносят противоречивость, их наличие нежелательно. Поэтому статистики стараются по возможности ограничить их количество.

Кендалл и Бэбингтон Смит в 1940 г. определили максимальное число трехреберных циклов в ориентированном графе, состоящем из заданного числа точек, однако они не рассматривали перечисление более длинных циклов. Коломбо в 1964 г. распространил решение этой задачи на случай четырехреберных циклов.

Задачи перечисления трех- и четырехреберных циклов аналогичны в том отношении, что для трех или четырех точек ориентированного графа в лучшем случае может существовать один трех- или четырехреберный цикл соответственно.

Оказывается, что максимальное число трехреберных циклов в полном ориентированном графе равно

$$\frac{n^3-n}{24} \text{ для нечетного } n.$$

$$\frac{n^3-4n}{24} \text{ для четного } n.$$

Аналогичный результат известен для четырехреберных циклов, а для пятиреберных циклов и в общем случае задача остается нерешенной.

4.2. Планарность и пересечения

Известна классическая головоломка, называемая задачей о трех домах и трех пунктах обслуживания [1]), в основе которой лежит понятие непланарного графа. Задача состоит в том, чтобы соединить три пункта обслуживания с каждым из трех домов таким образом, чтобы коммуникации не пересекались. Легко показать, что на плоскости эта задача не имеет решения. Таким образом, не имеет значения, как проводятся эти ребра на плоскости; помимо вершин, всегда будет существовать хотя бы одна точка пересечения ребер. Один из способов построения графа с единственной

[1]) В литературе она часто фигурирует как задача о трех домах и трех колодцах.— *Прим. перев.*

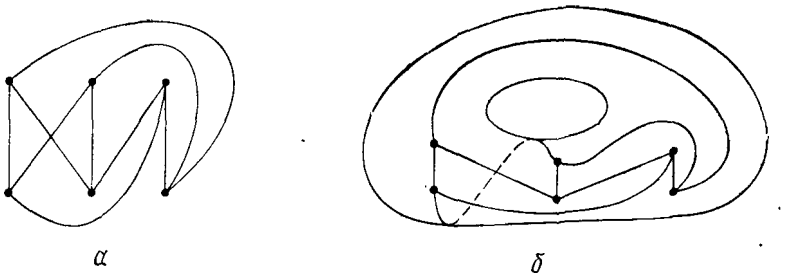


Рис. 11.

точкой пересечения иллюстрируется на рис. 11, *а*. На рис. 11, *б* показана укладка графа на поверхности тора. Укладка на тороидальной поверхности, являющейся поверхностью рода 1, исключает пересечения. Для целей нашего рассмотрения *род* поверхности, по существу, определяется числом дырок в поверхности или максимальным числом простых замкнутых кривых, разрезы вдоль которых не разъединяют поверхность. Заметим, что в рассматриваемом случае тор не был бы разъединен, т. е. если его поверхность разрезать по любой простой замкнутой кривой, проходящей через дырку (вдоль дырки), то остается путь, по которому можно попасть из любой точки поверхности в любую другую точку. Разрез по второй замкнутой кривой разъединяет тор. Сфера всегда разъединяется разрезом по замкнутой кривой, поэтому она представляет собой поверхность нулевого рода.

Существует ряд теорем, определяющих условия, при которых граф является планарным. Отметим вначале, что формула Эйлера, выражающая условие планарности, является необходимым, но не достаточным условием. Существует известная характеризация планарного графа (см., например, книгу [4]).

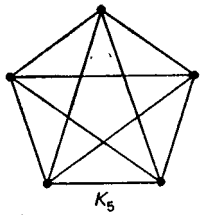
Теорема Куратовского [1]). Граф непланарен тогда и только тогда, когда он содержит подграф, изоморфный с точностью до вершин степени 2 одному из двух графов Куратовского [2]) K_5 и $K_{3,3}$ (рис. 12).

Два графа называются изоморфными с точностью до вершин степени 2, если они остаются изоморфными после добавления или удаления некоторого количества вершин степени 2.

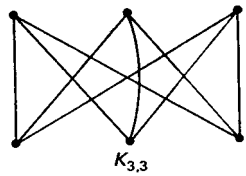
---

[1]) Точнее, теорема Понтрягина — Куратовского, так как Л. С. Понтрягиным сформулирован (но не опубликован) критерий планарности еще в 1927 г. Куратовский (независимо от Понтрягина) получил этот результат в 1930 г.— *Прим перев.*

[2]) Точнее, графов Понтрягина — Куратовского.— *Прим. перев.*



Полный граф с 5 вершинами



Граф для задачи о трех домах и трех пунктах обслуживания

Рис. 12.

Теперь становится ясным, что многие графы, изображенные на плоскости, на самом деле непланарны. Независимо от того, как они изображены, некоторые их ребра пересекаются. При этом естественно возникает вопрос о том, как представить данный непланарный граф на плоскости с минимальным числом пересечений. Попытаться ответить на этот вопрос, по-видимому, легче для таких известных классов графов, как двудольные и полные графы.

Двудольные графы рассматриваются в задачах, связанных с проектированием печатных схем, число пересечений в которых обычно стараются сделать минимальным. Довольно интересное происхождение имеет рассматриваемая проблема для полных графов. На кирпичном заводе имеется m печей, в которых обжигаются кирпичи. После обжига они выгружаются на небольшую специальную вагонетку и направляются к одной из n платформ, где кирпичи перегружают на грузовик. Так как каждая печь должна быть связана рельсовым путем с каждой погрузочной платформой, то пути имеют большое число пересечений. Когда вагонетки проходят пересечения, они часто сходят с рельсов, что приводит к вываливанию кирпичей и транспортным пробкам. Задача заключается в проведении рельсовых путей от печей к местам доставки с минимальным числом пересечений, чтобы свести к минимуму опасность схода вагонеток с рельсов.

Эту задачу можно решить в рамках теории графов, поставив в соответствие рельсовым путям ребра графа, соединяющие вершины, соответствующие печам, с вершинами, соответствующими погрузочным платформам. При этом накладывается ограничение, запрещающее трем (или более) ребрам пересекаться в одной точке, не являющейся вершиной графа. Однако пересечение двух ребер в некоторой промежуточной точке допускается.

Высказано предположение о том, что минимальное число пересечений ребер полного графа, состоящего из n вершин и изображенного на плоскости таким образом, что два ребра пересекаются не более чем в одной точке, а два ребра с общей вершиной не имеют

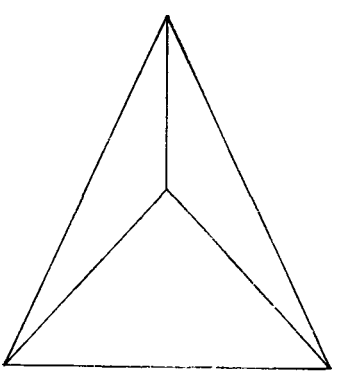
пересечений, равно

$$I_n = \frac{n(n-2)^2(n-4)}{64} \text{ при четном } n,$$

$$I_n = \frac{(n-1)^2(n-3)^2}{64} \text{ при нечетном } n.$$

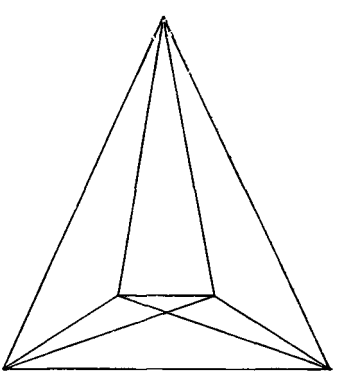
В полном графе каждая вершина соединяется с любой другой вершиной одним ребром. Обозначим полный граф с n вершинами через K_n и назовем его минимальным (максимальным), если он содержит минимальное (максимальное) число пересечений. В работе [36] содержится схема реализации таких графов. Итак, мы знаем, что величина I_n не может превосходить вышеуказанных пределов. Задача состоит в том, чтобы показать справедливость равенства.

Рассмотрим каждую вершину графа K_n и ребра, связывающие ее с другими вершинами (ее звезду). Число таких ребер равно $n-1$. Удаление рассматриваемой вершины и ее звезды исключает все пересечения, которые имеют эти ребра. В результате получается полный граф из $n-1$ вершин. Звезда любой другой вершины полного графа из n вершин имеет такое же или другое число пересечений. В общем случае, если x_i, $i = 1, \ldots, n$, — число пересечений на звезде i-й вершины, то общее число пересечений в графе K_n равно $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i$, так как каждое пересечение учитывается четыре раза — один раз для каждой из четырех вершин двух пересекающихся ребер. Таким образом, *если x_i, $i = 1, \ldots, n$, — число пересечений, приходящихся на звезду i-й вершины полного графа K_n, то общее число пересечений в графе равно* $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i$.



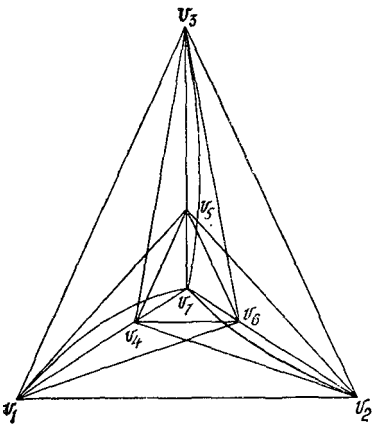
$I_4 = 0$

Рис. 13.



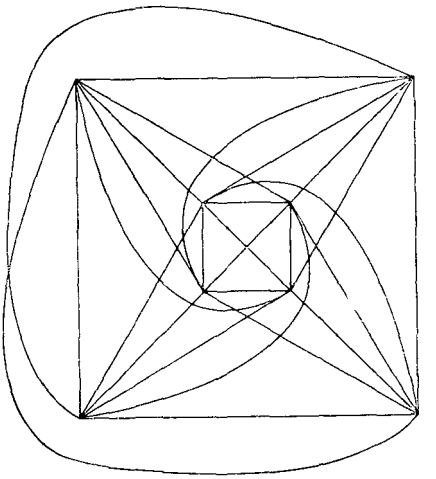
$I_5 = 1$

Рис. 14.



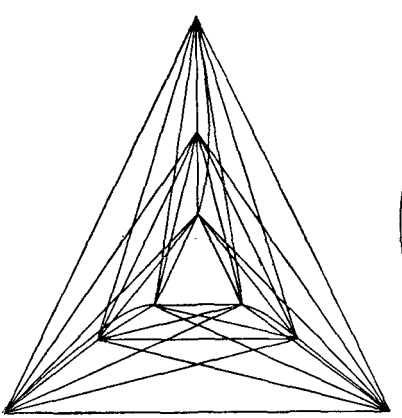
$l_7 = 9$

Рис. 15.



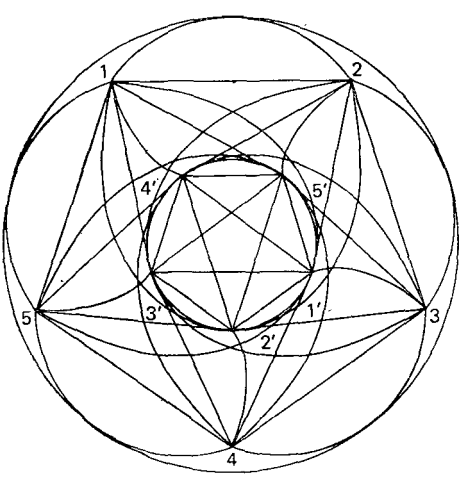
$l_8 = 18$

Рис. 16.



$l_9 = 36$

Рис. 17.



$l_{10} = 60$

Рис. 18.

Необходимое условие для минимального числа пересечений I_n в полном графе K_n выражается соотношением

$$I_n \geqslant \frac{n}{n-4} I_{n-1}, \quad n \geqslant 5,$$

$$I_n = 0, \quad n \leqslant 4.$$

Заметим, что, согласно теореме Куратовского, $I_5 = 1$. Ниже показана справедливость этого предположения вплоть до $n = 10$ (см. рис. 13—18, где показана плоская реализация соответствующих графов, которая не вызовет у читателя затруднений в обобщении). Однако в общей постановке задача остается нерешенной.

Полный двудольный граф состоит из m темных и n светлых вершин и mn ребер, соединяющих вершины разных типов. Заранкевич (чья работа также рассмотрена в книге [4]) высказал предположение о том, что в таком графе минимальное число пересечений равно

$$\left[\frac{m}{2}\right] \cdot \left[\frac{m-1}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

где $[x]$ означает наибольшее целое число $\leqslant x$. Схема реализации графов с таким числом пересечений тоже описана в указанной выше книге. Справедливость этого предположения пока не доказана. Решение этой проблемы помогло бы и решению задачи о кирпичном заводе.

5. УКЛАДКА

В предыдущих примерах рассматривались вопросы связности и экстремальные задачи (нахождение максимума или минимума), возникающие в теории графов. Теперь уместно перейти к обсуждению вопросов об укладке графов на поверхностях, так как они тесно связаны с планарностью.

5.1. Планарные графы и их двойственность

Уитни определил планарные графы как графы, имеющие планарную двойственную карту. Следующая теорема и следствие из нее, сформулированные Эдмондсом [44], распространяют это определение на случай более сложных поверхностей.

Пусть M обозначает карту, которая является укладкой графа G на поверхности S. *Карта, двойственная* M, определяется как карта N на той же поверхности S с уложенным на ней графом H, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Двойственная к двойственной карте N есть карта M.
2. Каждая вершина уложенного графа G_M расположена внутри некоторой области карты N.

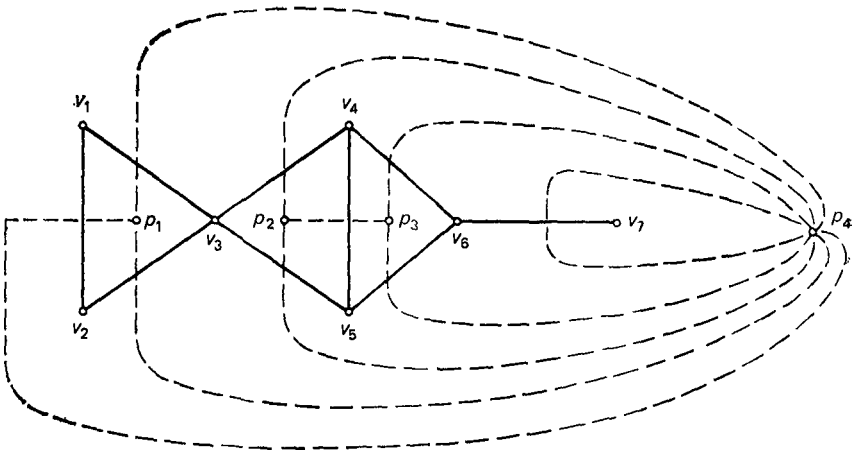


Рис. 19.

3. Каждая область карты M содержит только одну вершину графа H_N.

4. Каждое ребро G_M пересекает одно ребро H_N только один раз.

В качестве примера карты и двойственной к ней карты на рис. 19 показан уложенный на плоскости граф G (ребра изображены сплошными линиями, вершины обозначены через v_i); на той же плоскости представлена двойственная карта с графом H (пунктирные ребра, вершины обозначены через p_j).

Взаимно-однозначное отображение множества ребер графа G на множество ребер графа H называется *двойственным относительно поверхности*, если G может быть уложен на карту M поверхности S и H может быть уложен на карту N той же поверхности таким образом, что N является двойственной к карте M и ребра, находящиеся во взаимном соответствии при данном реберном отображении, пересекаются друг с другом в двойственных картах M и N. Отсюда следует:

Теорема. Взаимно-однозначное отображение ребер связного графа G на ребра связного графа H является двойственным относительно поверхности тогда и только тогда, когда

1) для каждой вершины v графа G ребра, инцидентные v, соответствуют ребрам связного подграфа графа H и каждая вершина этого связного подграфа имеет четную степень;

2) для каждой вершины w графа H ребра, инцидентные w, соответствуют ребрам связного подграфа графа G и каждая вершина этого связного подграфа имеет нечетную степень.

Предположим теперь, что M является укладкой графа G на поверхности S. Если карта N с уложенным графом H является двойственной к M, то число вершин $|V_G|$ графа G равно числу областей $|R_N|$ карты N, а также $|V_H| = |R_M|$ и $|E_G| = |E_H|$. Таким образом, из формулы Эйлера, связывающей число вершин, ребер и областей, следует, что

3. $|V_G| - |E_G| + |R_M| = |V_H| - |E_H| + |R_N| \equiv \chi$,

χ называется *характеристикой* графа G. Для планарного графа $\chi = 2$ (см. также разд. 5.2).

Следствие. Необходимым и достаточным условием реализации укладки связного графа G на поверхности с заданной характеристикой χ является существование соответствия ребер графа G и некоторого графа H, удовлетворяющего приведенной теореме и условию (3).

Чтобы граф был планарным, он должен иметь укладку на ориентированной поверхности с характеристикой, равной 2. Для связного графа условие планарности, сформулированное выше, по существу, совпадает с условием Уитни, а именно: для данного графа должен существовать планарный двойственный граф.

Одна из нерешенных задач. Куратовский определил планарные графы как такие графы, которые не содержат подграфа, изоморфного с точностью до вершин степени два ни одному из графов Куратовского. Тем самым графы Куратовского определены как запрещенные графы для поверхности нулевого рода.

Пока еще не решенная общая задача заключается в том, чтобы найти такое семейство запрещенных графов, которые не должны содержаться в данных графах, для того чтобы последние могли быть уложены на ориентируемой поверхности заданного рода g. Для этого желательно сформулировать теорему, устанавливающую, что если некоторый граф не имеет подграфа, изоморфного графу такого запрещенного семейства, то он может быть уложен на поверхности рода g. Род $g(G)$ графа G определяется как минимальный род ориентированной поверхности, на которой может быть уложен этот граф G. Род графа иногда можно определить косвенным образом. Две нижеследующие теоремы показывают, что определение рода некоторого графа G можно свести к определению родов подграфов, относящихся к определенной декомпозиции графа G.

Обозначим через B подграф графа G и предположим, что B является максимальным в том смысле, что после удаления любой вершины B и инцидентных с ней ребер оставшаяся часть представляет собой связный граф. Назовем B *блоком* графа G. Для графа G существует единственная совокупность B блоков B_i, такая, что $G = \bigcup_i B_i$, $B_i \in B_i$. Совокупность B представляет собой *блочную декомпозицию* графа G [17].

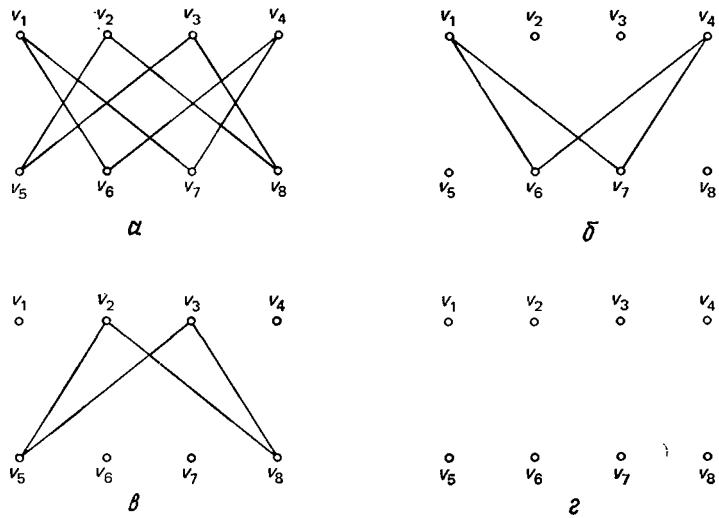


Рис. 20.

Тривиальные примеры такой декомпозиции можно продемонстрировать с помощью полного графа, который имеет единственный блок (так как удаление любой его вершины и инцидентных с ней ребер не нарушает связности остающейся части графа), и нулевого графа, в котором каждая вершина является блоком. Граф, показанный на рис. 20, *а*, имеет блочную декомпозицию, представленную на рис. 20, *б—г*. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если G — связный граф, имеющий n блоков $B_1, \ldots, B_n$, то $g(G) = \sum_{j=1}^{n} g(B_j)$.

В этой теореме считается, что граф G должен быть связным. Покажем, что это требование не является существенным. Допустим, что граф G несвязный и состоит из m различных компонент. Построим граф $G' \supset G$, добавляя к G одну вершину v и m ребер, каждое из которых соединяет одну из компонент с v.

Легко показать, что если добавить к блоку B графа G вершину v и одно из таких ребер, то B не будет блоком графа G', так как удаление другой концевой вершины ребра разъединяет v с вершинами блока B. Таким образом, каждое из добавляемых ребер является блоком графа G, причем блоком нулевого рода. Таким образом, получаем следующий результат:

Теорема. Род любого графа (связного и несвязного) равен сумме родов его блоков.

Используя понятия о минимальной укладке и блочной декомпозиции графа G, можно показать, что определение минимальной укладки для G, по существу, эквивалентно нахождению этой укладки для каждого из блоков графа G.

Обозначим через $r(G)$ максимальное число областей в $[S - G_M]$ для всех карт M на ориентированной поверхности S. Приходим к следующему результату:

Теорема. Если G — связный граф, имеющий n блоков $B_1, \ldots, B_n$, то число областей $r(G)$ в минимальной укладке равно

$$r(G) = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} r(B_i).$$

Выше мы, по существу, определили планарный граф как граф, обладающий укладкой на поверхности нулевого рода. Представляет интерес определить для данного графа G минимальное число планарных подграфов, объединение которых есть G. Такое число называется *планарной толщиной* графа G и обозначается как $t(G)$.

Используя формулу Эйлера, легко показать, что для любого планарного графа H, имеющего m ребер и n вершин, $m \leqslant 3(n-2)$. С помощью этого соотношения можно найти нижнюю границу для $t(G)$ в следующем частном случае:

Пусть G — полный граф из n вершин. Тогда $t(G) \geqslant [(n+7)/6]$, где $[(n+7)/6]$ означает наибольшее целое число [42].

Итак, имеем: если $n \neq 9$ и $n \neq 4 \pmod 6$, то $t(G) = (n+7)/6$, где G — полный граф из n вершин.

Исследованы также и более общие случаи для поверхности рода 1, когда толщина $t_1(G)$ равна минимальному числу подграфов, которые могут быть уложены на поверхности тора, и для поверхности рода 2, толщина графа относительно которой обозначается через $t_2(G)$. Было показано, что если G — полный граф из n вершин, то

$$t_1(G) = \frac{n+4}{6} \quad \text{и} \quad t_2(G) = \frac{n+3}{2}.$$

5.2. Проблема четырех красок

После тщательного анализа информации, относящейся к истории возникновения гипотезы о четырех красках, Кеннет О. Мей пришел к следующему выводу [1]):

[1]) Имеется в виду статья: May O. K., The origins of the four-color conjecture, Isis, 56, 346—348 (1965).— *Прим. перев.*

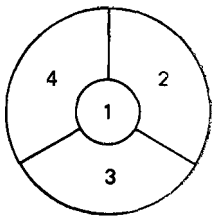


Рис. 21.

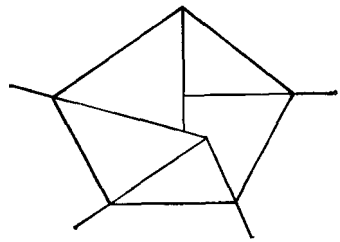


Рис. 22.

Эта гипотеза возникла не как завершающий результат ряда отдельных работ, а как внезапная догадка, осенившая Френсиса Гутри, после того как его брат, занимаясь раскраской карты Англии, в октябре 1852 г. сообщил о своем предположении Де Моргану, не попытавшись, однако, его обосновать.

Из сообщения Мея следует, что Де Морган обдумал эту гипотезу и, отдавая должное Гутри, сообщил о ней своим студентам и другим математикам. В 1878 г. в журнале Proceedings of the London Mathematical Society появилось первое (опубликованное) упоминание об этой гипотезе, сделанное Кэли, который задавал вопрос о том, была ли доказана ее справедливость. После этого началась «красочная» полоса исследований, включающая ряд эквивалентных вариаций, предположений и ошибочных доказательств. Только совсем недавно авторам работы [41] с использованием ЭВМ (и довольно длинного доказательства) удалось обосновать эту гипотезу.

Подробную информацию, относящуюся к этой проблеме, можно найти в известной книге Оре [30]. Необходимость четырех цветов можно проиллюстрировать примером, представленным на рис. 21.

Используя двойственный граф, можно легко доказать, что для раскраски любой планарной карты достаточно пяти цветов. Здесь мы приведем краткое прямое доказательство достаточности шести красок. Карта называется *кубической*, если все вершины ее графа имеют степень, равную трем. Любую карту можно свести к кубической, заменяя каждую из вершин, степень которой отлична от трех, многоугольником с числом сторон, равным степени этой вершины, и соединяя каждую из его вершин с одной из вершин, которые были смежными с замененной. После раскраски полученной таким образом кубической карты в шесть цветов каждый из искусственных многоугольников снова стягивается к исходной вершине, что в результате дает первоначальную карту, раскрашенную в шесть цветов.

Рассмотрим формулу Эйлера $n - m + r = 2$, справедливую для любой планарной карты с n вершинами, m ребрами и r областями. Сделаем подстановку $n = 2m/3$ (справедливую для кубической карты). Это дает $6(r-2) = 2m$. Так как $6r > 6(r-2) = 2m$, мы доказали, что для раскраски любой кубической карты достаточно шести цветов. Это очевидно для случая $r < 6$. Если $r \geqslant 6$, то должна существовать по крайней мере одна область, ограниченная пятью или меньшим числом ребер. Чтобы убедиться в этом, заметим, что в противном случае подстановка в формулу Эйлера соотношений $3n \leqslant 2m$ (что верно всегда) и $6n \leqslant 2m$ (по предположению) дает $0 \geqslant 6$, т. е. приводит к противоречию. По индукции можно предположить, что все карты из $r-1$ областей допускают раскраску в 6 цветов. Если удалить область карты, ограниченную как минимум шестью ребрами, и продлить ребра соседних с ней областей таким образом, что каждая вершина будет иметь степень три и исходная удаленная область будет покрыта пятью смежными с ней областями, как показано на рис. 22, то можно получить 6-раскрашенную карту и затем восстановить удаленную область, раскрасив ее шестым цветом, не использованным при раскраске каждой из пяти смежных с ней областей.

Отметим, что в задаче о четырех красках требуется только доказать достаточность четырех цветов. Может возникнуть и вопрос о том, как осуществить соответствующую раскраску карты. Это уже конструкторская задача, с которой обычно приходится сталкиваться при реальной раскраске карты. Теоретических методов решения таких задач нет.

Хроматическим числом $\gamma(G)$ графа G называется минимальное число красок, необходимое для такой раскраски вершин графа, чтобы никакие две смежные вершины не оказались окрашенными в один цвет. Эта задача аналогична задаче разделения вершин на подмножества, в каждом из которых ни одна пара вершин не имеет общих ребер. Заметим, что для минимизации числа подмножеств обычно стремятся максимизировать мощность каждого из них. При решении ряда задач полезным оказывается использование так называемого *кликоматического числа* графа $\chi(G)$, понятие которого вытекает из определения хроматического числа. Клика графа G — это его любой максимальный полный подграф (полный подграф, не содержащийся в любом другом полном подграфе графа G). Кликоматическое число графа равно наименьшему числу клик графа, которые включают все его вершины. Хроматическое число графа G из n вершин равно кликоматическому числу графа (называемого дополнением графа G), получаемого из полного графа с n вершинами удалением всех ребер графа G. Справедливость этого утверждения доказана в работе [34].

Приведем примеры использования введенных выше понятий.

Члену факультетской комиссии университета было поручено составить расписание приема n экзаменов у $N \geqslant n$ студентов. Некоторые экзамены можно назначить на одно и то же время, но таким образом, чтобы никакие два экзамена, которые нужно сдавать одному и тому же студенту, не совпали по времени. Задача заключается в определении минимального числа группировок и составлении расписания, не противоречащего поставленным условиям.

В качестве второго примера рассмотрим ситуацию, когда некоторой фирме для каждого из n конечных пунктов доставки груза эпизодически требуется дорогостоящее ремонтное оборудование. Непосредственно связаны дорогами только некоторые из этих конечных пунктов. Поступление требований на оборудование носит случайный характер и труднопредсказуемо. Сроки доставки оборудования на станцию, отсчитываемые от момента поступления требования, лимитированы определенным периодом времени. Временные ограничения могут быть соблюдены только при перевозке оборудования между станциями, соединенными непосредственно. В общем же случае, когда оборудование доставляется транзитом через промежуточные пункты, при имеющейся сети дорог эти ограничения выдержать не удается. Это связано с большими потерями времени из-за дополнительных погрузочно-разгрузочных работ и задержек на промежуточных станциях. Требуется минимизировать количество комплектов ремонтного оборудования, соблюдая при этом следующее условие: при поступлении заявки на обслуживание ни один из агрегатов не должен посылаться через промежуточную станцию.

Третий пример относится к сети городов, расположенных на некоторой авиалинии. В определенных городах резервные двигатели отсутствуют, поэтому их следует погрузить на первый из отправляющихся самолетов для доставки в следующий по маршруту пункт посадки, где нужны эти двигатели. Необходимое требование заключается в том, чтобы по пути в соответствующий пункт доставки ни один из резервных двигателей не был отправлен через пункт промежуточной посадки. Каково минимально необходимое число двигателей и каким образом следует их распределить?

В качестве заключительного примера приведем задачу о небольшом зоопарке, в котором желательно иметь минимальное число клеток и, следовательно, содержать в одной клетке взаимно совместимые виды животных. Каково в этом случае минимальное число клеток?

В работе [49] предложен алгоритм нахождения оценки $\gamma'(G)$ хроматического числа $\gamma(G)$ графа G. Эта оценка удовлетворяет

неравенству

$$\gamma(G) \leqslant y'(G) \leqslant \max_i \min\{d_i + 1, i\},$$

где d_i — степень i-й вершины, причем индексация вершин v_i, $i = 1, \ldots, n$, осуществляется в соответствии с убыванием их степени, т. е. $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$. Показано, что для определенных видов графов различие двух экстремумов в приведенном неравенстве может быть сколь угодно большим.

Алгоритм начинается с формирования подмножества вершин T_1. Для этого сначала выбирают вершину наибольшей степени v_1, затем в порядке убывания степеней последовательно просматривается список вершин и к v_1 добавляется не смежная с ней вершина следующей степени. После этого опять выбирается вершина более низкой степени, не смежная с предыдущими вершинами, и такую операцию повторяют, добавляя каждый раз одну из вершин, не смежную с ранее выбранными вершинами. Полученное подмножество T_1 окрашивается в цвет 1. Формируется следующее подмножество вершин T_2, для чего сначала также выбирается некоторая вершина наибольшей степени, не входящая в T_1, и описанная выше процедура повторяется со списком вершин, не входящих в T_1. После этого вершины полученного подмножества T_2 окрашиваются в цвет 2. Такой процесс продолжается до тех пор, пока каждая из вершин не будет принадлежать определенному подмножеству T_i, $i = 1, \ldots, m$, причем каждое подмножество имеет свой цвет.

5.3. Устойчивость (в связи с раскраской)

Внутренне устойчивым [1]) множеством вершин графа называется множество вершин, никакие два элемента которого не являются смежными. *Коэффициентом внутренней устойчивости* $\alpha(G)$ графа G называется максимальное число вершин графа G, образующих такое множество. Справедливо соотношение $\alpha(G)\,\gamma(G) \geqslant n$. Множество вершин называется *внешне устойчивым* [2]), если каждая из вершин, не входящая в это множество, соединена ребром с некоторой вершиной этого множества. Наименьшее число вершин, обладающих этим свойством, называется *коэффициентом внешней устойчивости* графа G. *Ядром* графа G называется подмножество вершин, которое является внутренне и внешне устойчивым. Граф может иметь как одно, так и несколько ядер. Если граф не содержит цикла нечетной длины, он не имеет ядра [1].

---

[1]) Такое множество называется также независимым.— *Прим. перев.*
[2]) Такое множество называется также *доминирующим*.— *Прим. перев.*

6. НЕКОТОРЫЕ ИЗ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Ниже приведены формулировки широкоизвестных теорем теории графов, которые из-за ограниченного объема данной главы подробно не рассматриваются; читатель может ознакомиться с ними по книгам [4, 17].

Теорема Эйлера (первая теорема теории графов). В любом конечном графе сумма степеней вершин равна удвоенному числу его ребер. (Интересно отметить, что число вершин нечетной степени четно).

Теорема Менгера. Наименьшее число вершин (точек сочленения), удаление которых разделяет две смежные вершины графа (так что каждая из этих вершин будет принадлежать различным компонентам), равно наибольшему числу непересекающихся цепей, соединяющих эти две вершины.

Теорема Кенига. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не имеет циклов нечетной степени. (Это означает, что карта допускает раскраску в два цвета тогда и только тогда, когда каждая вершина имеет четную степень.)

Теорема Хивуда о раскраске карт. Для любого положительного целого числа p хроматическое число графа, который можно уложить на ориентируемой поверхности рода p, имеет верхнюю оценку $(7+\sqrt{1+48p})/2$.

Теорема Брукса. Если k (>2) — максимальная степень любой из вершин графа, не содержащего петель и полных подграфов из $k+1$ вершин, то такой граф является k-раскрашиваемым.

Задача Рамсея. Каково наименьшее целое число $r(m, n)$, для которого каждый граф с $r(m, n)$ вершинами содержит полный граф из m вершин или дополнение полного графа из n вершин? Эта формулировка является обобщением задачи, в которой требуется доказать, что в любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. Известно следующее соотношение [17]:

$$r(m, n) \leqslant \binom{m+n-2}{m-1}.$$

Для решения перечислительных задач теории графов существуют соответствующие теоретические методы. Чтобы познакомить читателя с *теоремой перечисления Пойа*, потребовалось бы несколько страниц; мы отсылаем его к книгам Басакера и Саати [4] и Харари [17].

7. МАТРИЦЫ

7.1. Матричные представления

Одно из направлений теории графов, которое показано на схеме в разд. 1, связано с матричным представлением графов. Существуют различные виды матриц, ассоциированных с графами. Поскольку они задаются в алгебраической форме, для решения многих задач теории графов удобно использовать алгебраические методы.

Ниже приводится перечень наиболее важных матричных представлений графов [1, 37].

1. *Матрица инциденций* A

а. Для неориентированного графа *матрица инциденций* представляет собой матрицу, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — ребрам. Элемент матрицы равен 1, если вершина инцидентна ребру. В противном случае элемент матрицы принимает значение 0. ($a_{ij} = 1$, если v_i инцидентна e_j. В противном случае $a_{ij} = 0$.)

б. Для ориентированного графа элемент матрицы инциденций равен +1, когда вершина, инцидентная дуге, является начальной вершиной дуги (т. е. дуга исходит из этой вершины). Элемент равен —1, когда дуга входит в вершину. Если вершина не инцидентна дуге, то элемент матрицы равен 0.

2. *Матрица циклов* C

а. Для неориентированного графа строки матрицы циклов соответствуют простым циклам графа, а столбцы — его ребрам. Элемент матрицы $a_{ij} = 1$, если цикл C_i содержит ребро e_j. В противном случае $a_{ij} = 0$.

б. Для ориентированного графа $a_{ij} = 1$, —1 или 0 в зависимости от того, одинакова или противоположна ориентация цикла C_i и дуги e_j или же данный цикл вообще не содержит дуги e_j.

3. *Матрица фундаментальных циклов* — это подматрица матрицы циклов, строки которой соответствуют простым циклам, определяемым хордами, связанными с данным покрывающим деревом.

4. *Матрица разрезов* K аналогична матрице циклов и отличается лишь тем, что ее строки соответствуют не циклам, а разрезам.

5. *Матрица фундаментальных разрезов* связана с понятием покрывающего дерева графа. Строки этой матрицы соответствуют разрезам, каждый из которых состоит из ветви дерева и хорд,

соединяющих вершины поддеревьев, которые образуются при удалении этой ветви. Такие разрезы образуют базис в пространстве разрезов.

6. *Матрица смежности вершин* (или просто матрица смежности) **V** представляет собой матрицу, строки и столбцы которой соответствуют вершинам, а элемент матрицы a_{ij} в случае неориентированного графа равен числу ребер, соединяющих вершины i и j. Для ориентированного графа элемент a_{ij} равен числу ребер, направленных от вершины i к вершине j.

7. *Матрица смежности ребер* — матрица, строки и столбцы которой соответствуют ребрам графа, а элемент a_{ij} равен числу вершин, инцидентных двум ребрам i и j.

8. *Матрица путей* **P** связного графа, вершины которого перенумерованы, — это матрица, строки которой соответствуют всем путям из первой вершины в последнюю, а столбцы — ребрам. Для неориентированного графа элемент $a_{ij} = 1$, если путь i содержит ребро j, в противном случае $a_{ij} = 0$. Для ориентированного графа $a_{ij} = 1$, если направление дуги e_j совпадает с ориентацией i-го пути, и $a_{ij} = -1$, если дуга e_j направлена в противоположную сторону. Если же i-й путь не содержит дуги j, то $a_{ij} = 0$.

9. *Матрица путей от каждой вершины к опорной вершине* **D** составляется путем выбора некоторой вершины в качестве опорной вершины покрывающего дерева ориентированного связного графа. Для каждой из остальных вершин существует некоторый путь, направленный от нее к опорной вершине дерева. Тогда элемент матрицы путей от каждой вершины к опорной вершине d_{ij} определяется следующим образом:

$$d_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если } i\text{-я ветвь содержится в } j\text{-м пути} \\ & \text{(к вершине } j\text{) и имеет то же направление, что и путь } j; \\ -1, & \text{если } i\text{-я ветвь содержится в } j\text{-м пути} \\ & \text{(к вершине } j\text{) и имеет направление, противоположное } j\text{-му пути;} \\ 0, & \text{если } i\text{-я ветвь не содержится в } j\text{-м пути.} \end{cases}$$

Заметим, что **D** — квадратная матрица, порядок которой (определяемый числом ветвей) равен $(n - 1)$.

Матричные представления внесли существенный вклад в изучение графов. Детальное рассмотрение соответствующих вопросов выходит за рамки данной главы. Приведем лишь основные теоремы, связанные с матричными представлениями графов:

1. Ранг (максимальное число линейно-независимых столбцов) матрицы инциденций **A** связного графа (ориентированного и неориентированного) с n вершинами равен $(n - 1)$.

2. Ранг матрицы циклов **C** связного графа с m ребрами и n вершинами равен $(m - n + 1)$.

3. Ранг матрицы разрезов связного графа с n вершинами равен $(n-1)$.

4. Ранг матрицы путей **P** равен $(m-n+2-c)$, где c — число независимых циклов в таких разделимых подграфах между конечными вершинами, при исключении которых из графа не удаляется ни одна из конечных вершин.

5. Произведение $\mathbf{AP}'$ матрицы инциденций **A** и матрицы $\mathbf{P}'$, транспонированной к матрице путей **P**, представляет собой матрицу, все строки которой, за исключением первой и последней, имеют нулевые элементы, а все элементы первой и последней строк равны 1.

6. Матрица инциденций **A** ортогональна матрице $\mathbf{C}'$, транспонированной к матрице циклов **C**, полученной при таком же порядке нумерации ребер, как и в матрице инциденций, т. е. $\mathbf{AC}' = \mathbf{0}$.

7. Матрица циклов **C** и матрица разрезов **K** любого графа удовлетворяют соотношению $\mathbf{CK}' = \mathbf{0}$ (условие ортогональности).

8. Квадратная подматрица размера $(n-1) \times (n-1)$ матрицы инциденций связного графа является невырожденной, если столбцы этой подматрицы соответствуют ветвям дерева.

9. Пусть **B** — подматрица матрицы циклов **C** связного графа — содержит $n-m+1$ строк и имеет ранг $n-m+1$. Квадратная матрица B порядка $n-m+1$ является невырожденной тогда и только тогда, когда столбцы этой подматрицы соответствуют множеству хорд некоторого покрывающего дерева данного графа.

10. Невырожденная подматрица размера $(n-1) \times (n-1)$ матрицы инциденций **A** находится во взаимно-однозначном соответствии с покрывающими деревьями графа.

11. Невырожденная подматрица размера $(n-m+1) \times (n-m+1)$ матрицы циклов **C** находится во взаимно-однозначном соответствии с дополнениями покрывающих деревьев графа.

12. Невырожденная подматрица размера $(n-1) \times (n-1)$ матрицы разрезов **K** находится во взаимно-однозначном соответствии с покрывающими деревьями графа.

13. Пусть $\mathbf{A}_s$ — подматрица размера $(n-1) \times m$ матрицы **A**. Разбиение $\mathbf{A}_s$, исходя из хорд и ветвей покрывающего дерева, имеет вид $\mathbf{A}_s = [\mathbf{A}_{11} : \mathbf{A}_{12}]$. Тогда матрица фундаментальных циклов **C** определяется соотношением $\mathbf{C} = [\mathbf{I} : -\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}]$.

14. Если столбцы матриц **A**, **C** и **K** для ориентированного графа построены на основе одинакового упорядочения хорд и ветвей покрывающего дерева (одного и того же для всех матриц), так что $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{11} : \mathbf{A}_{12}]$, $\mathbf{C} = [\mathbf{I} : \mathbf{C}_{12}]$ и $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{11} : \mathbf{I}]$, то справедливы следующие соотношения: $\mathbf{K} = \mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}$ и $\mathbf{K}_{11} = -\mathbf{C}'_{12} = \mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11}$.

15. Матрица $\mathbf{V}^n$ дает число ориентированных маршрутов длины n между любыми двумя вершинами ориентированного графа.

16. Пусть матрица инциденций $\mathbf{A}$ размера $(n-1) \times m$ для связного ориентированного графа (в которой строка, соответствующая опорной вершине, пропущена) разбита соответственно хордам и ветвям покрывающего дерева, т. е. $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{11} : \mathbf{A}_{12}]$. Матрица путей от каждой вершины к опорной вершине связана с $\mathbf{A}_{12}$ соотношением $\mathbf{A}_{12}\mathbf{D} = \mathbf{I}$.

17. Два графа являются изоморфными, если они имеют одни и те же матрицы инциденций с точностью до перестановок строк и столбцов.

18. Определитель невырожденной подматрицы $\mathbf{A}$ равен ± 1.

19. Если граф $G'(V', E')$ получен из графа $G(V, E)$ путем перестановки элементов при взаимно-однозначном соответствии элементов E' элементам V, элементов V' элементам E и при сохранении отношений инцидентности графа G, то матрица смежности ребер для графа G является матрицей смежности вершин для графа G' и матрица смежности вершин для графа G является матрицей смежности ребер для графа G'.

7.2. Пример использования матрицы смежности [47]

Рассмотрим два графа, изображенные на рис. 23. Они имеют приведенные ниже матрицы смежности вершин $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$:

$$G_1 \to \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G_2 \to \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Следующее отображение показывает, что графы G_1 и G_2 изоморфны:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & & G_2 \\ 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 2 \\ 4 & \to & 5 \\ 5 & \to & 4 \\ 6 & \to & 6 \end{array}$$

Чтобы получить граф G_2, достаточно сделать лишь перестановку вершин графа G_1. В матрицах смежности осуществляется одновременно перестановка столбцов и строк, которую можно

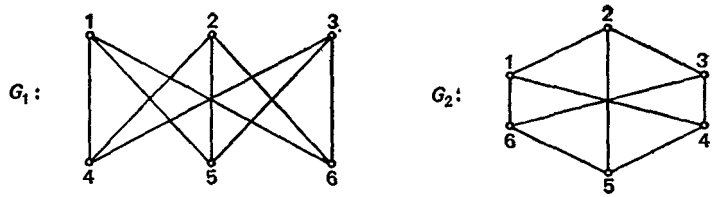


Рис. 23.

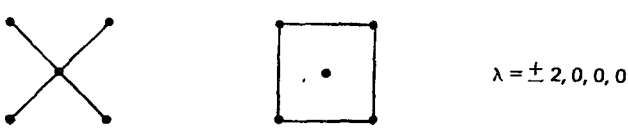
выполнить, используя преобразование подобия и матрицу перестановок. $\mathbf{A}_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}_1\mathbf{P}'$, где

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ или } p_{ij} = \delta_{p(i),\,j} \text{ (символ Кронекера)},$$

и $\mathbf{P}'$ — матрица, транспонированная к матрице перестановок $\mathbf{P}$.

Следовательно, G_1 и G_2 изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая матрица перестановок $\mathbf{P}$, что $\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}\mathbf{A}_2\mathbf{P}'$. Но нахождение матрицы $\mathbf{P}$ может быть нелегким делом, и оказывается справедливым следующее утверждение.

Изоморфность G_1 и G_2 означает, что $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ имеют одинаковые собственные значения. Однако это условие не является достаточным, так как, например, два изображенных ниже графа тоже имеют одинаковые собственные значения.



Возможно дальнейшее развитие этих идей и уточнение условий для получения полной характеристики изоморфизма графов.

7.3. Матроиды

Матроиды приобрели важную роль в изучении графов. Существует много вариантов определения матроидов (см. книгу Уилсона [40] и его статью в журнале American Mathematical Monthly [50]). В одном из вариантов матроид определяется как конечное множество ребер вместе с совокупностью непустых подножеств

(называемых циклами), обладающих тем свойством, что никакой цикл не содержит другого цикла, и если два различных цикла имеют общее ребро, то в объединении этих двух циклов существует цикл, который не содержит этого ребра. Имеются такие разновидности матроидов, как однородные, графические, кографические, представимые, алгебраические, трансверсальные, гаммоиды и матроиды Фано. Можно показать, что некоторые типы матроидов взаимосвязаны. Весьма важные характеристики графических матроидов приведены в серии статей Татта. Данный тип описания матроидов связан с вопросом о том, когда заданная матрица может быть матрицей циклов или матрицей разрезов графа.

8. ДВА ПРИМЕРА ПРИЛОЖЕНИЙ

8.1. Использование матриц при решении производственных проблем

Матрицы графов нашли применение при исследовании многих практических задач. Определенная продукция изготовляется из некоторой совокупности исходных продуктов, каждый из которых может использоваться для производства нескольких видов конечной продукции. Количество единиц каждого исходного продукта, необходимое для производства некоторого вида конечной продукции, известно. Соответствующий граф состоит из множества вершин, представляющих исходные продукты, и другого множества вершин, соответствующих видам конечной продукции. Количество дуг, направленных от некоторой вершины первого множества к соответствующей вершине второго множества, показывает количество единиц данного исходного продукта, требуемых для производства единицы определенной конечной продукции. Петля у каждой вершины, соответствующей исходному продукту, означает, что данный исходный продукт используется не только для производства конечной продукции, но и для собственных нужд данного производства. В результате получаем двудольный граф с кратными дугами. Для этого ориентированного графа формируется матрица смежности вершин, ненулевые элементы которой стоят только в последнем столбце, соответствующем конечной продукции, и на главной диагонали, где они равны единице.

Затем составляется новая матрица, строки которой соответствуют всем вершинам графа, а столбцы — кратности поставок. Элементы этой матрицы показывают количество поставляемых единиц каждого исходного продукта для собственных нужд данного производства и для производства конечной продукции.

В результате перемножения этих двух матриц получается матрица товарооборота для всего рассматриваемого периода

времени. Графотеоретическое представление является одним из методов системного описания исследуемых производственных процессов.

8.2. Использование графов при моделировании [4]

Впечатляющим примером применения теории графов при решении различных задач может служить головоломка, известная как *мгновенное помешательство*. Шесть граней каждого из четырех кубиков раскрашены в четыре цвета. Так как кубик имеет шесть граней, то у каждого из них окажутся раскрашенными в одинаковый цвет более одной грани. Раскраска всех кубиков различна, т. е. не должно быть двух одинаково раскрашенных кубиков. Требуется поставить кубики друг на друга так, чтобы на каждой боковой стороне получившейся прямоугольной призмы были представлены все четыре цвета (не обязательно в одинаковом порядке).

Конечно, эта головоломка может и не иметь решения. Предположим, например, что у каждого кубика все три грани, имеющие общую вершину, раскрашены в один и тот же цвет. Тогда этот цвет встретится на гранях призмы по меньшей мере восемь раз, а не четыре, как того требует условие задачи. Поэтому в таком случае головоломка не имеет решения.

Решение задачи начинается с того, что каждой из четырех точек, расположенных в углах некоторого квадрата, ставится в соответствие один из четырех цветов. Затем кубикам присваиваются индексы от 1 до 4. Каждый кубик имеет три пары противоположных граней. Берется первый кубик и проводятся линии, соединяющие вершины, каждая из которых ассоциирована с определенной парой противоположных граней. Этим трем линиям присваивается число 1. То же самое делается для каждого из оставшихся трех кубиков. Получается всего 12 линий, три из которых помечены цифрой 1, три следующие — цифрой 2 и т. д.

После этого решение задачи разбивается на две стадии. Сначала решается задача для одной пары противоположных прямоугольных граней призмы, а затем — для второй. При этом в каждой паре граней каждый кубик используется один раз и каждый из цветов появляется дважды — по одному разу в каждом прямоугольнике. Таким образом, наносятся четыре точки, ассоциированные с каждым цветом, и на полученном графе выбираются четыре линии, помеченные цифрами 1, 2, 3, 4 (поэтому каждый кубик используется один раз). Однако линии выбираются таким образом, чтобы каждая точка была инцидентна двум линиям. Сделав это, аналогичную процедуру повторяют для другой пары прямоугольных граней. При решении задачи для второй пары прямоугольных граней может потребоваться корректировка выбора линий для

первой пары граней. Решения для двух частей задачи независимы. Получив решение на первой стадии, второе решение находят путем вращения кубиков, использованных в первом решении, вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных граней. При этом можно легко добиться чередования цветов на противоположных прямоугольных гранях призмы. Таким образом, задача оказывается решенной.

9. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Хотя в теории графов еще много нерешенных задач, затруднительно выделить среди них одну или две в качестве наиболее важных. Задача о четырех красках остается, по-видимому, наиболее интересной; она привлекла к себе большое внимание, которое не ослабевает, и даже ее решение не сможет привести к существенному изменению активности исследований в этой области.

Среди наиболее важных и успешно развиваемых направлений следует отметить исследования Рота и других научных сотрудников Массачусетского технологического института по разработке общей теории дискретной математики, включающей теорию графов.

В первую очередь будет продолжаться и получит дальнейшее развитие применение теории графов при моделировании практических задач, так как количественные определения при решении социальных задач и задач управления требуют использования дискретных моделей. Однако использование теории графов связано в большей степени с наукой об управлении, а не с такими дисциплинами, как социология, антропология, и другими приложениями, в которых, несмотря на некоторый прогресс, методы количественных измерений остаются пока наиболее трудными или спорными. Графы могут найти применение при моделировании поведения индивидуумов, однако трудно сказать, в какой форме и для решения каких задач следует этого ожидать. Нет сомнения в том, что прогресс в области теории графов, комбинаторики и в других областях дискретной математики способствует развитию современной математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berge C., Theory of Graphs and its Applications, Wiley, New York, 1961. [Имеется перевод: Берж К. Теория графов и ее применение.— М.: Мир, 1962.]
2. Berge C., Ghouila-Houri A., Programming, Games and Transportation Networks, Wiley, New York, 1965.
3. Бессонов Л. А. Элементы теории графов (учебное пособие Всесоюзного заочного энергетического института).— М.: 1964.

4. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. Пер. с англ.— М.: Наука, 1974.
5. Capobianco M., Frechen J. B., Krolik M., Eds., Recent Trends in Graph Theory, Springer-Verlag, New York, 1971.
6. Chartrand G., Kapoor S. F., Eds., The Many Facets of Graph Theory, Springer-Verlag, New York, 1969.
7. Domschke W., Kurzeste Wege in Graphen: Algorithmen, Verfahrensvergleiche, Verlag Anton Hain Meisenheim Am Glan, 1972.
8. Dynkin E. B., Uspenski W. A., Multicolor Problems, D. C. Heath and Company, Boston, 1952.
9. Elmaghraby S. E., Some Network Models in Management Science, Springer-Verlag, New York, Lecture Notes in O. R. and Math. Systems, No. 29, 1970.
10. Erdos P., Katona G., Eds., Theory of Graphs, Proceedings of the Colloquium held at Tihany, Hungary in September, 1966, Academic Press, New VYork, 1968.
11. Fiedler M., Ed., Theory of Graphs and its Applications, Proc. Symp. Smolenice, Czech., June 17—20, 1963, Academic Press, New York, 1964.
12. Ford L. R., Fulkerson D. R., Flows in Networks, Princeton University Press, 1962. [Имеется перевод: Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях.— М.: Мир, 1966.]
13. Frank H., Frisch I. T., Communication, Transmission and Transportation Networks, Addison-Wesley, New York, 1971.
14. Grossman I., Magnus W., Groups and Their Graphs, Random House, New York, 1964.
15. Granbaum B., Convex Polytopes, Interscience Publishers, New York, 1967.
16. Harary F., Ed., Graph Theory and Theoretical Physics, Academic Press, New York, 1967.
17. Harary F., Ed., Graph Theory, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1969. [Имеется перевод. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.]
18. Harary F., Ed., Proof Techniques in Graph Theory, Academic Press, New York, 1969. (Proceedings of the Second A n Arlor Graph Theory Conference, February, 1968.)
19. Harary F., Beineke L., Eds., A Seminar on Graph Theory, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1967.
20. Harary F., Cartwright D., Structural Models, An Introduction to the Theory of Directed Graphs, Wiley, New York, 1965.
21. Harary F., Norman R. Z., Graph Theory as a Mathematical Model in Social Science, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1953.
22. Hu T. C., Integer Programming and Network Flows, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1969. [Имеется перевод: Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.]
23. Kim W. H., Chien R. T., Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia University Press, New York, 1962.
24. König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Chelsea, New York, 1950.
25. Lietzmann W., Visual Topology, American Elsevier, New York, 1965.
26. Liu C. L., Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill, 1968.
27. Moon J. W., Topics on Tournaments, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1968.
28. Ore O., Graphs and Their Uses, Random House, New York, 1963.
29. Ore O., Theory of Graphs, Colloquium Publications, Vol. 38, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1961. [Имеется перевод: Оре О. Теория графов.— М.: Наука, 1968.]
30. Ore O., The Four Color Problem, Academic Press, New York, 1967.
31. Read R. C., Ed., Graph Theory and Computing, Academic Press, New York, 1972.

32. Ringel G., Farbungsprobleme auf Flachen und Graphen, VEB Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
33. Rosenstiehl P., Ed., Theory of Graphs, International Symposium, Rome, July, 1966, Gordon and Breach, New York, 1967.
34. Roy B., Algebre Moderne et Theorie des Graphes, Tome 1, Notions et resultats fondamentaux, Dunod, Paris, 1969.
35. Roy B., Algebre Moderne et Theorie des Graphes, Tome 2, Applications et problemes specifiques, Dunod, Paris, 1969.
36. Saaty T. L., Optimization in Integers and Related Extremal Problems, McGraw-Hill, New York, 1970. [Имеется перевод: Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы.— М.: Мир, 1973.]
37. Seshu S., Reed M. B., Linear Graphs and Electrical Networks, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1961.
38. Tutte W. T., Recent Progress in Combinatorics, Proceedings of the Third Waterloo Conference on Combinatorics, May, 1968, Academic Press, New York, 1969.
39. Tutte W. T., Connectivity in Graphs, University of Toronto Press, 1966.
40. Wilson R. J., Introduction to Graph Theory, Oliver and Boyd, Edinburgh, and Academic Press, New York, 1972. [Имеется перевод: Уилсон Р. Введение в теорию графов.— М.: Мир, 1977.]
41. Appel K., Haken W., A Proof of the Four Color Theorem, *Discrete Mathematics*, 16, 2, 179—180 (October 1976).
42. Beineke L., Harary F., The Thickness of a Complete Graph, *Canadian J. Math.*, 17, 850—859 (1965).
43. Colombo U., Dui circuiti nei grafi completi. Boll. Un. Mat. Ital., 19, 153—170 (1964).
44. Edmonds J., On the Surface Duality of Linear Graphs, *J. of Res. Nat. Bureau of Stand.*, 96B (January — Juny 1965).
45. Holt A. W., Program Organization and Record Keeping for Dynamic Storage Allocation, *Comm. ACM*, 4, 422—431 (October 1961); также в Information Processing, 539—544 (1962).
46. Kendall M., Babington Smith B., On the Method of Paired Comparisons, *Biometrika*, 33, 239—251 (1940).
47. Kuhn W. W., An Algorithm for Graph Isomorphism Using Adjacency Matrices, Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, 1971.
48. Saaty T. L., Thirteen Colorful Variations of Guthrie's Four Color Conjecture, *The Am. Math. Monthly*, 79, 1, 2—43 (January 1972).
49. Welsh D. J., Powell M. P., An Upper Bound for the Chromatic Number of a Graph and its Application to Time-Tabling Problems, *Computer J.*, 10, 85—86 (1967).
50. Wilson R. J., An Introduction to Matroid Theory, *The Am. Math. Monthly*, 80, 5, 500—525 (May 1973).

II-4. Потоки в сетях

Э. Джонсон[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе рассматриваются некоторые алгоритмы и теоретические методы, используемые при решении задач о потоках в сетях (ЗПС), обсуждаются направления их дальнейшего развития и приводятся примеры практического применения. В список литературы включены работы, ознакомившись с которыми читатель сможет приступить к изучению более поздних публикаций. Исторический обзор соответствующих исследований здесь не приведен; при изложении материала основное внимание уделяется тому, чтобы должным образом отразить последние достижения в рассматриваемой области. Однако нельзя не отметить книгу Форда и Фалкерсона [11], во многом определившую эти достижения.

Сначала рассматриваются две частные задачи о потоках в сетях: о кратчайшем пути и максимальном потоке. Обе задачи представляют самостоятельный интерес, однако более важно их рассмотрение в качестве сопряженной пары задач линейного программирования, поочередное решение которых предусматривается в прямо-двойственном методе (ПДМ). Особое внимание здесь уделяется эффективным способам реализации этого метода.

Связь задач о потоках в сетях с задачами линейного программирования (ЛП) показана при изложении алгоритмов элиминирования (устранения) дефекта, симплекс-метода (СМ) и двойственного симплекс-метода (ДСМ).

Рассматриваемые приложения ориентированы в основном на задачи планирования проектов. В заключительной части главы обсуждаются более общие типы потоков: потоки с выигрышами, многополюсные и многопродуктовые потоки.

2. КРАТЧАЙШИЕ ПУТИ

2.1. Определения

Простым примером ЗПС является задача выбора наиболее экономичного пути для доставки единицы транспортируемого продукта из узлов множества S_0, называемых *источниками*, в узлы другого множества S_T, называемые *стоками*. Для решения

[1)] Ellis L. Johnson, IBM, Thomas J. Watson Research Center.

такой задачи при условии неотрицательности стоимостей транспортировки по всем коммуникациям сети разработаны весьма эффективные алгоритмы.

Пусть задана сеть G, состоящая из множества узлов V и множества дуг E, в которой каждая дуга $e \in E$ соответствует упорядоченной паре различных узлов i и j. Дуга $e = (i, j)$ направлена из i в j. *Потоком* называется вектор $(x_e: e \in E)$, удовлетворяющий некоторой *совокупности ограничений*, определяемых с помощью понятия чистого потока f_i из узла i, где

$$f_i = \sum_{e=(i,j)} x_e - \sum_{e=(k,i)} x_e.$$

Если f_i — отрицательная величина, то $-f_i$ есть чистый поток в узел i. Ограничения на поток для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in S_0} f_i = 1, && f_i \geqslant 0, \quad i \in S_0, \\ &f_i = 0, && i \notin S_0 \cup S_T, \\ &\sum_{i \in S_T} f_i = -1, && f_i \leqslant 0, \quad i \in S_T. \end{aligned}$$

В более общих ЗПС ограничения на поток могут иметь вид $f_i = b_i$, $i \in V$.

Стоимость «транспортировки» единицы продукта вдоль дуги e равна c_e. Цель состоит в минимизации суммарной стоимости потока $\sum c_e x_e$. Если все $c_e \geqslant 0$, то решение задачи сводится к нахождению некоторой цепи от источника к стоку. *Путь* представляет собой последовательность $i_0, e_1, i_1, e_2, i_2, \ldots, i_{L-1}, e_L, i_L$, т. е. последовательность чередующихся узлов и дуг, в которой $e_k = (i_{k-1}, i_k)$ или $e_k = (i_k, i_{k-1})$. *Цепью* называется простой ориентированный путь, т. е. путь, в котором все узлы $i_0, i_1, \ldots, i_L$ различны, а каждая дуга входит в путь в соответствии с ее ориентацией: $e_k = (i_{k-1}, i_k)$. Поэтому более точно данную задачу следует определить как задачу нахождения кратчайшей цепи.

2.2. Алгоритм решения задачи о кратчайшей цепи из источника в сток

Допустим, что все $c_e \geqslant 0$. Приведенный ниже алгоритм представляет собой несложную модификацию алгоритма Дейкстры для задачи о кратчайшем пути [7, 24]. (Для общего ознакомления с некоторыми задачами о кратчайших путях и методами их решения следует обратиться к работе [8].)

Шаг 0. Выбрать в качестве перспективного множества узлов множество $S_c = S_0$ и положить $d_i = 0$ для $i \in S_0$ и $d_i = \infty$ для $i \notin S_0$.

Шаг 1. Выбрать узел $i^* \in S_c$, которому соответствует наименьшее значение d_i $(i \in S_0)$. Найденная таким образом величина d_i соответствует кратчайшему пути из некоторого источника в узел i^* (длиной дуги является c_e), а дуга e_i (определенная для всех узлов $i \in S_c$, кроме источников) есть последняя дуга пути. Если i^* — сток, то процедура поиска кратчайшего пути заканчивается.

Шаг 2. Просмотреть дуги $e = (i^*, j)$ и заменить пометку d_j на $\min \{d_j, d_i + c_e\}$. Если d_j была равна ∞, ввести узел j в S_c. Если d_j уменьшилась, ввести обозначение $e_j = e = (i^*, j)$.

Шаг 3. Удалить i^* из S_c и перейти к шагу 1, если множество S_c не пусто. На этом поиск кратчайшего пути заканчивается.

Использование приведенного алгоритма при отыскании кратчайшего пути может не привести к достижению стока. Это означает, что в данном случае ориентированного пути от источника к стоку не существует. Опуская условие окончания вычислений на шаге 1, можно найти кратчайшую цепь от источников ко всем остальным достижимым узлам. Общее число операций на шаге 2 имеет верхнюю оценку порядка $|E|$ (т. е. равную числу дуг) при условии, что структура графа позволяет найти дуги, исходящие из каждого узла, не просматривая весь список ребер.

На шаге 1 число операций, необходимых для однократного просмотра множества S_c с целью отыскания кратчайшей дуги, не превосходит величины порядка $|V|^2$. При $|V|^2 < E$ этот объем операций можно сократить за счет использования бинарных сортировок [24]. Тогда верхняя оценка общего числа операций равна $|E|(2 \log |V| - \log |E|)$. Однако на шаге 3 соответствующей оценкой будет $|V| \log |V|$. Практически оба шага требуют значительно меньшего количества операций.

Рассмотренная задача решается путем просмотра узлов в обратном порядке, т. е. при движении от стока к источнику. При этом используют дуги e_j и полагают $x_e = 1$ до тех пор, пока не будет достигнут источник, для которого $e_j = 0$.

Среди задач о кратчайшем пути, условия которых характеризуются наличием некоторых дуг с отрицательной стоимостью, можно выделить класс задач, которые поддаются решению с помощью потоковых методов (разд. 5). Однако их нельзя решить, используя алгоритм, рассмотренный в данном разделе. Чтобы выделить этот класс задач, введем понятие *ориентированного цикла*, определение которого аналогично определению цепи, за исключением того что $i_0 = i_L$. *Отрицательный ориентированный цикл* — это такой ориентированный цикл, в котором сумма стоимостей, ассоциированных с ребрами, отрицательна. Отсутствие в заданной сети отрицательно ориентированного цикла свидетель-

ствует о том, что соответствующая задача может быть решена с помощью потоковых методов. При наличии таких циклов в сети задача намного усложняется (становится эквивалентной задаче о коммивояжере).

3. МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОТОКИ

3.1. Аугментальные цепи

К особому классу можно отнести задачи определения максимально возможного потока из источника в сток при условии, что каждая дуга e характеризуется некоторой пропускной способностью α_e^0, т. е. поток x_e должен удовлетворять ограничению вида $0 \leqslant x_e \leqslant \alpha_e^0$. Требования, налагаемые на поток, имеют вид

$$\sum_{i \in S_0} f_i = Q, \qquad f_i \geqslant 0, \quad i \in S_0,$$

$$f_i = 0, \qquad i \notin S_0 \cup S_T,$$

$$\sum_{i \in S_T} f_i = -Q, \qquad f_i \leqslant 0, \quad i \in S_T,$$

и задача заключается в максимизации Q. Стоимости дуг в этой задаче не учитываются.

Ниже будет изложен алгоритм определения максимального потока. Сначала рассмотрим один из полезных для наших целей приемов (который будет использован в разд. 4 при анализе общей задачи о потоках в сетях). Потоки x_e будут рассматриваться не в явном виде, а учитываться косвенно — путем смещения (пересчета) оценок пропускных способностей исходных и обращенных дуг (т. е. кратных дуг противоположной ориентации). Заданная пропускная способность дуг α_e^0 при этом остается постоянной, а символ α_e будет использоваться для обозначения смещенных (пересчитанных) пропускных способностей, которые в процессе реализации алгоритма изменяются.

Пусть некоторая дуга $e = (i, j) \in E$ считается заданной. Расширим множество E, включив в него *противоположно направленную дугу* $e' = (j, i)$ так, чтобы между дугами e и e' существовало взаимно-однозначное соответствие. Важно зафиксировать направления соответствующих дуг, т. е. если e — заданная дуга, а e' — противоположно направленная дуга, то e является *обращенной дугой* по отношению к e', а e' — *обращенной* по отношению к e. В общем случае $\alpha_e = \alpha_e^0 - x_e$ и $\alpha_{e'} = x_e$, где x_e — значение потока на некоторой итерации алгоритма.

Аугментальной цепью называется такая цепь из источника в сток, каждая дуга которой имеет положительную пропускную способность. *Увеличение потока* вдоль некоторой аугментальной

цепи осуществляется за счет уменьшения смещенных пропускных способностей каждой дуги цепи на θ и увеличения на θ пропускных способностей всех обращенных дуг. При этом величина потока из источника увеличивается на θ и на столько же возрастает поток к стоку. Наибольшее значение θ, не нарушающее ни одно из ограничений $0 \leqslant x_e \leqslant \alpha_e^0$, равно величине минимальной (смещенной) пропускной способности вдоль цепи.

В начале вычислений величине потока приписывается нулевое значение, и каждая заданная дуга e имеет $\alpha_e = \alpha_e^0$, а пропускная способность каждой обращенной дуги равна нулю. При этом $Q = 0$. Можно искать аугментальную цепь, используя процедуру просмотра узлов, аналогичную той, которая использовалась при нахождении кратчайших путей. Действительно, можно использовать такой же алгоритм, как и в разд. 1, полагая $c_e = 0$, если $\alpha_e = \alpha_e^0$, и $c_e = \infty$, если $\alpha_e = 0$. Снова приведем этот алгоритм, используя терминологию Форда и Фалкерсона [11].

Шаг 0. Пусть источники *помечены*, но *не просмотрены*, а все остальные узлы *не помечены*.

Шаг 1. Выбрать любой помеченный, но не просмотренный узел i.

Шаг 2. Просмотреть все дуги $e\,(i, j)$ с пропускной способностью $\alpha_e > 0$, соединяющие узел i с еще не помеченными узлами j. Приписать пометки узлам j и отметить дуги $e_j = e = (i, j)$. Теперь узел i помечен и просмотрен, узлы j помечены, но не просмотрены. Если при этом сток оказался помеченным, то аугментальная цепь найдена. В противном случае после просмотра по всем дугам (i, j) перейти к шагу 3.

Шаг 3. Пусть узел i помечен и просмотрен. Перейти к шагу 1 и повторять шаги алгоритма до тех пор, пока не останется помеченных и непросмотренных узлов. На этом поиск аугментальной цепи заканчивается.

В соответствии с ранее принятой терминологией помеченные, но не просмотренные узлы представляют собой множество перспективных узлов. Шаг 1 алгоритма достаточно прост, так как все d_i для помеченных узлов i равны нулю. Просмотр узлов еще проще, ибо все d_i равны либо нулю, либо бесконечности.

Если реализация алгоритма завершается на шаге 2, то аугментальная цепь найдена. Увеличение потока вдоль этой цепи приводит к возрастанию величины Q, и эта цепь перестает быть аугментальной, так как смещенная пропускная способность по крайней мере одной из дуг уменьшается до нуля, тогда как для соответствующей обращенной дуги она достигает предельной величины, т. е. для одной из заданных дуг $\alpha_e = 0$.

При условии что все начальные значения пропускных способностей дуг целочисленны, циклическое повторение шагов 1—3 и последовательное увеличение потока приводят в итоге к окон-

чанию вычислений на шаге 3. Сходимость алгоритма обусловлена тем, что приращения потока имеют целочисленные значения и величины пропускных способностей дуг тоже остаются целочисленными. При каждом последовательном приращении потока его величина возрастает по меньшей мере на единицу и в конце концов определяется максимально возможный поток Q, существование которого и предполагалось при формулировке задачи.

Нетрудно убедиться, что приведенный алгоритм позволяет найти аугментальную цепь, если она есть в данной сети. Вполне понятно также, что некоторый поток, которому соответствует максимально возможное значение Q, не допускает существования аугментальной цепи. Однако не так легко убедиться в том, что при отсутствии аугментальной цепи в сети полученный поток будет равен максимально возможному значению Q. Чтобы доказать это, обратимся к теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе, которую можно интерпретировать как частный случай теоремы двойственности линейного программирования.

Предварительно обратим внимание на следующее обстоятельство. В рамках изложенного подхода аугментальная цепь может включать дугу, являющуюся по отношению к заданной дуге обращенной, и поэтому приращение потока вдоль цепи может уменьшать величину потока по заданной дуге. Таким образом, если иметь в виду только заданные дуги сети, определенная ранее аугментальная цепь является аугментальным путем.

3.2. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе

В основу данного раздела положена работа Форда и Фалкерсона ([11], гл. 1). Если в результате реализации алгоритма сформировано множество помеченных узлов L, то для заданных дуг $e = (i, j)$, $i \in L$, $j \notin L$, и $e = (i, j)$, $i \notin L$, $j \in L$, соответственно должны выполняться условия $x_e = \alpha_e^0$ и $x_e = 0$. Пусть $C = \{e\colon i \in L, j \notin L\}$ (рис. 1). Тогда $\sum_{e \in C} \alpha_e^0 \geqslant Q$, так как не существует пути, по которому можно пропустить из L к дополнению L^c множества L поток большей величины. Поэтому величина $\sum_{e \in C} \alpha_e^0$, связанная с разрезом (L, L^c), есть верхняя граница для величины Q.

Требуется доказать, что $Q = \sum_{e \in C} \alpha_e^0$. Интуиция подсказывает, что поток $\sum_{e \in C} \alpha_e^0$ проходит из L к L^c и должен дойти до стока, так как нет обратного потока от L^c к L. Читатель, интересующийся

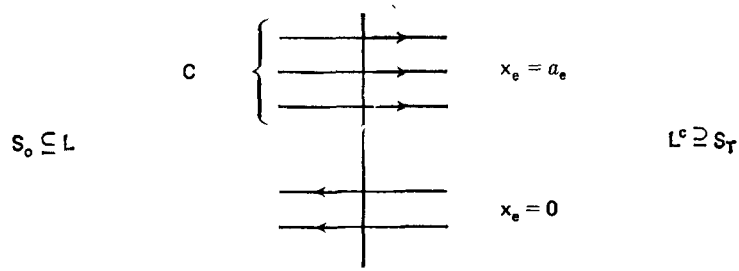


Рис. 1.

исчерпывающим и точным доказательством этой теоремы в чисто сетевой интерпретации, может обратиться к работе Форда и Фалкерсона [11].

3.3. Алгоритм Эдмондса — Карпа решения задачи о максимальном потоке [9]

Хотя алгоритм, рассмотренный в разд. 3.1, обычно сходится, число операций приращения потока может оказаться соизмеримым с числовым значением Q. В данном разделе приводится метод нахождения максимального потока, для реализации которого требуется не более чем $\frac{1}{2}|V||E|$ операций приращения.

В алгоритме, описанном в разд. 3.1, длины дуг принимались равными нулю или бесконечности. Такие же значения имели и расстояния до всех рассматриваемых узлов. Предположим теперь, что мы приписываем каждой дуге (с положительной пропускной способностью) любое значение длины, скажем 1 вместо 0. Эта длина не связана с заданной стоимостью дуги, если последняя ей приписана, и расстояния до узлов используются только на шаге 1 для определения очередности просмотра узлов. Фактически нужный узел будет выбран и в том случае, если просто взять узел, который был помечен первым. Поэтому, если алгоритм нахождения кратчайшего пути, описанный в разд. 2.2, используется для сети, все дуги которой имеют единичную длину, можно фиксировать множество перспективных узлов в специальном списке и добавлять новые узлы в его нижнюю часть, помещая узел i^* на шаге 1 в начало списка.

Предельное число операций приращения потока определяется из тех соображений, что в процессе нахождения кратчайшего пути ни один из узлов не приближается к источнику, и всякий раз, когда пропускная способность дуги достигает нулевого значения (и поэтому ее длина становится бесконечной), обращенная дуга не будет дугой кратчайшего пути до тех пор, пока рас-

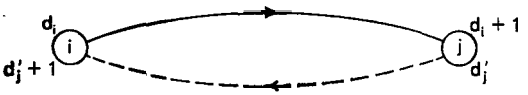


Рис. 2.

стояние между двумя смежными узлами не увеличится на 2 единицы. Если дуга (i, j) (рис. 2) является дугой аугментальной цепи и ее пропускная способность достигает нулевой величины, то $d_j = d_i + 1$. Далее приписывание дуге (i, j) бесконечной длины не уменьшает пометку d_j. Если дуга (j, i) является дугой аугментальной цепи, то она должна быть дугой кратчайшего пути к узлу i и поэтому $d'_i = d'_j + 1$. Эта новая пометка d'_i по крайней мере на 2 единицы больше той, которая была при отсутствии дуги (i, j). Таким образом, заданная и обращенная дуги могут иметь нулевую пропускную способность только $\frac{1}{2} | V |$ раз, так как ни один из узлов не может быть удален от источника на расстояние, большее чем $| V |$. (Если это расстояние равно ∞, то оно уже не изменяется.) Поскольку каждое увеличение потока приводит к появлению некоторой новой дуги с нулевой пропускной способностью и имеется $| E |$ дуг, то для реализации метода требуется не более $\frac{1}{2} | V | | E |$ операций приращения потока.

4. ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ

4.1. Поток минимальной стоимости

В разд. 2 рассматривалась задача нахождения кратчайшего пути. Эта задача эквивалентна задаче минимизации стоимости единичного потока, а также задаче о потоке минимальной стоимости при неограниченной пропускной способности всех дуг сети. В разд. 3 было введено ограничение на величину пропускной способности дуг, однако задача заключалась только в нахождении максимального потока безотносительно к его стоимости. Такую задачу можно решить методом последовательного выявления аугментальных цепей (разд. 3.1). Эти цепи могут быть построены способом (разд. 3.3), который можно интерпретировать как метод последовательного определения кратчайших путей, когда длина каждой дуги равна нулю или бесконечности.

Для решения формулируемой ниже задачи о потоке минимальной стоимости будет использован алгоритм, при котором поочередно решаются задачи о кратчайшем пути и о максимальном потоке. Шаги алгоритма, связанные с нахождением кратчайшего пути и максимального потока, обеспечивают выполнение итера-

ционных процедур решения двойственной и прямой задач. Оценками требуемого числа операций на этапах решения двойственной и прямой задач могут служить соответственно величины $|V|^2$ и $|V|^3$, так что сложность реализации этих шагов приблизительно одинакова.

В отличие от ранее изложенного варианта ПДМ в данном случае несколько итерационных процедур решения двойственной задачи объединяются, что устраняет последовательность непрорывов. В данном случае задача о кратчайшем пути решается при неотрицательных длинах всех дуг сети.

Решение *задачи о потоке минимальной стоимости* состоит в определении действительных чисел x_e, $e \in E$, удовлетворяющих условиям

$0 \leqslant x_e^0 \leqslant \alpha_e^0$, $e \in E$ (ограничения на пропускные способности дуг);

$f_i = b_i$, $i \in V$ (внешние ограничения на поток),

и минимизирующих $\sum c_e x_e$. Величина f_i должна быть в данном случае равна

$$f_i = \sum_{e=(i,\,j)} x_e - \sum_{e=(k,\,j)} x_e,$$

где первая сумма представляет собой поток, выходящий из узла i, вторая сумма — поток, входящий в узел i. Если b_i — положительное число, то ограничение $f_i = b_i$ означает, что должен существовать некоторый чистый поток, выходящий из узла i, и b_i является предложением в узле i. Если b_i — отрицательное число, то $-b_i$ — спрос в узле i.

Для того чтобы в такой постановке задача имела решение, необходимо, чтобы сумма $\sum b_i$ для всех узлов сети была равна нулю, т. е. в целом для сети спрос должен быть равен предложению. Однако из-за ограничений на пропускные способности дуг задача может и не иметь решения.

Поиск решения начинается с выбора некоторых значений x_e^0, $0 \leqslant x_e^0 \leqslant \alpha_e^0$, $e \in E$, и π_i^0, $i \in V$. Если они заранее не заданы, можно принять их равными нулю. Сначала все невязки, обусловленные исходными значениями x_e^0 и π_i^0, переносят в ограничения, полагая

$$x_e^0 = \alpha_e^0, \text{ если } \pi_i^0 - \pi_j^0 > c_e, \text{ или}$$

$$x_e^0 = 0, \quad \text{если } \pi_i^0 - \pi_j^0 \leqslant c_e,$$

где $e = (i, j)$. После этого все узлы $i \in V$ разбиваются на следующие группы: *внешние* узлы, для которых $f_i^0 < b_i$; *внутренние* узлы, для которых $f_i^0 > b_i$; *насыщенные* узлы, для которых $f_i^0 = b_i$.

Как и в методе, описанном в разд. 3.1, каждой дуге $e = (i, j)$ сопоставляется обращенная дуга $e' = (j, i)$. При заданном потоке

x_e дуга e имеет пропускную способность $\alpha_e^0 - x_e$, а пропускная способность обращенной дуги равна $(-x_e)$. В процессе решения меняется не величина потока, а пропускные способности (одновременно для заданной и обращенной дуг). Стоимость, приписанная обращенной дуге, равна $(-c_e)$.

4.2. Шаг алгоритма, связанный с отысканием кратчайшего пути

Независимо от того, является ли дуга $e = (i, j)$ заданной или обращенной, припишем ей длину $\lambda_e = c_e - (\pi_i - \pi_j)$, если только пропускная способность дуги не равна нулю. В случае нулевой пропускной способности длина дуги считается бесконечной. После этого процесс решения осуществляется в соответствии с алгоритмом отыскания кратчайшего пути (разд. 2.2) с использованием значений λ_e, причем множество источников относят к внешним узлам, а множество стоков — к внутренним.

В описываемой ниже процедуре максимизации потока производятся изменения величины π_i, $i \in V$. Значения d_i должны удовлетворять условиям

$$d_i + \lambda_e \geqslant d_j, \ e = (i, j) \text{ и } \alpha_e > 0.$$

Поэтому, если $\pi_j' = \pi_i - d_i$, то

$$\lambda_e' = c_e - (\pi_i' - \pi_j') = c_e - (\pi_i - \pi_j) + d_i - d_j = d_i + \lambda_e - d_j \geqslant 0.$$

Таким образом, замена пометки π_i на π_i' приводит к появлению таких новых неотрицательных значений длин λ_e', что появляется по крайней мере один путь нулевой длины из источника в сток. Этот путь находится с помощью алгоритма определения кратчайшего пути, поскольку для каждой дуги этого пути $d_i + \lambda_e = d_j$, так что $\lambda_e' = 0$.

Если реализация алгоритма определения кратчайшего пути завершается, когда путь к стоку еще не найден, то задача не имеет решения. Причина этого та же, что и в случае задачи о максимальном потоке: помеченные узлы образуют разрез, а множество L, содержащее источники, таково, что дуги, идущие от L к L^c, отсутствуют. Даже если не учитывать длину c_e' и использовать процедуру отыскания максимального потока, описанную в разделе 3.1, помеченным окажется то же самое множество узлов L, и доказательство того, что задача не имеет решения, будет точно таким же, как и в случае задачи о максимальном потоке, которая рассмотрена в разд. 3.

Подробности этого доказательства здесь не приводятся; однако следует указать, что в рассматриваемом случае может быть задан некоторый начальный поток и некоторый набор спросов и предложений окажется выполненным. Несмотря на это, в том случае,

если нет никакого пути из источника или внешнего узла в сток или внутренний узел, дальнейшего уменьшения невязок добиться невозможно.

4.3. Шаг алгоритма, связанный с максимизацией потока

На данном шаге принимаются во внимание только те дуги, для которых $\lambda_e = 0$. Такие дуги образуют по крайней мере одну аугментальную цепь, а именно кратчайший путь, способ нахождения которого рассмотрен в разд. 4.2. После окончания процедуры определения максимального потока аугментальной цепи больше не существует, так что между источником и стоком нет цепи, состоящей из дуг с $\lambda_e = 0$.

Если в процессе последовательных приращений некоторый поток f_i достигает значения b_i, то соответствующий узел сразу же становится насыщенным и перестает быть источником или стоком. Так как имеется только $|V|$ узлов, такой случай может встретиться не более чем $|V|$ раз. Когда это происходит, процедуру максимизации потока в принципе следует начинать заново, однако в практических случаях, в частности когда насыщается сток, процесс решения можно продолжить без повторения этой процедуры.

Если все заданные значения пропускных способностей α_e^0, потоков x_e^0 и внешних ограничений b_i целочисленны, каждое приращение потока определяется целым числом. Так как верхние оценки числа необходимых операций как для шага, связанного с решением двойственной задачи (о кратчайшем пути), так и для шага, связанного с решением прямой задачи (о максимальном потоке), имеют величину порядка $|V|^3$ или меньше и поскольку при чередовании этих шагов каждое решение прямой задачи приводит к уменьшению невязки прямой задачи на целое число, можно сделать оценку сверху и для общего количества требуемых операций. Эта оценка в $|V|^3$ раз больше, чем начальная невязка прямой задачи, определяемая суммированием невязок для всех узлов.

С другой стороны, каждый шаг в решении двойственной задачи приводит к улучшению значения ее целевой функции. Если все заданные значения стоимостей c_e, а также пометок π_i^0 в начальном решении целочисленные, изменение значения целевой функции выражается целым числом. Поэтому другая оценка сверху для наибольшего числа операций равна разности между начальным и оптимальным значениями целевой функции двойственной задачи, умноженной на $|V|^3$.

Для тех случаев, когда параметры и прямой, и двойственной задач не являются целочисленными, достоверных оценок максимального числа операций не имеется [34]. Вопрос о существова-

нии алгоритма с полиномиальной оценкой верхней границы для требуемого числа вычислительных операций остается пока открытым. В работе [34] показано, что для обычных алгоритмов (прямой симплекс-метод и прямо-двойственный метод) можно привести примеры, когда оценка максимального числа операций не является полиномиальной.

4.4. Дополняющая нежесткость

Для доказательства того, что приведенный выше алгоритм действительно приводит к оптимальному решению, можно использовать условия теоремы ЛП о дополняющей нежесткости. В данном случае эти условия заключаются в том, что поток x_e, $e \in E$, является оптимальным, если существует некоторое число π_i, $i \in V$, такое, что x_e удовлетворяет ограничению по пропускной способности дуги и внешнему ограничению и, кроме того, для каждой дуги $e = (i, j)$ при этом значении x_e выполняется одна из пар следующих соотношений:

$$x_e = 0 \text{ и } \pi_i - \pi_j < c_e \text{ или}$$

$$0 \leqslant x_e \leqslant \alpha_e \text{ и } \pi_i - \pi_j = c_e \text{ или}$$

$$x_e = \alpha_e \text{ и } \pi_i - \pi_j > c_e.$$

В начале решения эти соотношения выполняются. На шаге, связанном с максимизацией потока, используются только те дуги, для которых $\pi_i - \pi_j = c_e$, и выполняются неравенства $0 \leqslant x_e \leqslant \alpha_e$. На шаге, связанном с нахождением кратчайшего пути, при $x_e = 0$ рассматривается только заданная дуга и нала-

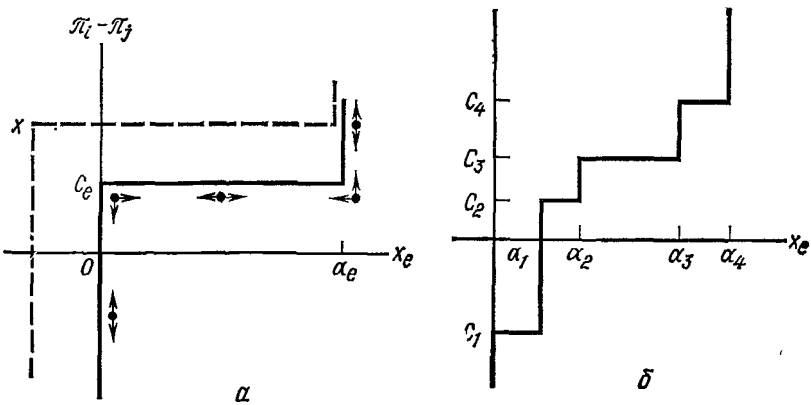


Рис. 3.

гается условие $\pi_i - \pi_j \leqslant c_e$. При $x_e = \alpha_e$ рассматривается только обращенная дуга (j, i) и удовлетворяется ограничение $\pi_j - \pi_i \leqslant -c_e$. Если $0 < x_e < \alpha_e$, то $\pi_i - \pi_j = c_e$ (и $\pi_j - \pi_i = -c_e$), так что $\lambda_e = 0$. Поэтому $d_i = d_j$, так как оба вида рассматриваемых дуг (i, j) и (j, i) имеют нулевую длину. Следовательно, при $0 < x_e < \alpha_e$ величина $\pi_i - \pi_j$ на шаге решения двойственной задачи не изменяется. Возможные изменения показаны на рис. 3, *а*. Рис. 3, *б* соответствует случаю, когда стоимость, ассоциированная с некоторой дугой, представляет собой кусочно-линейную выпуклую функцию от x_e. Рассматриваемый случай можно пояснить, используя четыре дуги, стоимости и пропускные способности которых соответственно равны c_1 и α_1; c_2 и $\alpha_2 - \alpha_1$; c_3 и $\alpha_3 - \alpha_2$; c_4 и $\alpha_4 - \alpha_3$. Можно дать и такую трактовку: изменения переменных прямой задачи соответствуют сдвигу в горизонтальном направлении, а изменения переменных двойственной задачи — сдвигу по вертикали.

4.5. Алгоритм элиминирования дефекта

Рассмотренный выше прямо-двойственный алгоритм действительно позволяет использовать любое начальное решение x_e^0, π_i^0, но при этом все невязки решения сразу же переносятся на ограничения, накладываемые на поток, и тем самым для каждой дуги обеспечивается выполнение условий теоремы о дополняющей нежесткости, показанных на рис. 3, *а*. Начальные процедуры поиска решения можно построить по-другому, что, безусловно, представляет практический интерес. С другой стороны, к решению задачи можно приступить, начиная непосредственно с заданных значений x_e^0 и π_i^0, как это будет показано ниже (см. также книгу Форда и Фалкерсона [11]). Рассматривая этот вопрос, будем считать, что $f_i = b_i$ для всех узлов i.

Определим для каждой дуги e положение соответствующей ей точки $(x_e, \pi_i - \pi_j)$ по отношению к сплошной линии, показанной на рис. 3, *а*. Дуга считается *дефектной*, если точка не находится на этой линии. Если, например, точка расположена слева от линии, то временно заменяют стоимость c_e на $\pi_i - \pi_j$, а нижнюю границу потока (первоначально нулевую) — на x_e. Другими словами, в дальнейшем будет возможно только увеличение x_e и уменьшение $\pi_i - \pi_j$. Пунктирная линия на рис. 3, *а* соответствует новым условиям дополняющей нежесткости. Таким путем добиваются, чтобы «дефект» ни одной из переменных не увеличивался, т. е. чтобы точка не удалялась от линии истинных условий дополняющей нежесткости.

Возьмем любую дефектную дугу $e = (i, j)$. Когда соответствующая ей точка лежит слева от сплошной линии, увеличим x_e до значения $x_e = 0$, если $\pi_i - \pi_j \leqslant c_e$, или до значения $x_e = \alpha_e$,

если $\pi_i - \pi_j > c_e$. При этом получаем избыточный поток, входящий в узел j, и дефицит потока в узле i. Пусть j — источник, а i — сток; используем описанный ранее прямо-двойственный алгоритм. При этом отпадает необходимость увеличения x_e, следует лишь считать узел j источником, а узел i — стоком. Во всяком случае, задача решается так же, как и раньше, за исключением того что за одну итерацию «обрабатывается» только одна дефектная дуга.

5. КРАТЧАЙШИЕ ПУТИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

В разд. 2 было сделано допущение о том, что длина дуги неотрицательна. В данном разделе это допущение не используется, но для того чтобы алгоритм позволял найти кратчайшую цепь, сеть в этом случае не должна содержать циклов отрицательной длины. Однако алгоритм обнаруживает такие циклы и может использоваться для их отыскания, если они существуют.

Обычно рассматривают два варианта задачи: с одним источником и одним стоком (т. е. задачу нахождения кратчайшего пути из заданного источника в заданный сток) и задачу выявления отрицательного цикла.

Исследуя первую задачу как потоковую, начнем с того, что каждой дуге с отрицательной длиной припишем единичную пропускную способность и будем рассматривать единичный поток. В соответствии с принятым ранее правилом введения обращенных дуг заменим некоторую дугу $e = (i, j)$ с отрицательной длиной $c_e < 0$ дугой (j, i), для которой стоимость равна $(-c_e)$. Однако при этом получим избыточный единичный поток, выходящий из узла i, и избыточный поток такой же величины, входящий в узел j. После такой замены всех дуг с $c_e < 0$ в сети возникает некоторый поток, равный f_i. В данной задаче первоначально все b_i равны нулю, за исключением источника и стока, для которых эта величина равна $+1$ и -1 соответственно. Ясно, что сумма невязок не превышает $|V|^2$.

Применение алгоритма, описанного в разд. 4, позволяет получить решение при использовании не более $|V|^2$ процедур приращения потока, причем каждое приращение требует не более одного решения задачи о кратчайшем пути с неотрицательными длинами дуг (разд. 2).

Следует сделать замечание относительно двойственных переменных этой задачи. Если некоторое число λ_i вычитается из длин всех дуг, выходящих из узла i, и прибавляется к длинам всех дуг, входящих в узел i, то это не приводит к изменению задачи, так как любой простой путь, если он вообще имеет место, входит в некоторый узел и выходит из него только один раз; исключение представляют лишь источники и стоки.

Получающиеся в результате этой операции длины дуг равны $c'_e = c_e - \lambda_i + \lambda_j$. Двойственная задача ЛП (разд. 6.4) заключается в нахождении таких λ_i, $i \in V$, при которых $c'_e \geqslant 0$ для всех заданных дуг e [29].

Цикл отрицательной длины можно легко обнаружить на заключительном этапе реализации алгоритма, отыскивая цепь, включающую заданную дугу e, для которой $c_e < 0$ и $c'_e = c_e - (\lambda_i - \lambda_j)$ также меньше нуля. Выразив длины дуг через c'_e, мы убеждаемся, что этот цикл имеет отрицательную длину, так как при наличии потока вдоль каждой дуги $c'_e = 0$, а при $c_e < 0$ имеет место неравенство $c'_e \leqslant 0$. Общая же длина всего цикла при выражении ее как через c_e, так и через c'_e будет одной и той же.

Реализация алгоритма может завершиться определением пути от источника к стоку, имеющего отрицательную длину. В этом случае путь является оптимальным, если вдоль цикла отрицательной длины не существует потока. Даже если путь от источника к стоку имеет отрицательную длину, нельзя сказать, является ли он оптимальным, если в цикле отрицательной длины существует ненулевой поток. Всякий раз, когда это имеет место, изложенный метод будет обладать тем недостатком, что найденный путь, вообще говоря, может оказаться неоптимальным. В таких случаях потоковые методы непригодны, и решение задачи становится намного сложнее.

Задача, в которой требуется только отыскать отрицательный цикл, аналогична рассмотренной, за исключением того, что $b_i = 0$ для всех $i \in V$, поэтому не существует источников или стоков. При такой постановке задачи рассмотренный алгоритм всегда позволяет отыскать один или несколько отрицательных циклов, имеющихся в сети.

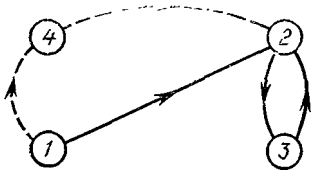
6. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1. Базисные решения и деревья

Задача линейного программирования формулируется в следующем виде: минимизировать $\mathbf{z} = \mathbf{cx}$ при ограничениях $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{0} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \boldsymbol{\alpha}$. В данном разделе мы рассмотрим связь специального класса задач линейного программирования с задачами о потоках в сетях и приведем некоторые результаты.

Задачи ЛП, которые мы будем рассматривать, всегда имеют оптимальные решения с целочисленными значениями x_j, если только $\mathbf{b}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ целые. Матрицы $\mathbf{A}$ являются абсолютно унимодулярными [18]. Это позволяет получить решение ряда интересных комбинаторных задач [13].

Предположим, что в задаче линейного программирования элементы матрицы $\mathbf{A}$ равны либо 0, либо $+1$, либо -1 и каждый



Узлы	Дуги				
1	1			1	
2	-1	1	-1		-1
3		-1	1		

[0 0 0 -1 1]

Рис. 4.

столбец содержит не больше двух ненулевых элементов, причем этими элементами должны быть $+1$ и -1. В соответствии с такой матрицей A построим сеть, каждый узел которой соответствует определенной строке матрицы A. Пусть каждому столбцу e матрицы A соответствует дуга, выходящая из узла i и входящая в узел j, если $a_{ik} = +1$ и $a_{jk} = -1$ соответственно. Столбцы, содержащие только один ненулевой элемент, будут соответствовать дугам с одним концом, или *свободным дугам* (рис. 4). Сформулированная задача линейного программирования будет аналогична ЗПС для такой сети. Матрица A называется *матрицей инциденций узлы — дуги*. Единственное условие, которое делает данную формулировку более общей по сравнению с обычными сетевыми формулировками, состоит в наличии свободных дуг. Такие дуги можно заменить дугами, имеющими два узла, путем расширения системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ за счет избыточного уравнения, получаемого сложением двух произвольно взятых строк матрицы A и изменением знаков в обеих частях этого уравнения. На рис. 4 соответствующие изменения представлены в виде дополнительной строки матрицы и пунктирной линии на графе. В такой формулировке данная задача полностью совпадает с сетевой задачей, рассмотренной в разд. 4.

В задачах линейного программирования введение избыточной строки было бы противоестественным. Мы, как правило, делаем прямо противоположное, т. е. исключаем избыточные строки до тех пор, пока A не станет матрицей ненулевого ранга, равного числу строк. В данном случае легко заметить, что A является такой матрицей тогда и только тогда, когда каждая связная компонента соответствующей сети имеет хотя бы одну свободную дугу. Если заданная сеть не содержит свободных дуг, то такие дуги вводятся путем вычеркивания строк матрицы A. Для связной компоненты без свободных дуг любая строка является избыточной, и ее можно вычеркнуть. Если сумма b_i для узлов i в такой связной компоненте равна нулю, то одно из уравнений действительно избыточно. В противном случае система уравнений несовместна и не имеет решения.

В дальнейшем будем считать, что матрица **A** имеет ненулевой ранг r-го порядка, где r — число строк в исходной системе ограничений. Так как связные компоненты сети могут рассматриваться раздельно, будем считать также, что соответствующая сеть состоит только из одной компоненты, в которой есть по крайней мере одна свободная дуга.

Базисным решением задачи линейного программирования называется такое решение x, при котором столбцы **A**, соответствующие x_j, $0 < x_j < \alpha_j$, являются линейно-независимыми. Чтобы определить базисные решения сетевых задач, необходимо знать, какие множества столбцов матрицы **A** являются линейно-независимыми, если **A** представляет собой матрицу инцидентности узлов и дуг. Для этого потребуется ввести некоторые дополнительные понятия.

Деревом называется связная сеть, не содержащая свободных дуг и не имеющая циклов. Таким образом, в дереве между каждой парой узлов существует единственный простой путь. Если дереву принадлежит одна свободная дуга, то это дерево называется корневым деревом, а свободная дуга — *корнем* этого дерева.

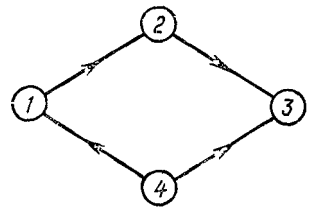
Теорема 1. Множество столбцов матрицы инцидентности узлов и дуг является линейно-независимым тогда и только тогда, когда дуги и свободные дуги соответствуют столбцам одного или более деревьев или корневых деревьев.

Доказательство. Чтобы ознакомиться с исчерпывающим доказательством этой теоремы, следует обратиться к книге Данцига [6]. Ниже оно будет изложено только в общих чертах.

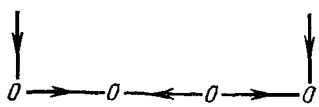
Введем понятие *A-цикла*. Он может представлять собой либо цикл в соответствии с ранее данным определением (простой путь, конец которого совпадает с началом), либо *двухкорневой путь* (простой путь со свободными дугами на обоих концах). Формулировка теоремы эквивалентна утверждению о том, что A-цикл соответствует минимальным зависимым множествам столбцов матрицы **A**. Эта эквивалентность вытекает из того факта, что корневое дерево не содержит A-цикла, а при удалении любой дуги из A-цикла образуется дерево или корневое дерево.

Легко видеть, что A-циклы действительно соответствуют зависимым столбцам матрицы **A**. Поэтому для сети, соответствующей любому множеству независимых столбцов матрицы **A**, A-циклы являются запрещенными. На рис. 5 показан пример цикла и двухкорневого пути, иллюстрирующий линейные комбинации, необходимые для того, чтобы показать зависимость столбцов матрицы $\mathbf{A}_j$.

Формулировка обратной теоремы эквивалентна утверждению о том, что если A-циклы отсутствуют, то столбцы матрицы **A** независимы. Этот факт иллюстрируется корневым деревом (рис. 6).

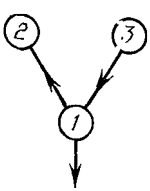


Узлы	Дуги				
	+1	+1	−1	+1	
1	1			−1	=0
2	−1	1			=0
3		−1	−1		=0
4			1	1	=0



Узлы	Дуги					
	+1	+1	−1	+1	−1	
1	−1	1				=0
2		−1	−1			=0
3			1	1		=0
4				−1	1	=0

Рис. 5.



Узлы	Дуги		
1	+1	+1	−1
2		−1	
3			+1

Рис. 6.

Действительно, квадратная подматрица, соответствующая корневому дереву, является треугольной. Доказательство этого утверждения связано с доказательством простой леммы о том, что дерево, состоящее более чем из одного узла, имеет по крайней мере две концевые вершины, одна из которых не является корневой. Концевая вершина (конец) дерева — это вершина, инцидентная только одной дуге дерева. Таким образом, строка, соответствующая концу дерева, имеет только один ненулевой элемент. При удалении этой концевой вершины дерева и инцидентной ей дуги остается корневое дерево с меньшим числом элементов; матрица, соответствующая этому дереву, получается путем вычеркивания строки и столбца из исходной матрицы.

6.2. Смежные вершины

В предыдущих разделах сформулированы необходимые и достаточные условия соответствия некоторого потока базисному решению задачи, или, другими словами, его соответствия некоторой вершине многогранника решений. В данном разделе рассматриваются условия смежности двух таких вершин, т. е. их инцидентности одному и тому же ребру многогранника решений. Условия смежности представляют интерес при изучении методов ЛП, так как при использовании симплекс-метода (СМ) осуществляется переход от некоторой вершины к смежной с ней другой вершине многогранника решений.

Относящиеся к рассматриваемому вопросу результаты обобщаются в следующей теореме.

Теорема 2. Поток x соответствует некоторой вершине многогранника решений P тогда и только тогда, когда дуги e_j, для которых $0 < x_j < \alpha_j$, не образуют ни одного A-цикла. Два таких потока $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ соответствуют смежным вершинам многогранника решений тогда и только тогда, когда множество дуг e, для которых $x_e^1 \neq x_e^2$, содержит единственный A-цикл.

Доказательство. Напомним, что A-цикл представляет собой либо цикл, либо двухкорневой путь. Первая часть теоремы эквивалентна теореме 1.

Чтобы показать общую схему доказательства второй части теоремы, допустим, что $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ — потоки, соответствующие вершинам многогранника решений, и множество дуг e, для которых $x_e^1 \neq x_e^2$, содержит один A-цикл. Пусть a — дуга этого A-цикла. В том случае, если величина x_a фиксирована в интервале между значениями x_a^1 и x_a^2 и каждое значение x_e при $x_e^1 = x_e^2$ установлено в соответствии с этим общим значением, определен некоторый единственный поток. Величина этого потока x соответствует точке, лежащей на отрезке прямой, соединяющей точки $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$. Эта точка может находиться где-то посредине между точками, соответствующими двум другим значениям потока, только в том случае, если $x_e = x_e^1 = x_e^2$ для всех e, т. е. $x_e^1 = x_e^2$, что противоречит условию. Следовательно, отрезок между точками $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ прямой должен быть ребром многогранника решений.

Обратная теорема доказывается аналогичным образом.

6.3. Прямой симплекс-метод

При реализации прямого симплекс-метода осуществляются последовательные переходы от одного допустимого решения прямой задачи к улучшенному допустимому решению, т. е. при

сохранении условия

$$0 < x_k < \alpha_k \text{ при } c_k = \pi_i - \pi_j, \text{ где } e_k = (i, j).$$

Поэтому, как только удовлетворяются два других условия

$$x_k = 0 \text{ при } c_k \geqslant \pi_i - \pi_j \text{ и}$$

$$x_k = \alpha_k \text{ при } c_k \leqslant \pi_i - \pi_j,$$

полученное решение является оптимальным.

При обсуждении симплекс-метода следует обратить внимание на два момента. Во-первых, таблицы, используемые при реализации симплекс-метода, фактически отражают переходы от одного базиса к другому. Следовательно, каждому изменению переменных прямой задачи может соответствовать несколько возможных изменений переменных двойственной задачи (вследствие вырожденности прямой задачи). Поэтому в данном случае прямой симплекс-метод рассматривается с точки зрения перехода от одной вершины к другой вершине многогранника решений, а не от одного базиса к другому.

Во-вторых, следует поставить вопрос о том, происходит ли переход от одной вершины к другой именно вдоль ребра многогранника решений, т. е. смежны ли вершины. По отношению к прямому СМ этот вопрос эквивалентен такому же вопросу применительно к алгоритму решения задачи о максимальном потоке.

Рассмотрим для простоты случай, когда свободные дуги отсутствуют (при наличии таких дуг необходимы лишь незначительные изменения в рассматриваемом подходе).

Ясно, что поток будет оптимальным тогда и только тогда, когда не существует цикла, в котором поток можно изменить, уменьшая его общую стоимость. Если принять, как и ранее, правило, в соответствии с которым всякий раз, когда поток вдоль некоторой дуги положителен, вводится обращенная дуга, и всякий раз при насыщении исходная дуга удаляется, то можно убедиться в том, что поток является оптимальным тогда и только тогда, когда в рассматриваемой сети нет (ориентированного) цикла отрицательной длины [27]. В разд. 5 обсуждался способ нахождения такого цикла. Была рассмотрена также роль двойственных переменных. Итак, можно поставить в соответствие узлам i числа π_i и заменить c_e на $c'_e = c_e - (\pi_i - \pi_j)$ для $e = (i, j)$, не изменяя при этом длины цикла. Таким образом, двойственные переменные используются для того, чтобы наглядно показать оптимальность решения, получаемого при выполнении условия $c'_e \geqslant 0$ для всех дуг e. В противном случае цикл отрицательной длины существует, и увеличение потока в нем будет приводить к перенасыщению некоторой дуги, прорывающей этот цикл. В случае целочисленных параметров (включая коэффициенты стоимости c_e) сходимость алгоритма доказывается исходя из того, что в процессе итераций

величина потока не только приближается к оптимальному значению, но, кроме того, всегда изменяется на целое число.

Фактически рассмотренный метод не является симплекс-методом, так как получаемое решение может оказаться небазисным, но даже если оно и будет базисным, его изменения не обязательно связаны с переходами между смежными вершинами многогранника решений.

Модификация этого метода, приближающая его к симплекс-методу, состоит в следующем. Выберем любую из дуг с отрицательной приведенной стоимостью c'_e (например, с наибольшим отрицательным значением c'_e). После этого любая другая приведенная отрицательная стоимость временно считается равной нулю (можно попытаться увеличить исходную стоимость соответствующей дуги, с тем чтобы обратить в нуль ассоциированную с этой дугой приведенную стоимость). Теперь для выбранной дуги с отрицательным значением c'_e, например $e = e_0 = (i_0, j_0)$, будем считать L_0 стоком, а j_0 — источником и найдем кратчайший путь из j_0 в i_0. Если расстояние увеличивается до значения $-c'_{e_0}$, то указанная процедура прекращается и осуществляется изменение двойственной переменной $\pi_i = \pi_i - d_i$, после которого c'_{e_0} становится равной нулю. В результате получаем меньшее число дуг с отрицательной приведенной стоимостью. Иначе говоря, отыскивается кратчайший путь в i_0 и при этом делаются такие изменения двойственных переменных, при которых c'_{e_0} остается отрицательной, но теперь от j_0 к i_0 будет существовать путь нулевой длины, так что можно осуществить изменение потока в отрицательном цикле. Производим допустимые изменения потока и повторяем указанную процедуру либо для одной и той же дуги e_0, либо для некоторой другой дуги с отрицательной стоимостью. Чтобы изменить поток, можно применить методы максимизации потока из разд. 3, используя только те дуги, которые имеют нулевую приведенную стоимость. Вопрос о том, используем ли мы фактически симплекс-метод, эквивалентен вопросу о процедурах, осуществляемых на шагах максимизации потока.

Ясно, что если мы начинаем с $c'_e = 0$ для каждой дуги e, для которой $0 < x_e < \alpha_e$, то при использовании этого метода указанное условие соблюдается. Вопросы, касающиеся связи с симплекс-методом, состоят в следующем: всегда ли такие дуги образуют корневой лес и осуществляем ли мы переход к смежному корневому лесу, как описано в разд. 5.2. Эти вопросы имеют отношение только к тому, что происходит на шаге максимизации потока, и применительно к задаче о максимальном потоке на них можно ответить так, как это будет сделано в разд. 6.5. Аналогичные замечания можно сделать и относительно прямо-двойственного алгоритма или алгоритма элиминирования дефекта (разд. 4).

6.4. Двойственный симплекс-метод

Задача, двойственная к ЗПС, интересна сама по себе, что видно из приведенного в разд. 7 примера, в котором исходная задача по существу является двойственной к ЗПС.

В этом случае теоремы о базисных решениях весьма отличны от тех, которые были рассмотрены для исходной задачи, но их доказательства аналогичны и поэтому опускаются. Для дальнейшего обсуждения требуются некоторые дополнительные определения. Как и ранее, рассмотрим задачу минимизации $z = \mathbf{cx}$ при ограничении в виде равенства $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\alpha \geqslant \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, причем все свободные переменные в явном виде входят в матрицу $\mathbf{A}$ и представлены в сети дугами с одной концевой вершиной. Допустим, что матрица $\mathbf{A}$ имеет ненулевой ранг r-го порядка, где r — число строк в исходной системе ограничений, т. е. каждая связная компонента сети имеет по крайней мере одну свободную дугу. Ранее в разд. 6.1 было дано определение *корневого леса*. *Максимальный корневой лес* определяется как такой корневой лес, в котором каждый узел принадлежит дереву и каждое дерево имеет корень.

Теорема 3. Решение π_i, $i \in V$, двойственной задачи является ее базисным решением тогда и только тогда, когда дуги с нулевой приведенной стоимостью $c'_e = c_e - \pi_i + \pi_j$ образуют максимальный корневой лес. Решению прямой задачи соответствуют $x_e = \alpha_e$, если $c'_e < 0$, $x_e = 0$, если $c'_e > 0$, и произвольное значение x_e при $c'_e = 0$. Существование максимального корневого леса, использующего дуги e с $c'_e = 0$, означает, что ограничения $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ могут быть выполнены, но величина потока x_e при этом может оказаться недопустимой.

Теорема 4. Два базисных решения двойственной задачи π^1 и π^2 соответствуют смежным вершинам многогранника решений двойственной задачи тогда и только тогда, когда дуги, имеющие нулевые приведенные стоимости при π^1 и π^2, не образуют максимального корневого леса, но существует по крайней мере одна другая дуга, присоединение которой к данному множеству приводит к появлению максимального корневого леса.

При использовании двойственного симплекс-метода сохраняется максимальный корневой лес с нулевыми приведенными стоимостями, причем, за исключением дуг, входящих в лес, все дуги имеют допустимые параметры и удовлетворяют условиям теоремы о дополняющей нежесткости. Начнем итерацию с выбора некоторой дуги, обязательно принадлежащей корневому лесу и имеющей поток x_e вне допустимых границ $(0, \alpha_e)$. Затем, используя лишь

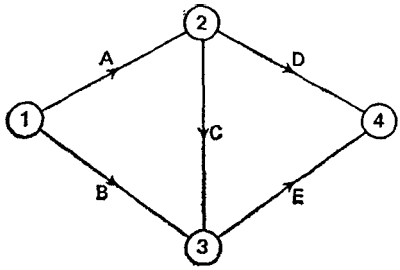


Рис. 7.

дуги с нулевой приведенной стоимостью, направим максимально возможный поток по этой дуге. Если, например, $x_e < 0$, $e = (i, j)$, будем считать j источником, а i — стоком и применим алгоритм максимизации потока из разд. 3, используя, однако, лишь дуги с нулевой приведенной стоимостью. При этом можно предусмотреть, чтобы в любой из остальных дуг с недопустимым потоком величина потока не удалялась от граничного значения.

После того как закончен шаг максимизации потока, можно перейти к изменению двойственных переменных. Это изменение заключается в увеличении или уменьшении на одну и ту же величину всех пометок π_k на узлах k деревьев, остающихся без корня при удалении дуги e. Увеличение или уменьшение этих пометок π_k производится в зависимости от потока по дуге e. Если, например, $x_e < 0$, $e = (i, j)$ и узел j принадлежит такому некорневому дереву, как на рис. 7, то увеличивают π_j и все остальные узлы этого дерева формируют путем удаления дуги e. Прекращение увеличения π_j происходит потому, что некоторой дуге, имевшей ранее положительную приведенную стоимость (в противном случае она была бы использована на шаге максимизации потока), теперь приписана нулевая приведенная стоимость, и эта дуга направлена от дерева, для которого изменяются π_k. Так как мы имеем максимальный корневой лес, то теперь можно изменить поток в цикле или двухкорневом пути так, чтобы сделать $x_e = 0$, тогда как изменением двойственных переменных устанавливается $c'_e = 0$. Итак, теперь мы имеем максимальный корневой лес с нулевой приведенной стоимостью, и каждая из дуг, не принадлежащих лесу, является допустимой, т. е. $0 \leqslant x_e \leqslant \alpha_e$, и удовлетворяет условиям теоремы о дополняющей нежесткости.

Вопрос о том, является ли решение прямой задачи базисным, в данном случае можно не рассматривать, так как наше внимание сосредоточено на двойственной задаче.

Исследование двойственных методов решения выполнено в работе [1].

6.5. Базисные решения

Вопрос о том, остается ли значение потока базисным для прямой задачи, имеет отношение к тому шагу алгоритма, на котором осуществляется максимизация потока. Поэтому основное внимание мы уделим проблеме сохранения решения в качестве базисного для задачи о максимальном потоке в сети с ограниченной пропускной способностью дуг.

При использовании простого алгоритма, рассмотренного в разд. 3.1, решение может быть сохранено в качестве базисного за счет того, что предпочтение отдается дугам e, для которых $0 < x_e < \alpha_e^0$. В соответствии с правилами, которые использовались в разд. 3, предпочтение отдается дугам e, имеющим, как и обращенные дуги e', положительную пропускную способность. Чтобы соответствующее решение было базисным, эти дуги не должны формировать цикла, а также образовывать путь от источника к источнику или от стока к стоку.

Допустим, что каждая связная компонента этого множества дуг представляет собой дерево. Тогда, если узел j принадлежит такому дереву, то на шаге 2 алгоритма, рассмотренного в разд. 3.1, проводится нумерация узлов этого дерева и для их достижения (из узла j) используются дуги дерева. При этом дерево, состоящее из дуг e_j, которое образуется на шаге 2, будет либо содержать деревья, состоящие из дуг, для которых $0 < x_e < \alpha_e^0$, либо не пересекаться с ними.

В работе [23] показаны преимущества использования тройных пометок для фиксации деревьев при такой ситуации. В работе [15] такая расстановка пометок была успешно использована при реализации прямого симплекс-метода, а в работе [32] сообщается о двукратном увеличении скорости вычислений, достигаемой при использовании таких пометок. Кроме того, в публикациях [14] и [32] описаны результаты многочисленных испытаний и способы разработки высокоэффективных программ. По-видимому, эти результаты свидетельствуют о том, что прямой симплекс-метод требует наименьшего объема памяти и минимальных затрат машинного времени. Улучшенный способ расстановки пометок, в котором используются только две пометки, описан авторами упомянутой выше работы [15] в статье [14]. Для ознакомления со сравнительными характеристиками других вычислительных методов можно обратиться к работам [2] и [26].

Проблема сохранения базисного решения при использовании алгоритма Эдмондса — Карпа (разд. 3.3) оказывается более сложной. Кратчайший путь, определяемый длиной ребер, может оказаться несовместимым с правилом предпочтения дуг, для которых $0 < x_e < \alpha_e^0$. Требуется дополнительная модификация алгоритма, и, по-видимому, целесообразно использовать следующую проце-

дуру. Для каждого узла i сохраняется пометка d_i, так что d_i никогда не увеличивается (d_i приблизительно равна числу ребер на пути от источника к узлу i). Затем используется алгоритм нахождения кратчайшего пути, но когда новый узел i исключается из списка возможных узлов, пометка d_j на дереве, состоящем из дуг, с $0 < x_e < \alpha_e^0$, включая узел i, заменяется на пометку $\max\{d_j, d_i\}$.

7. ПРИЛОЖЕНИЯ

Многие приложения методов решения сетевых задач описаны в работах, приведенных в списке литературы к данной главе [3, 5, 10, 25, 33, 35]. Наиболее характерными из них являются создание транспортных сетей и сетей связи, а также задача о назначениях. Многие другие области применения сетевых методов не связаны с решением задач этого класса [35]. В данном разделе мы подробно остановимся на некоторых деталях, рассматривая пример, в котором исходная задача является двойственной по отношению к ЗПС. Это пример применения метода критического пути для планирования проектов [см. 11, 25].

Задача состоит в определении таких моментов начала и завершения взаимосвязанных работ, при которых весь проект выполняется в заданный срок, а определенные работы оказываются завершенными прежде, чем начнутся некоторые другие. Для того чтобы дать основные идеи, рассмотрим простой пример и представим задачу как сетевую.

Пусть разработка проекта включает пять видов работ, A, B, C, D и E. При этом работе A должна быть завершена прежде, чем начнутся работы C или D, а B и C должны быть закончены до начала работы E. На рис. 8 дуги соответствуют моментам окончания и начала работ. Предположим, что нормальное время выполнения работ для A, B, C, D, E составляет соответственно 30, 25, 1, 20 и 22 единицы времени.

Допустим, что работа C не может быть выполнена в более короткий срок, а завершение работ A, B, D и E можно ускорить, увеличив затраты, приходящиеся на единицу времени, соответственно на 1, 2, 3 и 4 долл. Пусть величины τ_A, τ_B, τ_D и τ_E обозначают сокращение сроков выполнения соответствующих работ, так что фактическое время их выполнения будет равно $30-\tau_A$, $25-\tau_B$, $20-\tau_D$, $22-\tau_E$. Пусть задача состоит в том, чтобы осуществить весь проект за 40 единиц времени при минимуме затрат, обусловленных сокращением сроков выполнения отдельных видов работ. Поставив в соответствие узлам $i = 1, 2, 3, 4$ время t_i, можно сформулировать задачу в следующем виде:

$$\text{минимизировать } \tau_A + 2\tau_B + 3\tau_D + 4\tau_E$$

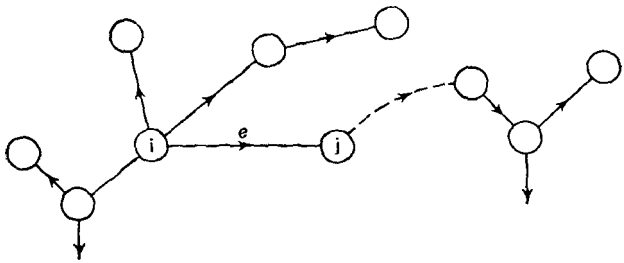


Рис. 8.

при ограничениях

$$\tau_A \geqslant 0,\ \tau_B \geqslant 0,\ \tau_D \geqslant 0,\ \tau_E \geqslant 0,$$

$$t_2 \geqslant t_1 + (30 - \tau_A),\ t_3 \geqslant t_1 + (25 - \tau_B),\ t_3 \geqslant t_2 + 1,$$

$$t_4 \geqslant t_2 + (20 - \tau_D),\ t_4 \geqslant t_3 + (22 - \tau_E),\ t_4 - t_1 = 40.$$

По отношению к исходной ЗПС эта задача является двойственной (разд. 6.4). Исходная задача заключается в том, чтобы направить потоки $x_A, \ldots, x_E$, дающие поток Q, из узла 1 в узел 4, минимизируя функцию $40Q - (30x_A + 25x_B + x_C + 20x_D + 22x_E)$. Ограничения имеют следующий вид: $0 \leqslant x_A \leqslant 1$, $0 \leqslant x_B \leqslant 2$, $0 \leqslant x_C$, $0 \leqslant x_D \leqslant 3$, $0 \leqslant x_E \leqslant 4$,

$$Q = x_A + x_B,\ x_A = x_C + x_D,\ x_B + x_C = x_E,\ x_D + x_E = Q.$$

В данном случае поток можно интерпретировать как «поток» долларов, так что когда поток равен затратам на сокращение срока работы, то эта работа может быть ускорена. До тех пор пока производится сокращение срока работы, эта величина потока должна сохраняться.

Для условий данной задачи оптимальные значения равны $Q = 3$, $x_A = 1$, $x_B = 2$, $x_C = 1$, $x_D = 0$, $x_E = 3$, а сроки выполнения работ A, B, C, D, E составляют соответственно 17, 18, 1, 23, 22. Заметим, что для завершения работы D имеется резерв времени.

Необходимо, чтобы сети, которые рассматриваются при исследовании таких задач, не имели ориентированных циклов. Наиболее длинный, или критический, путь — это путь наибольшей длины от начала до окончания работ, причем длина каждой дуги соответствует длительности выполнения соответствующего вида работ. Благодаря отсутствию циклов такие задачи о максимальном пути могут быть решены способами, аналогичными тем, которые описаны в разд. 2 для задачи о кратчайшем пути (для более детального ознакомления с методом и соответствующей литературой см. книгу Басакера и Саати [5]).

8. ПОТОКИ С ВЫИГРЫШАМИ

Задачи о потоках в сетях с выигрышами [21] аналогичны рассмотренным ЗПС, за исключением того что поток, входящий в дугу e, при прохождении по ней изменяется и соответствующее изменение характеризуется коэффициентом k_e. В матрице коэффициентов это обстоятельство находит отражение в том, что столбец, соответствующий дуге $e = (i, j)$, имеет в строке i элемент, равный $+1$, а в строке j — элемент, равный $(-k_e)$. Коэффициент k_e может быть как положительным, так и отрицательным.

В задачах о потоках с выигрышами столбцы, соответствующие циклам, линейно-независимы тогда и только тогда, когда произведение выигрышей k_e вдоль цикла не равно 1. Таким образом, базис может включать такой цикл. Однако любая связная компонента из базисных дуг может включать не более одного такого цикла.

Полный базис для рассматриваемой задачи состоит из деревьев, каждое из которых содержит либо одну свободную дугу, либо одну дополнительную дугу, образующую цикл. Изменение базиса можно осуществлять путем:

1) введения дуги или свободной дуги и исключения другой дуги или свободной дуги на пути к корню (рис. 3, *а*).

2) введения дуги для образования цикла и исключения другой дуги этого цикла (рис. 3, *б*);

3) введения дуги между деревьями и исключения дуги или свободной дуги на любом из путей к корню.

Применительно к задачам такого типа не существует лучшего доказательства сходимости алгоритма, чем привлечение обычной программы симплекс-метода. В работе [23] приведены примеры, не дающие сходимости, для случаев, когда решение не остается базисным.

Обсуждение вопросов, касающихся структуры базиса, содержится в гл. 21 книги Данцига [6].

9. МНОГОПОЛЮСНЫЕ И МНОГОПРОДУКТОВЫЕ ПОТОКИ

Задача о многополюсных потоках связана с определением условий, при которых возможно получение заданного потока между парами узлов сети, однако при этом не рассматриваются потоки, «делящие» между собой пропускные способности дуг. В симметричной задаче обычно предполагается, что если дуга (i, j) имеет пропускную способность α_{ij}, то существует и дуга (j, i), имеющая такую же пропускную способность. При этих условиях симметричная функция $v(i, j)$ для всех пар узлов i и j, задаваемая максимальной величиной потока между i и j, называется *потоковой функцией*. В работе [16] (см. также книгу

Форда и Фалкерсона [11], разд. IV-2) доказывается, что неотрицательная симметричная функция v для всех пар узлов сети является потоковой функцией тогда и только тогда, когда

$$v(i, j) \geqslant \min_k \{v(i, k),\ v(k, j)\}.$$

Кроме того, каждая потоковая функция может быть реализована деревом, являющимся минимальным деревом-остовом полного неориентированного графа, каждое ребро (i, j) которого имеет длину $v(i, j)$.

В работе [16] показан способ получения потоковой функции для заданной сети путем сведения этой сети к некоторой эквивалентной сети, имеющей ту же самую потоковую функцию и представляющую собой дерево. При этом для получения потоковой функции оказывается достаточным решить только $n-1$ задач о максимальном потоке.

В задачах о многопродуктовых потоках требуется направить заданный, или максимальный, поток различных продуктов между парами узлов одновременно; т. е. общий поток продуктов по дуге не должен превосходить ее пропускной способности. Будем считать, что для каждой пары узлов i и j искомый поток из i в j представляет собой поток различных продуктов. В работе [22] при решении рассматриваемой задачи общий поток был представлен в виде отдельных потоков, которые связывались определенным образом сконструированными циклами. В работе [17] использован действенный метод, позволивший во многих случаях рассматривать только индивидуальные потоки.

Ряд общих результатов, полученных при исследовании однопродуктовых потоков, получил дальнейшее развитие применительно к случаю двухпродуктовых потоков в работах [19, 30, 31]. При этом трудоемкость реализации предлагаемых методов максимизации двухпродуктовых потоков лишь вдвое превышает трудоемкость решения соответствующих задач для однопродуктовых потоков.

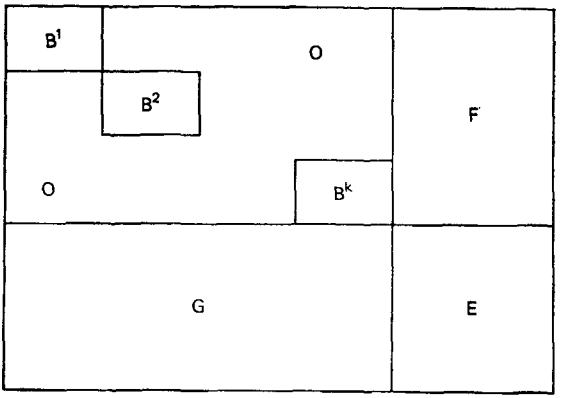
Специфика задачи о многопродуктовом потоке обусловлена характерной структурой базиса задачи ЛП:

$$0 \leqslant x_e^k,$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^k = \mathbf{b}^k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_e^k \leqslant \alpha_e,$$

где **A** — матрица инциденций узлы — дуги для заданной сети. Базис **B** всегда имеет следующий вид:



Здесь каждая матрица $\mathbf{B}^k$ представляет собой матрицу инциденций узлы — дуги для покрывающего корневого леса заданной сети, каждый столбец матрицы **F** состоит либо полностью из нулевых элементов, либо соответствует дуге некоторого блока $\mathbf{B}^k$ и каждый столбец матрицы **G** имеет ровно один элемент, равный единице. Все матрицы $\mathbf{B}^k$ — треугольные, и если они используются для исключения **G** (или, что эквивалентно, для исключения **F**), то результирующей матрицей вместо **E** будет матрица $\mathbf{E} - \mathbf{G}\bar{\mathbf{F}}$, где

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{B}^k \end{bmatrix}^{-1}$$

В тех случаях, когда один из столбцов **F** соответствует дуге в блоке k, столбец матрицы $\bar{\mathbf{F}}$ представляет собой матрицу-столбец инциденций дуг в блоке $\mathbf{B}^k$, необходимый для представления этой дуги. Матрица $\mathbf{E} - \mathbf{G}\bar{\mathbf{F}}$ представляет собой матрицу инциденций ребра — циклы, причем эти циклы образуются дугами, входящими в $\mathbf{F}'$ при присоединении их к корневым покрывающим деревьям блоков $\mathbf{B}^k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Balas E., Hammer P. L., On the Transportation Problem I and II, *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationalle*, **4**, 38—116, 131—160 (1962).
2. Barr R. S., Glover F., Klingman D., An Improved Version of the Out-of-

Kilter Method and a Comparative Study of Computer Codes, *Math. Prog.*, **7**, 60—87 (1974).
3. Bennington G. E., Applying Network Analysis, *Indust. Eng.*, **6**, 17—25 (1974).
4. Berge C., Ghouila-Houri A., Programming, Games and Transportation Networks, Methuen and Co., Ltd., London, 1965.
5. Busacker R. G., Saaty T. L., Finite Graphs and Networks, McGraw-Hill, New York, 1965. [Имеется перевод: Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети.— М.: Наука, 1974.]
6. Dantzig G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963. [Имеется перевод: Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения.— М.: Прогресс, 1966.]
7. Dijkstra E. W., A Note on Two Problems in Connection with Graphs, *Numerische Mathematik*, **1**, 269—271 (1959).
8. Dreyfus S. E., An Appraisal of Some Shortest-Path Algorithms, *Operations Res.*, **17**, 395—412 (1969).
9. Edmonds J., Karp R. M., Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems, *J. ACM*, **19**, 248—264 (1972).
10. Elmaghraby S. E., Some Network Models in Management, Springer-Verlag, New York, 1970.
11. Ford L. R., Jr., Fulkerson D. R., Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962. [Имеется перевод: Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях.— М.: Мир, 1966.]
12. Frank M., Frisch I. T., Communication, Transmission, and Transportation Networks, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971.
13. Fulkerson D. R., Flow Networks and Combinatorial Operations Research, *American Mathematical Monthly*, 73, 115—138 (1966).
14. Glover F., Kafney D., Klingman D., Napier A., A Computations Study on Start Procedures, Basis Change Criteria, and Solution Algorithms for Transportation Problems, *Management Sci.*, **20**, 793—813 (1974).
15. Glover F., Klingman D., Stutz J., An Augmented Threaded Index Method for Network Optimization, *INFOR*, **12**, 293—298 (1974).
16. Gomory R. E., Hu T. C., Multi-terminal Network Flows, *J. Indust. Appl. Math.*, **9**, 551—570 (1961).
17. Grigoriadis M. D., White W. W., A Partitioning Algorithm for the Multi-Commodity Network Flow Problem, *Math. Prog.*, 3, 157—177 (1972).
18. Hoffman A. J., Kruskal J. B., Integral Boundary Points of Convex Polyhedra, in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds.), Linear Inequalities and Ralated Systems, Annals of Mathematics Study No. 38, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956, pp. 233—246. [Имеется перевод: Гофман А., Краскал Дж. Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников. Сб.: Линейные неравенства и смежные вопросы.— М.: ИЛ, с. 325—347.]
19. Hu T. C., Multi-Commodity Network Flows, *Operations Res.*, **11**, 344—360 (1963).
20. Hu T. C., Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969. [Имеется перевод Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.]
21. Jewell W. S., Optimal Flows with Gains, Second International Conference on Operations Research, Aix-en-Provence, France, 1960, *Operations Res.*, **10**, 476—522 (1962).
22. Jewell W. S., A Primal-Dual Multi-Commodity Flow Algorithm, Report ORC 66-24, Operations Research Center, Univ. of Calif., Berkeley, California, 1966.
23. Johnson E. L., Networks and Basic Solutions, *Operations Res.*, **14**, 619—624 (1966).

24. Johnson E. L., On Shortest Paths and Sorting, IBM RC 3691, IBM Research, Yorktown Heights, New York, 1972.
25. Kelley J. E., Jr., Critical Path and Planning and Scheduling, Mathematical Basis, *Operations Res.*, 9, 296—320 (1961).
26. Kennington J. L., Langley R. W., Shetty C. M. Efficient Computational Devices for the Capacitated Transportation Problem, *Nav. Res. Log. Quart.*, 21, 637—648 (1974).
27. Klein M., A Primal Method for Minimum Cost Flows, *Management Sci.*, 14, 205—220 (1967).
28. Maurrus J. F., Optimization of the Flow through Networks with Gains, *Math. Prog.*, 3, 135—144 (1972).
29. Nemhauser G. L., A Generalized Permanent Label Setting Algorithm for the Shortest Path between Specified Nodes, *J. Math. Anal. and Appl.*, 38, 328—334 (1972).
30. Rothschild B., Winston A., On Two-Commodity Flows, *Operations Res.*, 14, 377—387 (1966).
31. Sakarovitch M., Two Commodity Network Flows and Linear Programming, *Math. Prog.*, 4, 1—20 (1973).
32. Srinivasan V., Thompson G. L., Benefit-Cost Analysis of Coding Techniques for the Primal Transportation Algorithm, *J. ACM*, 20, 194—213 (1973).
33. Veinott A. F., Jr., Least d-majorized Network Flows with Inventory and Statistical Applications, *Management Sci.*, 17, 547—567 (1971).
34. Zadeh N., A Bad Network Problem for the Simplex Method and Other Minimum Cost Flow Algorithms, *Math. Prog.*, 5, 255—266 (1973).
35. Zangwill W., A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System — A Network Approach, *Management Sci.*, 15, 506—527 (1969).

II-5. Геометрическое программирование

Э. Питерсон[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

Начало изучению геометрического программирования (ГП) было положено работами [6, 7, 31, 32], и с тех пор, особенно с появлением первой книги Даффина, Питерсона и Зенера [14], наблюдается быстрое развитие данного направления исследований. В настоящее время в области геометрического программирования стало работать больше ученых. Именно благодаря их усилиям были разработаны более совершенные численные методы, теория значительно продвинулась вперед и успешно применяется на практике; в частности, следует упомянуть недавние работы [20—22], где предпринята успешная попытка глубже проникнуть в сущность теории и расширить круг охватываемых ею задач. Основная цель данной главы заключается в том, чтобы познакомить читателя с сегодняшним состоянием предмета и отметить ряд направлений развития теории. Здесь представлены только наиболее важные аспекты теории и все результаты даны лишь для n-мерного евклидова пространства E_n, что позволило выдержать объем главы в разумных пределах. Потребовалось бы несколько дополнительных страниц только для того, чтобы просто перечислить все публикации, касающиеся геометрического программирования. В результате пришлось опустить несколько важных разделов теории. Подробнее с этим предметом можно познакомиться, обратившись к книгам [22, 24].

Распространенное убеждение о том, что геометрическое программирование представляет собой полезный метод лишь для изучения очень важного класса задач оптимизации позиномов, содержит только долю истины. В действительности геометрическое программирование является очень общим, многогранным методом, который чрезвычайно полезен при изучении других важных классов оптимизационных задач, например нелинейных задач о потоках в сетях (как однопродуктовых, так и многопродуктовых), задач дискретного оптимального управления с линейными уравнениями движения, обобщенных задач оптимального размещения типа задач Ферма, l_p-задач регрессионного анализа (l_p-ограниченных), обычных задач математического программирования, задач квадратичного программирования (с квадратичными ограничениями) и общих задач алгебраического программирования. Тео-

---

[1)] Elmor L. Peterson, Northwestern University.

рия геометрического программирования включает: 1) теоремы существования и единственности, ряд полезных характеристик задач; 2) методы параметрического и экономического анализа; 3) теоретические построения, проливающие свет на принципы декомпозиции; 4) эффективные численные методы.

Данная глава может служить справочником, содержащим наиболее важные результаты геометрического программирования; ее можно также рассматривать как введение в предмет (куда включено рассмотрение первоначальной задачи оптимизации позиномов).

Несколько замечаний относительно обозначений. Обычно только из контекста будет следовать, что в данном случае обозначает вектор $\mathbf{v}$ из E_n: вектор-столбец или вектор-строку. Во всех случаях символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Геометрическое программирование дает теоретическую схему для изучения и формулировки в сепарабельной форме многих важных (обычно несепарабельных) оптимизационных задач. Ключевым моментом данной теоретической схемы является использование линейных зависимостей исследуемой задачи. Линейные соотношения часто представляют собой линейные уравнения или линейные неравенства, но могут также иметь более завуалированную форму, например вид матриц, связанных с нелинейными зависимостями.

Мы начнем с задач без ограничений, а затем перейдем к более сложным задачам с ограничениями. В каждом случае будут рассмотрены важные примеры, возникающие в теории исследования операций.

2.1. Задачи без ограничений

В классической теории оптимизации и обычном математическом программировании рассматривается задача минимизации (или максимизации) произвольной, принимающей вещественные значения функции g над некоторым заданным подмножеством $\mathscr{S}$, принадлежащим непустой области определения $\mathscr{C} \subseteq E_n$ этой функции. В геометрическом программировании на подмножество $\mathscr{S}$ накладывается условие, согласно которому $\mathscr{S}$ должно быть пересечением области определения функции $\mathscr{C}$ с произвольным конусом $\mathscr{X} \subseteq E_n$ (который в большинстве примеров фактически является векторным пространством). Ниже дано формальное определение основной задачи геометрического программирования, причем используются общепринятые терминология и обозначения;

введение задачи $\mathcal{A}$ облегчит дальнейшие ссылки и придаст математическую строгость всему изложению.

Задача $\mathcal{A}$. *На основе множества допустимых решений*

$$\mathcal{S} \triangleq \mathcal{X} \cap \mathcal{C}$$

найти как инфимум задачи

$$\varphi \triangleq \inf_{x \in \mathcal{S}} g(x),$$

так и множество оптимальных решений

$$\mathcal{S}^* \triangleq \{x \in \mathcal{S} \mid g(x) = \varphi\}.$$

В общем случае каждую оптимизационную задачу можно сформулировать в виде задачи $\mathcal{A}$ несколькими способами, выбирая соответствующие функцию g и конус $\mathcal{X}$. Например, всегда можно взять в качестве g целевую функцию данной задачи, если при этом положить $\mathcal{X}$ равным E_n. Но в общем случае такой выбор будет далек от идеального. Причиной является то, что в большинстве задач есть какая-нибудь линейность (линейные уравнения, линейные неравенства, матрицы и т. д.), которую можно учесть и использовать путем введения подходящего нетривиального подконуса $\mathcal{X} \subset E_n$. Наличие в задачах такого подконуса $\mathcal{X}$ представляет собой одну из отличительных черт геометрического программирования.

Пример 1. Возможно, что наиболее удивительными являются результаты использования геометрического программирования при изучении знакопеременных полиномов. Первые результаты были приведены в работах [6, 7, 31, 32]; они явились стимулом и основой для последующих построений теории геометрического программирования.

Сигном [иногда говорят знакопеременный (или обобщенный) полином] представляет собой функцию следующего вида:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \ldots t_m^{a_{im}},$$

где коэффициенты c_i и показатели степени a_{ij} являются произвольными константами, а независимые переменные t_j должны быть положительными ($t_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$). Зенер, опираясь на свой большой опыт работы в области естественных наук, в технике и исследовании операций, обнаружил, что многие представляющие интерес задачи оптимизации можно описать с помощью сигномов. В некоторых случаях сигномы получаются непосредственно из законов природы и (или) экономики. В других случаях такая функциональная запись дает хорошее приближение к эмпирическим данным в широком диапазоне изменения переменных t_j. При этом

сигномы часто имеют положительные коэффициенты; такие сигномы называют *позиномами*.

Наличие матрицы показателей степеней $[a_{ij}]$ (которая, конечно, связана с алгебраическими нелинейностями) является ключевым моментом для применения геометрического программирования при оптимизации сигномов. Для того чтобы задачу минимизации $P(t)$ свести к задаче $\mathcal{A}$, просто делают замену переменных:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \log t_j, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

а затем, используя свойства показательных функций, получают, что минимизация $P(t)$ эквивалентна решению задачи $\mathcal{A}$ при

$$\mathscr{C} \triangleq E_n, \; g_i(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{i=1}^{n} c_i e^{x_i} \text{ и } \mathscr{X} \triangleq \{\text{пространство столбцов } [a_{ij}]\}.$$

Подход, базирующийся на исследовании задачи $\mathcal{A}$ вместо задачи минимизации $P(t)$, обладает рядом значительных преимуществ. Например, в отличие от сигнома $P(t)$ экспоненциальная функция g полностью сепарабельна (она является суммой членов, каждый из которых зависит от единственной независимой переменной x_i). Кроме того, если $P(t)$ на самом деле позином, то g, конечно, строго выпуклая функция [хотя очевидно, что $P(t)$ может быть даже невыпуклой функцией]. В результате, если t^* минимизирует позином $P(t)$, то соответствующий $\mathbf{x}^*$ должен быть единственным оптимальным решением задачи $\mathcal{A}$; в таком случае множество всех $\mathbf{t}$, минимизирующих позином $P(t)$, можно получить из $\mathbf{x}^*$ путем решения приведенной выше системы уравнений (относительно простая задача, поскольку данная система линейна относительно членов $\log t_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$). Указанные свойства и ряд других, слишком сложных, чтобы описывать их здесь, были изучены и изложены в работах [1, 2, 10—14] и в некоторых других, ссылки на которые можно найти в этих публикациях. Благодаря результатам этих работ удалось построить весьма обширную теорию существования и единственности решений задач оптимизации сигномов (и особенно позиномов). В работе [15] вводится понятие полной сепарабельности сигномов, что позволило заложить основу для построения численного метода ветвей и границ, который сходится к *глобальному* оптимуму существенно невыпуклой задачи оптимизации сигномов.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим задачу *минимизации квадратичных функций*

$$Q(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2}\right) \langle \mathbf{z}, \mathbf{H}\mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{z} \rangle,$$

где $\mathbf{H}$ — произвольная матрица коэффициентов, а $\mathbf{h}$ — произвольный вектор.

Факторизация матрицы коэффициентов $\mathbf{H}$ (которая, конечно, связана с квадратичными нелинейностями) является отправной точкой для успешного использования геометрического программирования в квадратичном программировании. Линейная алгебра применяется для вычисления матриц $\mathbf{D}$ и $\mathscr{D}$, таких, что $\mathbf{H} = \mathbf{D}^t\mathbf{D} - \mathscr{D}^t\mathscr{D}$, где индекс t означает операцию транспонирования. С помощью этих матриц квадратичная функция записывается в виде

$$Q(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2}\right)(\langle \mathbf{Dz}, \mathbf{Dz}\rangle - \langle \mathscr{D}\mathbf{z}, \mathscr{D}\mathbf{z}\rangle) + \langle \mathbf{h}, \mathbf{z}\rangle.$$

Член $-\langle \mathscr{D}\mathbf{z}, \mathscr{D}\mathbf{z}\rangle$, конечно, отсутствует, когда функция $Q(\mathbf{z})$ положительно полуопределена (т. е. является выпуклой функцией).

Используя элементарную линейную алгебру, можно показать, что минимизация $Q(z)$ эквивалентна решению задачи $\mathscr{A}$ при

$$\mathscr{C} \triangleq E_{2m+1}; \quad g(\mathbf{x}) \triangleq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{i=m+1}^{2m} x_i^2\right) + x_{2m+1}$$

$$\text{и } \mathscr{X} \triangleq \text{пространство столбцов} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathscr{D} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в отличие от квадратичной функции Q квадратичная функция g полностью сепарабельна; этот факт можно использовать как при теоретических построениях, так и при создании вычислительной схемы.

Полезно ввести некоторые дополнительные параметры в приведенную выше функцию g, чтобы можно было изучать более широкий класс оптимизационных задач. В частности, определим функцию g следующим образом:

$$g(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{i=1}^{m} p_i^{-1} \mid x_i - b_i \mid^{p_i} - \sum_{i=m+1}^{2m} p_i^{-1} \mid x_i - b_i \mid^{p_i} + x_{2m+1} - b_{2m+1},$$

где b_i и p_i — произвольные константы, а $|\cdot|$ обозначает абсолютное значение функции. Отметим, что функция g полностью сепарабельна и ее можно использовать для анализа квадратичной задачи, если положить $b_i = 0$ и $p_i = 2$ для всех i.

Другой интересный случай возникает, если положить $p_i = p$ для всех i и одновременно приравнять нулю $\mathscr{D}$ и $\mathbf{h}$. Получается задача, в которой, по существу, ищется наилучшая аппроксимация в l_p-норме для заданного вектора $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ с помощью векторов из пространства столбцов матрицы $\mathbf{D}$ — основная задача *линейного регрессионного анализа*.

Детальный анализ этого довольно широкого класса задач оптимизации можно найти в статье [25] и цитируемых в ней работах.

Пример 3. В качестве третьего примера рассмотрим задачу *оптимального размещения* новых заводов относительно уже существующих. Предположим, что имеется p заводов с заданными координатами $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \ldots, \mathbf{b}^p$ в E_m, и пусть для каждого завода i задана $d_i(\mathbf{z}, \mathbf{b}^i)$ — стоимость размещения нового завода в точке $\mathbf{z}$ относительно $\mathbf{b}^i$. Во многих случаях функция d_i представляет собой просто «метрику», которая выражает численно стоимость перевозки материалов между двумя заводами. Задача состоит в выборе местоположения $\mathbf{z}$ нового завода таким образом, чтобы достигался минимум общей стоимости $d(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{p} d_i(\mathbf{z}, \mathbf{b}^i)$.

При такой формулировке задачи не существует матрицы, которая дала бы ключ к эффективному использованию геометрического программирования. Тем не менее минимизация $d(\mathbf{z})$, очевидно, эквивалентна решению задачи $\mathscr{A}$ при

$$\mathscr{C} \triangleq E_{pm}, \quad g(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{i=1}^{p} d_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{b}^i),$$

$$\mathscr{X} \triangleq \text{пространство столбцов} \begin{bmatrix} \mathscr{I} \\ \mathscr{I} \\ \vdots \\ \mathscr{I} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^p)$ и $[\cdot]$ — набор из p единичных матриц $\mathscr{I}$ размерности $(m \times m)$.

Заметим, что в отличие от функции $d(\mathbf{z})$ функция $g(\mathbf{z})$, по крайней мере частично, сепарабельна, поскольку она представляет собой сумму членов, каждый из которых зависит от единственной векторной независимой переменной $\mathbf{x}^i$. Сепарабельность, которая имеет место даже в более сложных задачах размещения, использована для построения как теоретической, так и вычислительной схемы в статье [26] и цитируемых в ней работах.

Пример 4. В качестве четвертого примера рассмотрим задачу *дискретного оптимального управления с линейными уравнениями движения* (или динамического программирования с линейными уравнениями перехода). Предположим, что на каждом этапе i задана стоимостная функция $g_i(\mathbf{z}^i, \mathbf{d}^i)$, которая зависит от i-го состояния $\mathbf{r}^i$ и i-го параметра управления $\mathbf{d}^i$. Областью определения стоимостной функции g_i является декартово произведение $R_i \times D_i$ i-го множества состояний R_i и i-го множества параметров управления D_i. Предположим также, что начальное состояние $\mathbf{r}^1$ определяется с помощью уравнения $\mathbf{r}^1 = \mathbf{B}_1\mathbf{d}^1$ через начальный параметр управления $\mathbf{d}^1$; каждое последующее состояние $\mathbf{r}^i$ определяется на основе i-го параметра управления $\mathbf{d}^i$ и $(i-1)$-го состояния $\mathbf{r}^{i-1}$ с помощью уравнения $\mathbf{r}^i = \mathbf{A}_i\mathbf{r}^{i-1} + \mathbf{B}_i\mathbf{d}^i$, где $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_i$ — ма-

трицы коэффициентов. Пусть имеется p этапов; в задаче требуется найти последовательность параметров управления $\mathbf{d}^i$, при которых достигается минимум общей стоимости $\sum_{i=1}^{p} g_i(\mathbf{r}^i, \mathbf{d}^i)$.

Наличие матриц коэффициентов $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_i$ позволяет использовать геометрическое программирование для решения задач дискретного оптимального управления. Чтобы перейти от сформулированной задачи управления к задаче $\mathcal{A}$, просто положим

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}^1, \mathbf{d}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{d}^2, \ldots, \mathbf{d}^{p-1}, \mathbf{r}^p, \mathbf{d}^p);$$

тогда легко заметить, что исходная задача управления эквивалентна задаче $\mathcal{A}$, в которой

$$\mathscr{C} \triangleq \bigtimes_{i=1}^{p} (R_i \times D_i), \quad g(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{i=1}^{p} g_i(\mathbf{r}^i, \mathbf{d}^i),$$

$$\mathscr{X} \triangleq \{\mathbf{x} \mid \mathbf{r}^1 = \mathbf{B}_1 d^1,\ \mathbf{r}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{r}^{i-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{d}^i,\ i = 2, \ldots, p\}.$$

Частичная сепарабельность функции g и разреженность матрицы, на столбцы которой натянуто $\mathscr{X}$, были использованы для построения теоретической и вычислительной схем в статье [4] и в ряде других работ, которые упоминаются в ней.

Существует еще один важный класс задач, о которых следует упомянуть,— *анализ многопродуктовых транспортных сетей*. Многопродуктовые задачи сильно отличаются от ранее рассмотренных примеров, что для них $\mathscr{X}$ не является в общем случае векторным пространством, а представляет собой многогранный конус, образованный некоторыми векторами допустимых путей. Транспортные задачи подробно рассматриваются в [18] и работах, цитируемых там.

Читатель, который хочет избежать трудностей, присущих анализу задач с ограничениями, может пропустить следующий раздел и перейти сразу к разд. 2.3.

2.2. Задачи с ограничениями

Сформулированную выше задачу геометрического программирования обобщим на случай, когда в явном виде заданы некоторые ограничения. Введем в рассмотрение два непересекающихся индексных множества I и J из целых положительных чисел, причем эти множества содержат конечное число элементов $o(I)$ и $o(J)$ соответственно (могут быть пустыми). Используя данные индексные множества I и J, введем также следующие обозначения и гипотезы:

1. Для каждого $k \in \{0\} \cup I \cup J$ существует функция g_k с областью определения $C_k \subseteq E_{n_k}$, и существует множество $D_j \subseteq E_{n_j}$ для каждого $j \in J$.

2. Для каждого $k \in \{0\} \cup I \cup J$ существует векторная независимая переменная $\mathbf{x}^k$ в E_{n_k}, и существует векторная независимая переменная $\varkappa$ с компонентами $\varkappa_j$ для каждого $j \in J$.

3. Если $\mathbf{x}^I$ обозначает декартово произведение векторных переменных $\mathbf{x}^i$, $i \in I$, и $\mathbf{x}^J$ — декартово произведение векторных переменных $\mathbf{x}^j$, $j \in J$, то декартово произведение $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^I, \mathbf{x}^J) \triangleq \mathbf{x}$ переменных $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^I$, $\mathbf{x}^J$ представляет собой независимую векторную переменную в E_n, где

$$n \triangleq n_0 + \sum_I n_i + \sum_J n_j.$$

4. Существует конус $X \subseteq E_n$.

Теперь сформулируем задачу A геометрического программирования, используя классические обозначения, формулировки и определения, что упростит в дальнейшем изложение результатов и придаст ему необходимую математическую строгость.

Задача A. *Рассмотрим целевую функцию* G

$$G(\mathbf{x}, \varkappa) \triangleq g_0(\mathbf{x}^0) + \sum_J g_j^+(\mathbf{x}^j, \varkappa_j),$$

определенную в области

$$C \triangleq \{(\mathbf{x}, \varkappa) \mid \mathbf{x}^k \in C_k,\ k \in \{0\} \cup I,\ (\mathbf{x}^j, \varkappa_j) \in C_j^+,\ j \in J\},$$

где

$$C_j^+ \triangleq \{(\mathbf{x}^j, \varkappa_j) \mid \text{ либо } \varkappa_j = 0 \text{ и } \sup_{\mathbf{d}^j \in D_j} \langle \mathbf{x}^j, \mathbf{d}^j \rangle < +\infty,$$

$$\text{либо } \varkappa_j > 0 \text{ и } \mathbf{x}^j \in k_j C_j\},$$

$$g_j^+(\mathbf{x}^j, \varkappa_j) \triangleq \begin{cases} \sup\limits_{\mathbf{d}^j \in D_j} \langle \mathbf{x}^j, \mathbf{d}^j \rangle, & \text{если } \varkappa_j = 0 \text{ и } \sup\limits_{\mathbf{d}^j \in D_j} \langle \mathbf{x}^j, \mathbf{d}^j \rangle < +\infty, \\ \varkappa_j g_j(\mathbf{x}^j/\varkappa_j), & \text{если } \varkappa_j > 0 \text{ и } \mathbf{x}^j \in \varkappa_j C_j. \end{cases}$$

Используя множество допустимых решений

$$S \triangleq \{(\mathbf{x}, \varkappa) \in C \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ и } g_i(\mathbf{x}^i) \leqslant 0,\ i \in I\},$$

нужно вычислить как инфимум задачи

$$\varphi \triangleq \inf_{(\mathbf{x}, \varkappa) \in S} G(\mathbf{x}, \varkappa),$$

так и множество оптимальных решений

$$S^* \triangleq \{(\mathbf{x}, \varkappa) \in S \mid G(\mathbf{x}, \varkappa) = \varphi\}.$$

Конечно, при $I = J = \varnothing$, g_0: $C_0 \triangleq g : \mathscr{C}$, $\mathbf{X} \triangleq \mathscr{X}$ имеем задачу без ограничений.

Часто встречается ситуация, когда $D_j = E_{n_j}$; тогда задача несколько упрощается, поскольку в силу определения $\sup\limits_{\mathbf{d}^j \in D_j} \langle \mathbf{x}^j,$

$\mathbf{d}^j\rangle < +\infty$, что имеет место в том и только в том случае, когда $\mathbf{x}^j = \mathbf{0}$; при этом $\sup\limits_{d^j \in D_j} \langle \mathbf{x}^j \mathbf{d}^j \rangle = 0$. В частности, тогда областью определения функционала будет

$$C_j^\dagger = \{(\mathbf{x}^j, \varkappa_j) \mid \varkappa_j \geqslant 0 \ \text{и} \ \mathbf{x}^j \in \varkappa_j C_j\}$$

и значения функционала находятся по формуле

$$g_j^\dagger (\mathbf{x}^j, \varkappa_j) = \varkappa_j g_j (\mathbf{x}^j/\varkappa_j),$$

поскольку $0 \cdot g_j (0/0) \triangleq 0$.

При определении множества допустимых решений S важно провести четкую границу между *условием принадлежности к конусу* $\mathbf{x} \in X$ и *ограничениями* $g_i (\mathbf{x}^i) \leqslant 0$, $i \in I$; эти условия совместно накладывают ограничения на векторную переменную $(\mathbf{x}, \varkappa)$. Во многих случаях конус X является многогранным и, следовательно, определяется конечным набором векторов; в большинстве задач, представляющих практический интерес, X фактически есть векторное пространство и, следовательно, имеет конечный базис. В результате часто можно автоматически удовлетворить условию принадлежности к конусу $\mathbf{x} \in X$ и поэтому исключить его из непосредственного рассмотрения, для чего необходимо провести линейное преобразование вектора $\mathbf{x}$. В основе такого линейного преобразования лежат либо порождающие векторы конуса X, либо базисные векторы пространства X. (Следует отметить, что в общем случае нелинейные ограничения $g_i (\mathbf{x}^i) \leqslant 0$, $i \in I$, обычно нельзя непосредственно исключить даже с помощью нелинейного преобразования.) На самом деле, даже когда это возможно, так не производится явное исключение условия принадлежности к конусу $\mathbf{x} \in X$, поскольку линейное преобразование потребовало бы введения общей векторной переменной в аргументы g_0, g_i и $g_j^\dagger$. Такая общая векторная переменная только затушевала бы одну из самых полезных характеристик геометрического программирования — (частичную) сепарабельность условий задачи. Очевидно, что упомянутая сепарабельность имеет место, даже когда функции g_k: C_k, $k \in \{0\} \cup I \cup J$ являются несепарабельными.

В общем случае каждую оптимизационную задачу можно представить в виде задачи A несколькими способами, соответствующим образом выбирая функции g, C и конус X. Очень важно использовать такую гибкость геометрического программирования и попытаться сформулировать исследуемую несепарабельную задачу в виде эквивалентной задачи A, в которой максимально возможное число функций является сепарабельным. Как и в случае задачи без ограничений, такая формулировка основана на выборе подходящего нетривиального конуса X, при котором удается учесть и использовать линейности, имеющие место в рассматриваемой задаче. Такие линейности часто имеют вид линейных уравнений или линей-

ных неравенств, но могут также присутствовать в завуалированном виде, например в виде матриц, связанных с нелинейными зависимостями.

Для каждого примера из разд. 2.1 было показано, как вводится сепарабельность в целевую функцию задачи без ограничений. Точно так же можно ввести сепарабельность в любую функцию ограничений того же общего типа. Мы сейчас воспользуемся задачей оптимизации сигномов, чтобы проиллюстрировать общую процедуру проведения таких преобразований.

Пример 5. Сначала введем следующие обозначения:

$$I = \{1, 2, 3, \ldots, p\} \text{ и } J = \varnothing,$$

$$C_k \triangleq E_{n_k}, \quad g_k(\mathbf{x}^k) \triangleq \sum_{[k]} c_q e^{x_q} - d_k, \text{ где}$$

$$[k] = \{m_k, m_k + 1, \ldots, n_k\},$$

$$1 = m_0 \leqslant n_0, \; n_0 + 1 = m_1 \leqslant n_1, \; \ldots, \; n_{p-1} + 1 = m_p \leqslant n_p = n.$$

$X \triangleq$ пространство столбцов $[a_{qr}]$,
где $[a_{qr}]$ — некоторая матрица размера $(n \times m)$.

Отметим, что все функции в задаче A полностью сепарабельны.

Для выявления связи задачи A с *задачей оптимизации сигномов при наличии ограничений* исключим условие принадлежности $\mathbf{x}$ к векторному пространству X (т. е. $\mathbf{x} \in X$), для чего проведем (существенно линейное) преобразование

$$x_q = \sum_{r=1}^{m} a_{qr} \ln t_r, \quad q = 1, 2, \ldots, n.$$

В силу свойств показательных функций очевидно, что задача A теперь эквивалентна следующей (в общем случае несепарабельной) задаче оптимизации сигномов:

$$\text{минимизировать } \sum_{[0]} c_q \prod_{1}^{m} t_r^{a_{qr}}$$

при ограничениях

$$\sum_{[k]} c_q \prod_{1}^{m} t_r^{a_{qr}} \leqslant d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p \text{ и } \mathbf{t} > \mathbf{0}.$$

Конечно, на практике изложенная процедура используется в обратном порядке. В приложениях намного чаще применяется сигномная формулировка задачи A, которую затем преобразуют в сепарабельную задачу A, что позволяет использовать полную сепарабельность экспоненциальных функций. Обычно задачи оптимизации сигномов (так же как и более общие задачи алгебраической оптимизации) следует свести к более простым задачам оптимизации сигномов, прежде чем преобразовывать их в подходящую

задачу A. В частности, в работах [8, 11, 13] показано, как сводятся такие задачи к задачам оптимизации сигномов, в которых каждый сигном имеет не более двух членов с одинаковыми знаками. Если далее эти задачи можно было бы преобразовать в задачи оптимизации сигномов, в которых каждый сигном содержит только один член, то все алгебраические оптимизационные задачи (следовательно, по существу все оптимизационные задачи, включающие только непрерывные функции) можно было бы свести к задачам линейного программирования конечных размеров. Даже если в будущем не удастся осуществить такое преобразование, способы, предложенные в указанных работах, уже можно использовать в теоретических и вычислительных схемах.

Читателю, который интересуется приложениями методов оптимизации сигномов и позиномов, следует посмотреть книгу [33] и исчерпывающий список работ, представленный в [27].

Для каждого из трех других примеров разд. 2.1 можно рассмотреть вариант задачи с ограничениями и получить сепарабельные функции, но мы не будем этого делать в расчете на изобретательность читателя, который может в случае необходимости обратиться к работам, уже цитированным в разд. 2.1.

В работах [21, 22] для рассмотрения задач линейного программирования с точки зрения геометрического программирования предлагаются три разных подхода, которые, по существу, можно использовать исключительно в педагогических целях. В этих же работах с точки зрения геометрического программирования рассматривается «обычное» программирование (гл. II-6) и приводятся результаты, которые помогают усилить некоторые теоремы обычного программирования.

Во всех указанных примерах множество индексов J пустое. Возможно, наиболее важным примером, в котором J не пустое, является задача химического равновесия — задача, которая не входит в сферу исследования операций. Эта задача подробно рассмотрена в статье [22] и цитируемых в ней работах. Множество J включено в представленные формулировки задач по причинам, которые станут понятны при рассмотрении двойственной симметрии в разд. 3.3.3.

2.3. Выводы

Накопленный опыт свидетельствует о том, что любую задачу оптимизации, содержащую матрицы, линейные уравнения, аффинные множества или конусы (и даже некоторые другие оптимизационные задачи, такие, как задачи оптимального размещения), можно, вероятно, преобразовать в задачу геометрического программирования, которая является значительно более сепарабельной и, следовательно, лучше поддается анализу и решению, чем исходная задача. Последнее обстоятельство хорошо иллюстрируют

все предыдущие примеры; но в цели данной главы не входят исчерпывающее изложение и использование этого факта.

В оставшейся части главы мы рассмотрим только основные положения теории геометрического программирования, а именно те, которые одинаково применимы для всех классов задач и в большинстве случаев фактически не требуют сепарабельности функций $g : \mathscr{C}$ и $g_k : C_k$, $k \in \{0\} \cup I \cup J$. Однако сепарабельность функций становится исключительно полезной, когда необходимо подробно изучить и решить задачи из некоторого специального класса.

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Основные теоретические положения геометрического программирования можно условно разделить на несколько разделов. Прежде всего некоторые условия оптимальности описывают важные свойства, присущие всем оптимальным решениям, и во многих случаях характеризуют все оптимальные решения. Лагранжиан позволяет описать важные условия оптимальности седловой точки, и с его помощью можно ввести понятие *двойственности*. Последний из рассматриваемых разделов теории включает теоремы единственности и существования оптимальных решений, а также полезные алгоритмические критерии остановки. Двойственность является также необходимым ингредиентом параметрического программирования и постоптимального анализа.

Поскольку задачи многих классов являются задачами без ограничений и теория для них намного проще, чем для задач с ограничениями, мы вначале сосредоточим внимание на задачах без ограничений. Поступая подобным образом, мы не теряем общности рассуждений, как показано в разд. 3.2.

3.1. Задача без ограничений

Пусть $\mathscr{Y}$ представляет собой конус, двойственный к конусу $\mathscr{X}$, т. е.

$$\mathscr{Y} \triangleq \{y \in E_n \mid 0 \leqslant \langle x, y \rangle \text{ для каждого } x \in \mathscr{X}\}.$$

Путем простых рассуждений можно показать, что $\mathscr{Y}$ в общем случае является замкнутым выпуклым конусом. Кроме того, $\mathscr{Y}$ —«многогранный» конус (т. е. образован конечным набором векторов), если $\mathscr{X}$ — многогранный конус, и $\mathscr{Y}$ является ортогональным дополнением $\mathscr{X}$ (обозначается как $\mathscr{X}^{\perp}$), если $\mathscr{X}$ является, по существу, векторным пространством. Фактически для каждого примера разд. 2.1 $\mathscr{Y}$ можно вычислить с помощью элементарной линейной алгебры.

При первом чтении главы некоторые из последующих разделов можно пропустить, в частности, можно опустить либо разд. 3.1.1

(условия оптимальности), либо 3.1.3 (седловые точки функции Лагранжа), не потеряв нить изложения. Раздел 3.1.2 могут пропустить читатели, которые достаточно хорошо знакомы с сопряженными преобразованиями, субградиентами и выпуклым анализом.

3.1.1. Условия оптимальности. Мы начнем со следующего фундаментального определения.

Определение. *Критическим решением (стационарным решением, равновесным решением, P-решением) для задачи $\mathcal{A}$ будем называть некоторый вектор* $\mathbf{x}^*$, *удовлетворяющий следующим P-условиям оптимальности:*

$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \cap \mathcal{C}, \quad \nabla g(\mathbf{x}^*) \in \mathcal{Y}, \quad \langle \mathbf{x}^*, \nabla g(\mathbf{x}^*) \rangle = 0.$$

Если конус $\mathcal{X}$ фактически представляет собой векторное пространство (как в каждом примере разд. 2.1), то $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp$ и, следовательно, последнее P-условие оптимальности $\langle \mathbf{x}^*, \nabla g(\mathbf{x}^*) \rangle = 0$ является излишним и его можно исключить из предыдущего определения. Кроме того, если $\mathcal{X}$ совпадает со всем пространством E_n (что имеет место в случае обычного программирования для задачи без ограничений), то $\mathcal{Y} = E_n^\perp = \{0\}$ и, таким образом, оставшиеся условия оптимальности принимают более известный вид: $\mathbf{x}^* \in \mathcal{C}$, $\nabla g(\mathbf{x}^*) = 0$.

Следующая теорема дает два условия выпуклости, которые гарантируют, что для оптимальности решений необходимо и (или) достаточно выполнения P-условий оптимальности.

Теорема 1. Если функция g дифференцируема в $\mathbf{x}^*$ и

1. $\mathcal{X}$ — выпуклое множество, а $\mathbf{x}^*$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{A}$, то $\mathbf{x}^*$ является критическим решением задачи $\mathcal{A}$ (но не наоборот).

2. g выпукла на $\mathcal{C}$, а $\mathbf{x}^*$ — критическое решение задачи $\mathcal{A}$, тогда $\mathbf{x}^*$ является оптимальным решением задачи $\mathcal{A}$.

Полезно заметить, что функция g дифференцируема для большинства примеров, приведенных в разд. 2.1. Кроме того, $\mathcal{X}$ — многогранный и, следовательно, выпуклый конус в каждом из примеров, а для важных специальных случаев функция g выпукла на $\mathcal{C}$. P-условия оптимальности часто характеризуют множество оптимальных решений $\mathcal{S}^*$ для задачи $\mathcal{A}$.

В разд. 3.1.3 даны те характеристики множества $\mathcal{S}^*$, которые не требуют дифференцируемости g, но для их получения необходимы понятия, введенные в следующем разделе.

3.1.2. Сопряженное преобразование, субградиенты и выпуклый анализ. Сопряженное преобразование представляет собой развитие классической теории преобразования Лежандра, но

только сравнительно недавно оно было подробно рассмотрено в работах [16, 17]. Читателю, который хочет познакомиться с подробной и современной трактовкой обоих преобразований, следует обратиться к книге [30]. Мы сейчас кратко опишем только те их свойства, которые представляют интерес с точки зрения геометрического программирования. Все свойства становятся достаточно очевидными, когда рассматриваются с геометрической точки зрения в пространстве двух или трех измерений.

Сопряженное преобразование отображает функции в функции; функция $\omega : \Omega$, сопряженная относительно функции $w : W$, имеет вид

$$\omega(\zeta) \triangleq \sup_{\mathbf{z} \in W} [\langle \zeta, \mathbf{z} \rangle - w(\mathbf{z})].$$

Конечно, область задания Ω функции ω определяется как множество таких векторов ζ, для которых данный супремум имеет конечное значение, и сопряженная функция $\omega : \Omega$ существует только тогда, когда множество Ω не пусто.

Функция, сопряженная относительно сепарабельной, очевидно, представляет собой сумму сопряженных функций отдельных членов исходной функции. Этот факт упрощает вычисление сопряженных функций во многих примерах из разд. 2.1. В частности, такие вычисления часто сводятся к элементарному упражнению по вычислению производных в случае выпуклых функций — единственном случае, когда сопряженное преобразование чрезвычайно эффективно, как доказано в многочисленных работах.

Для того чтобы взглянуть на сопряженное преобразование с геометрической точки зрения, следует рассмотреть множество субградиентов для w в точке $\mathbf{z}$, а именно

$$\partial w(\mathbf{z}) \triangleq \{\zeta \in E_\eta \mid w(\mathbf{z}) + \langle \zeta, \mathbf{z}' - \mathbf{z} \rangle \leqslant$$
$$\leqslant w(\mathbf{z}') \text{ для всех } \mathbf{z}' \in W\}.$$

Субградиент связан с известным понятием «градиент», но значительно отличается от него. Градиент определяет касательную гиперплоскость, тогда как субградиент задает опорную гиперплоскость (поскольку записанное внутри фигурных скобок неравенство, очевидно, означает, что гиперплоскость, описываемая уравнением $w^1 = w(\mathbf{z}) + \langle \zeta, \mathbf{z}' - \mathbf{z} \rangle$, касается графика функции w в точке $(\mathbf{z}, w(\mathbf{z}))$ и лежит целиком на нем или ниже). Разумеется, субградиент может существовать и быть неединственным, даже когда градиент не существует. С другой стороны, не менее очевидно, что субградиент может не существовать, даже когда градиент существует. Однако для выпуклых функций градиент является также и субградиентом. Фактически понятия градиента и субградиента совпадают для класса дифференцируемых выпуклых

функций, определенных на открытых множествах, т. е. для тех функций, которые встречаются во многих примерах из разд. 2.1.

Для того чтобы выявить связь сопряженной функции с субградиентами, отметим, что если $\zeta \in \partial w(\mathbf{z})$, то $\langle \zeta, \mathbf{z}' \rangle - w(\mathbf{z}') \leqslant \langle \zeta, \mathbf{z} \rangle - w(\mathbf{z})$ для каждого $\mathbf{z}' \in W$; это неравенство в свою очередь означает, что $\zeta \in \Omega$ и $\omega(\zeta) = -[w(\mathbf{z}) + \langle \zeta, -\mathbf{z} \rangle]$. Таким образом, длина отрезка, заключенного между началом координат и точкой пересечения опорной гиперплоскости с осью w', взятая со знаком минус, будет равна $\omega(\zeta)$. Следовательно, сопряженная функция ω существует, когда w имеет по крайней мере один субградиент ζ, но это условие, как известно, выполняется, если w — выпуклая функция. Фактически преобразованием Лежандра функции w называется сопряженная функция ω, ограниченная (в теоретико-множественном смысле) областью $\bigcup_{\mathbf{z} \in W} \partial w(\mathbf{z})$. Преобразование Лежандра является основным инструментом при изучении классической механики, термодинамики и дифференциальных уравнений [3]. Обычно область Ω определения сопряженной функции ω состоит как из $\bigcup_{\mathbf{z} \in W} \partial w(\mathbf{z})$, так и из некоторых предельных точек.

Когда сопряженная функция $\omega : \Omega$ существует, известно, что она выпукла и замкнута, т. е. ее надграфик (множество всех точек $E_{\eta+1}$, которые лежат на ее графике или выше) является выпуклым и (топологически) замкнутым. Кроме того, сопряженная функция $\omega : \Omega$ представляет собой замкнутую выпуклую оболочку (обозначается как $\bar{w} : \bar{W}$) функции $w : W$. Таким образом, сопряженное преобразование отображает семейство всех замкнутых выпуклых функций на себя во взаимно-однозначном симметричном соответствии. Следовательно, сопряженное преобразование совпадает со своим обратным преобразованием на семействе всех таких функций; две заданные сопряженные функции $w : W$ и $\omega : \Omega$ и соотношения $\zeta \in \partial w(\mathbf{z})$ и $\mathbf{z} \in \partial \omega(\zeta)$ являются эквивалентными и поэтому находятся одно из другого.

В геометрическом программировании приходится иметь дело как с некоторым конусом Z, так и с его двойственным конусом

$$\mathfrak{Z} \triangleq \{\zeta \in E_\eta \mid 0 \leqslant \langle \mathbf{z}, \zeta \rangle \text{ для каждого } \mathbf{z} \in Z\}.$$

Теперь становится очевидно, что сопряженная функция относительно нуль-функции с областью задания Z представляет собой нуль-функцию с областью $-\mathfrak{Z}$. Поэтому из теории сопряженного преобразования следует, что $\mathfrak{Z}$ является выпуклым и замкнутым (факт, который можно установить путем более простых рассуждений). Кроме того, если конус Z также является выпуклым и замкнутым, то в силу симметрии сопряженного преобразования двойственным к $\mathfrak{Z}$ является как раз конус Z. В частности, если Z —

векторное пространство в E_η, то эта симметрия приводит к хорошо известному результату о симметрии ортогональных дополнений подпространств Z и $\mathcal{Z}$.

В выпуклом анализе «относительная внутренность» (ri W) выпуклого множества $W \subseteq E_\eta$ определяется как «внутренность» W относительно евклидовой топологии для аффинной оболочки W (т. е. как самое маленькое аффинное множество [или линейное многообразие], содержащее W). Дело в том, что (ri W), определенная таким образом, не пуста, даже когда внутренность W является пустой.

Приведенные рассуждения завершают предварительные построения, необходимые для остальных разделов.

3.1.3. Седловые точки лагранжиана. Пусть $h : \mathscr{D}$ представляет собой сопряженную функцию относительно функции $g : \mathscr{C}$, т. е.

$$\mathscr{D} \triangleq \{\mathbf{y} \in E_n \mid \sup_{\mathbf{x} \in \mathscr{C}} [\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - g(\mathbf{x}) < +\infty, \quad h(\mathbf{y}) \triangleq \sup_{\mathbf{x} \in \mathscr{C}} [\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - g(\mathbf{x})].$$

Если функция $h : \mathscr{D}$ существует (например, для выпуклой функции $g : \mathscr{C}$), то $h : \mathscr{D}$ является замкнутой выпуклой функцией, в которой сохраняется любое свойство сепарабельности, представленное в $g : \mathscr{C}$. Фактически $h : \mathscr{D}$ можно найти во всех примерах, представленных в разд. 2.1, если выполняются соответствующие условия выпуклости.

Следующее определение чрезвычайно важно.

Определение. *Для совместной задачи $\mathscr{A}$, имеющей конечный инфимум φ, P-вектором называется некоторый вектор $\mathbf{y}^*$, такой, что*

$$\mathbf{y}^* \in \mathscr{D} \quad \text{и} \quad \varphi = \inf_{x \in \mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*),$$

где (геометрический) лагранжиан $L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - h(\mathbf{y})$. Следует отметить, что L_g обычно вычисляется так же легко, как $h : \mathscr{D}$.

Следующая теорема о седловой точке позволяет охарактеризовать оптимальные решения с помощью P-векторов.

Теорема 2. Если $g : \mathscr{C}$ — выпуклая и замкнутая функция, $\mathbf{x}^* \in \mathscr{X}$ и $\mathbf{y} \in \mathscr{D}$, то $\mathbf{x}^*$ есть оптимальное решение задачи $\mathscr{A}$, а $\mathbf{y}^*$ является P-вектором задачи $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда упорядоченная пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ есть седловая точка лагранжиана L_g, т. е.

$$\sup_{\mathbf{y} \in \mathscr{D}} L_g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = L_g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*).$$

В этом случае говорят, что лагранжиан L_g в седловой точке имеет значение, равное $\varphi = L_g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(\mathbf{x}^*)$. Кроме того, $\sup_{\mathbf{y} \in \mathscr{D}} L_g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = L_g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ удовлет-

воряют одновременно условию допустимости $\mathbf{x}^* \in \mathscr{C}$ и условию субградиента $\mathbf{y}^* \in \partial g(\mathbf{x}^*)$; при этом $L_g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(\mathbf{x}^*)$. Далее, $L_g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \inf\limits_{\mathbf{x} \in \mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ удовлетворяют условию допустимости $\mathbf{y}^* \in \mathscr{Y}$ и условию ортогональности $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \rangle = 0$; в этом случае $L_g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = -h(\mathbf{y}^*)$.

Поскольку второе утверждение теоремы 2 дает определенные условия, которые эквивалентны первому уравнению седловой точки, и так как третье утверждение теоремы 2 обеспечивает другие условия, эквивалентные второму уравнению седловой точки, то получается, что фактически теорема 2 описывает четыре различных свойства всех упорядоченных пар $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ оптимальных решений $\mathbf{x}^*$ и P-векторов $\mathbf{y}^*$.

Конечно, каждое из этих четырех свойств характеризует все оптимальные решения $\mathbf{x}^*$ через заданный P-вектор $\mathbf{y}^*$, так же как все P-векторы $\mathbf{y}^*$ — через заданное оптимальное решение $\mathbf{x}^*$.

Симметрия предыдущего утверждения наводит на мысль, что все P-векторы могут фактически составлять все оптимальные решения некоторой оптимизационной задачи. Действительно, следующие неравенства могут оказать помощь при формулировке подходящей оптимизационной задачи:

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leqslant \sup_{\mathbf{y} \in \mathscr{D}} [\inf_{\mathbf{x} \in \mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \leqslant \inf_{\mathbf{x} \in \mathscr{X}} [\sup_{\mathbf{y} \in \mathscr{D}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\mathbf{y} \in \mathscr{D}} L_g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}).$$

Данные неравенства справедливы для каждого $\mathbf{y}^* \in \mathscr{D}$ и каждого $\mathbf{x}^* \in \mathscr{X}$ благодаря тому единственному факту, что $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ входят в независимые множества $\mathscr{X}$ и $\mathscr{D}$ соответственно [т. е. вектор $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ принадлежит декартову произведению $\mathscr{X} \times \mathscr{D}$]. В частности, отметим, что каждое из этих неравенств должно превратиться в равенство, когда $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ является седловой точкой лагранжиана L_g; в последнем случае очевидно, что $\mathbf{x}^*$ — оптимальное решение задачи минимизации $\inf\limits_{\mathbf{x} \in \mathscr{X}} [\sup\limits_{\mathbf{y} \in \mathscr{D}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$ и $\mathbf{y}^*$ — оптимальное решение задачи максимизации $\sup\limits_{\mathbf{y} \in \mathscr{D}} [\inf\limits_{\mathbf{x} \in \mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$. Теперь, когда функция g выпуклая и замкнутая, из определения лагранжиана L_g и симметрии сопряженного преобразования очевидно, что предыдущая задача минимизации, по существу, является задачей $\mathscr{A}$. Поэтому весьма естественно рассмотреть предыдущую задачу максимизации параллельно с задачей $\mathscr{A}$ и назвать ее геометрической двойственной задачей $\mathscr{B}$.

Задача $\mathscr{B}$. *Используя множество допустимых решений*

$$\mathscr{T} \triangleq \{\mathbf{y} \in \mathscr{D} \mid \inf_{\mathbf{x} \in \mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \textit{ конечен}\}$$

и целевую функцию

$$[\mathscr{H}(\mathbf{y}) \triangleq \inf_{\mathbf{x}\in\mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

найти супремум задачи

$$\Psi \triangleq \sup_{\mathbf{y}\in\mathscr{T}} \mathscr{H}(\mathbf{y})$$

и множество оптимальных решений

$$\mathscr{T}^* \triangleq \{\mathbf{y} \in \mathscr{T} \mid \mathscr{H}(\mathbf{y}) = \Psi\}.$$

Хотя задача $\mathscr{B}$ является по существу задачей на max — min, т. е. относится к тому типу задач, которые обычно с трудом поддаются анализу и решению, задачи минимизации, которые необходимо решить для получения целевой функции $\mathscr{H} : \mathscr{T}$, имеют тривиальное решение. В частности, из определения L_g и гипотезы о том, что $\mathscr{X}$ — конус, следует, что $\inf_{\mathbf{x}\in\mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ имеет конечное значение тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} \in \mathscr{Y}$; при этом $\inf_{\mathbf{x}\in\mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -h(\mathbf{y})$. Следовательно, $\mathscr{T} = \mathscr{Y} \cap \mathscr{D}$ и $\mathscr{H}(\mathbf{y}) = -h(\mathbf{y})$, поэтому задачу $\mathscr{B}$ можно на самом деле сформулировать следующим, более простым образом:

используя множество допустимых решений $\mathscr{T} = \mathscr{Y} \cap \mathscr{D}$, найти *инфимум* задачи $\varphi \triangleq \inf_{\mathbf{y}\in\mathscr{T}} h(\mathbf{y}) = -\Psi$ и множество оптимальных решений $\mathscr{T}^* = \{\mathbf{y} \in \mathscr{T} \mid h(\mathbf{y}) = \psi\}$.

Сформулированная таким образом задача $\mathscr{B}$ очень напоминает задачу $\mathscr{A}$ и в действительности представляет собой задачу геометрического программирования. Конечно, таким образом можно определить геометрическую двойственную задачу $\mathscr{B}$, что и сделано в следующем разделе. Тем не менее предшествующие теоретические построения помогают установить связь между функцией Лагранжа и двойственностью.

3.1.4. Двойственность. В соответствии с обозначениями и определениями предыдущего раздела будем полагать, что $h : \mathscr{D}$ — сопряженная функция относительно функции $g : \mathscr{C}$.

Рассмотрим следующую задачу $\mathscr{B}$ геометрического программирования.

Задача $\mathscr{B}$. *Используя множество допустимых решений*

$$\mathscr{T} \triangleq \mathscr{Y} \cap \mathscr{D},$$

найти инфимум задачи

$$\psi \triangleq \inf_{\mathbf{y}\in\mathscr{T}} h(\mathbf{y})$$

и множество оптимальных решений

$$\mathcal{T}^* \triangleq \{y \in \mathcal{T} \mid h(y) = \psi\}.$$

Следует отметить, что найти решение задачи $\mathcal{B}$ обычно так же легко, как вычислить $h : \mathcal{D}$ и $\mathcal{Y}$. Кроме того, задача $\mathcal{B}$ является задачей выпуклого программирования, поскольку как $h : \mathcal{D}$, так и $\mathcal{Y}$ всегда выпуклые и замкнутые (даже если $g : \mathcal{C}$ и $\mathcal{X}$ не являются выпуклыми и замкнутыми).

Задачи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *геометрическими двойственными задачами*. Когда $g : \mathcal{C}$ и $\mathcal{X}$ одновременно выпуклы и замкнуты, то указанная двойственность очевидно симметрична в том смысле, что задачу $\mathcal{A}$ можно получить из задачи $\mathcal{B}$ так же, как только что задача $\mathcal{B}$ была получена из задачи $\mathcal{A}$. Такая симметрия порождает симметрию в теории, которая связывает $\mathcal{A}$ с $\mathcal{B}$; в результате из каждого утверждения относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ автоматически получается в такой же степени справедливое двойственное утверждение, касающееся $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$. Для краткости изложения мы предоставляем читателю сформулировать все соответствующие двойственные утверждения.

Хотя обычно в теории математического программирования при формулировке теорем двойственности обычно используют min — max, исходная задача $\mathcal{A}$ и ее геометрически двойственная задача $\mathcal{B}$ являются задачами минимизации. Относительная простота формулировки в min — min скоро станет понятной; читателю, привыкшему к обычной формулировке в min — max, следует иметь в виду, что приведенная теорема двойственности будет содержать утверждения, несколько отличающиеся от стандартных, поскольку в ней используется другая формулировка. В частности, известная теорема, содержащая утверждение о равенстве min и max, будет гласить, что сумма минимумов равна нулю (т. е. $\varphi + \psi = 0$).

Следующее определение почти столь же важно, как и определение двойственных задач $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Определение. Условиями экстремальности для задачи геометрического программирования без ограничений являются

(I) $$x \in \mathcal{X} \text{ и } y \in \mathcal{Y},$$

(II) $$\langle x, y \rangle = 0,$$

(III) $$y \in \partial g(x).$$

Условия экстремальности (I) представляют собой просто условия принадлежности к конусу для задач $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Условие экстремальности (II) называется условием ортогональности, а условие экстремальности (III) — условием субградиента.

Если конус $\mathcal{X}$ представляет собой векторное пространство (как, например, во всех примерах из разд. 2.1), то $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^-$ и, следова-

тельно, условие ортогональности (II) является излишним и его можно исключить из предыдущего определения (и всюду, где это определение используется).

Следующая теорема двойственности служит основой для многих других, сформулированных ниже.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — допустимые решения задач $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно [в таком случае условия экстремальности (I) выполняются]. Тогда $0 \leqslant g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y})$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия экстремальности (II) и (III); в этом случае $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — оптимальные решения задач $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно.

Важным следствием теоремы 3 является следующее:

Следствие 3А. Если двойственные задачи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совместны, то

1) задача $\mathcal{A}$ имеет конечный инфимум φ и $0 \leqslant \varphi + h(\mathbf{y})$ для каждого $\mathbf{y} \in \mathcal{T}$;

2) задача $\mathcal{B}$ имеет конечный инфимум ψ и $0 \leqslant \varphi + \psi$.

Почти для всех последующих рассуждений чрезвычайно важным является случай, когда в утверждении 2) справедливо строгое неравенство.

Определение. *Совместные двойственные задачи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, для которых выполняется строгое неравенство $0 < \varphi + \psi$, имеют невязку двойственности*[1], *равную $\varphi + \psi$.*

Хорошо известно, что в конечномерных задачах линейного программирования невязка двойственности отсутствует. В бесконечномерных задачах невязка двойственности иногда имеет место, что отмечалось в работах [5, 19]. В формулировках (обычно невыпуклых) задач геометрического программирования невязка двойственности встречается часто, но, как будет видно из дальнейшего изложения, в выпуклых задачах она имеет место очень редко. В последнем случае ее можно исключить, если наложить очень слабые условия на геометрические двойственные задачи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. И все же невязка двойственности встречается иногда в выпуклых задачах; соответствующие примеры привел впервые Стоер, найти их можно в приложении *С* работы [25]. Выпуклые задачи $\mathcal{A}$ геометрического программирования легче поддаются изучению и решению, чем невыпуклые. Это объясняется в основном тем, что в выпуклых задачах относительно реже имеет место невязка двойственности. С теоретической точки зрения невязки двойственности нежелательны, поскольку при их наличии мало что можно сказать о соответствующих геометрических двойственных задачах. Невязки двойственности также нежелательны с вычислительной точки зрения,

---

[1]) В теории двойственности говорят о несовпадении решений прямой и двойственной задач; мы будем пользоваться термином «невязка двойственности».— *Прим. ред.*

так как они обычно разрушают любые надежды и возможности использовать неравенство $0 \leqslant g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y})$ для того, чтобы получить *критерий останова алгоритма*.

Для формирования критерия останова берется положительное допустимое отклонение ε, такое, что численные алгоритмы, используемые для минимизации $g(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{y})$, останавливаются, как только они приводят к паре допустимых решений $\mathbf{x}^+$ и $\mathbf{y}^+$, для которых выполняется неравенство $g(\mathbf{x}^+) + h(\mathbf{y}^+) \leqslant 2\varepsilon$. Из утверждения (1) следствия 3*A* и определения φ имеем, что $-h(\mathbf{y}^+) \leqslant \varphi \leqslant g(\mathbf{x}^+)$; из этого условия и неравенства о допустимом отклонении (критерия останова) получаем

$$\left|\varphi - \frac{g(\mathbf{x}^+) - h(\mathbf{y}^+)}{2}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, φ можно аппроксимировать величиной $[g(\mathbf{x}^+) - h(\mathbf{y}^+)]/2$, и ошибка будет не больше чем $\pm\varepsilon$. Более того, из двойственности (т. е. симметрии) можно получить, что ψ аппроксимируется величиной $[h(\mathbf{y}^+) - g(\mathbf{x}^+)]/2$ с ошибкой не более чем $\pm\varepsilon$.

Отметим, однако, что задачи $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ имеют невязку двойственности тогда и только тогда, когда существует положительное допустимое отклонение ε, такое малое, что $2\varepsilon < \varphi + \psi$. Из определений φ и ψ следует, что для допустимых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеет место неравенство $\varphi + \psi \leqslant g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y})$. Таким образом, если ε удовлетворяет вышеприведенному неравенству (невязка двойственности), то не существует допустимых решений $\mathbf{x}^+$ и $\mathbf{y}^+$, для которых справедливо неравенство $g(\mathbf{x}^+) + h(\mathbf{y}^+) \leqslant 2\varepsilon$, т. е. в этом случае используемый алгоритм никогда не приведет к останову.

В следствии 3*B* содержатся полезные характеристики двойственных и оптимальных решений $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$, сформулированные с помощью условий экстремальности.

Следствие 3B: Если условия экстремальности имеют решения $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, то

(1) $$\mathbf{x}' \in \mathscr{S}^* \quad \text{и} \quad \mathbf{y}' \in \mathscr{T}^*,$$

(2) $$\mathscr{T}^* = \{\mathbf{y} \in \mathscr{Y} \cap \partial g(\mathbf{x}') \mid 0 = \langle \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle\},$$

(3) $$\varphi + \psi = 0.$$

С другой стороны, если двойственные задачи $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ совместны и $\varphi + \psi = 0$, то $\mathbf{x} \in \mathscr{S}^*$ и $\mathbf{y} \in \mathscr{T}^*$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ удовлетворяют условиям экстремальности.

Первая часть следствия 3*B* показывает, что задачи $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ можно рассматривать как вариационные принципы для нахождения решений из условий экстремальности. Во многих случаях (например, для сетевых задач, упоминавшихся в разд. 2.1) условия экстремальности представляют собой в той или иной форме естественные

объекты исследования (даже в большей степени, чем задача $\mathscr{A}$ или задача $\mathscr{B}$). Кроме того, следствие $3B$ показывает, что отсутствие невязки двойственности чрезвычайно важно для анализа всех таких случаев.

Полезно отметить, что если функция $g : \mathscr{C}$ выпуклая и замкнутая, то из симметрии сопряженного преобразования следует, что условие субградиента (III) можно заменить на эквивалентное условие

$$\text{(IIIa)} \qquad \mathbf{x} \in \partial h(\mathbf{y}),$$

причем следствие $3B$ остается справедливым.

В том случае, когда оба множества $\mathscr{S}^*$ и $\mathscr{T}^*$ не пустые и $\varphi + \psi = 0$, следствие $3B$ и его (несформулированное) двойственное утверждение используются непосредственно для определения всех оптимальных решений на основе единственного оптимального решения. Например, если $\mathbf{x}^*$ из $\mathscr{S}^*$ является известным оптимальным решением задачи $\mathscr{A}$, то

$$\mathscr{T}^* = \{\mathbf{y} \in \mathscr{Y} \cap \partial g(\mathbf{x}^*) \mid 0 = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} \rangle\}$$

и для каждого $\mathbf{y}^* \in \mathscr{T}^*$ множество

$$\mathscr{S}^* = \{\mathbf{x} \in \mathscr{X} \cap \partial h(\mathbf{y}^*) \mid 0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^* \rangle\}.$$

Из определения лагранжиана L_g (разд. 3.1.3) и того факта, что $\mathscr{X}$ — конус, следует, что условие принадлежности к конусу $\mathbf{y} \in \mathscr{Y}$ и условие ортогональности $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ можно заменить одним эквивалентным условием $L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x}' \in \mathscr{X}} L_g(\mathbf{x}', \mathbf{y})$. Кроме того, если функция $g : \mathscr{C}$ выпуклая и замкнутая, из теории сопряженного преобразования непосредственно следует, что условие субградиента $\mathbf{y} \in \partial g(\mathbf{x})$ можно заменить эквивалентным условием $\sup_{\mathbf{y}' \in \mathscr{Y}} L_g(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = L_g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Поэтому условия существования седловой точки, обсуждавшиеся в разд. 3.1.3, эквивалентны условиям экстремальности, если $g : \mathscr{C}$ выпукла и замкнута. Тем не менее, по-видимому, приведенные в определении условия экстремальности больше подходят для различных теоретических построений.

В следующей теореме устанавливается важная связь между двойственной задачей $\mathscr{B}$ и P-векторами, определенными в разд. 3.1.3.

Теорема 4. Пусть задача $\mathscr{A}$ совместна и ее конечный инфимум равен φ. Тогда

1) если задача $\mathscr{A}$ имеет P-вектор, то задача $\mathscr{B}$ совместна и и $\varphi + \psi = 0$;

2) если задача $\mathscr{B}$ совместна и $\varphi + \psi = 0$, то $\{\mathbf{y}^* \mid \mathbf{y}^*$ является P-вектором для задачи $\mathscr{A}\} = \mathscr{T}^*$.

Из теоремы 4 следует важный результат, согласно которому все P-векторы задачи $\mathscr{A}$, если они существуют, могут быть найдены

путем вычисления множества оптимальных двойственных решений $\mathcal{T}^*$. Однако в некоторых случаях векторы из $\mathcal{T}^*$ не являются P-векторами для задачи $\mathcal{A}$; это может иметь место только при $\varphi + \psi > 0$, но в силу теоремы 4 неравенство $\varphi + \psi > 0$ означает, что для задачи $\mathcal{A}$ не существует P-вектовов.

Отсутствие невязки двойственности (т. е. $\varphi + \psi = 0$) является принципиально важным как для предшествующих вычислительных и теоретических схем, так и для тех рассуждений, которые приведены ниже. Существуют многочисленные условия, гарантирующие отсутствие невязки двойственности, однако наиболее полезными и широко используемыми являются предположения, лежащие в основе следующей теоремы. Помимо того что эта теорема гарантирует отсутствие невязки двойственности, она является очень важной теоремой существования и представляет собой ГП-вариант теоремы Фенхеля.

Теорема 5. Если $g : \mathscr{C}$ и $\mathscr{X}$ выпуклы и замкнуты, а двойственная задача $\mathscr{B}$ имеет допустимое решение $y^0 \in (\mathrm{ri}\, \mathscr{Y}) \cap (\mathrm{ri}\, \mathscr{D})$ и конечный инфимум ψ, то $\varphi + \psi = 0$ и $\mathscr{S}^* \neq \varnothing$.

Относительная внутренность обладает рядом свойств, использование которых облегчает применение теоремы 5. Например, если конус $\mathscr{Y}$ представляет собой векторное пространство, то $(\mathrm{ri}\, \mathscr{Y}) = \mathscr{Y}$ и, следовательно, гипотеза $\mathbf{y}^0 \in (\mathrm{ri}\, \mathscr{Y}) \cap (\mathrm{ri}\mathscr{D})$ содержится в предположении $\mathbf{y}^0 \in \mathscr{Y} \cap (\mathrm{ri}\, \mathscr{D})$. Точно так же, если множество $\mathscr{D}$ является векторным пространством, то $(\mathrm{ri}\, \mathscr{D}) = \mathscr{D}$ и предположение $\mathbf{y}^0 \in (\mathrm{ri}\, \mathscr{Y}) \cap (\mathrm{ri}\, \mathscr{D})$ вытекает из гипотезы о том, что $y^0 \in (\mathrm{ri}\, \mathscr{Y}) \cap \mathscr{D}$, которая в свою очередь всегда удовлетворяется при $\mathscr{D} = E_n$.

Теорема 5 и ряд ранее установленных фактов позволяют доказать, что во многих примерах из разд. 2.1 не существует невязки двойственности, а именно:

1) в задачах геометрического программирования с позиномами (пример 1), которые являются каноническими (по определению, данному в работах [9, 14]);

2) в задачах геометрического программирования для l_p-выпуклых задач (пример 2), которые являются каноническими (по определению, данному в работе [25]);

3) в задачах оптимального размещения (пример 3), в которых стоимость определена как $d_i(\mathbf{z}, \mathbf{b}^i) = \| \mathbf{z} - \mathbf{b}^i \|_i$ для некоторой нормы $\| \cdot \|_i$ (как впервые было показано в [26]);

4) в задачах дискретного оптимального управления (пример 4), которые являются каноническими (в силу определения работы [4]).

В заключение следует отметить, что если $g : \mathscr{C}$ и $\mathscr{X}$ выпуклы и замкнуты, то отсутствие (или наличие) невязки двойственности можно обнаружить путем малых изменений условий задачи на $\inf \varphi$. Этот метод рассматривается в следующем разделе.

3.1.5. Параметрическое программирование и постоптимальный анализ. В силу практических и теоретических причин задачу $\mathcal{A}$ нельзя изучать как нечто изолированное. Ее следует «погрузить» в параметрическое семейство $\mathcal{F}$, состоящее из тесно связанных задач $\mathcal{A}$ (u) геометрического программирования. Задачи $\mathcal{A}$ (u) возникают в результате возмущений $-\mathbf{u} \in E_n$, которым подвергается область определения $\mathcal{C}$ функции g; множество $\mathcal{X}$ при этом сохраняется неизменным. (Чтобы лучше понять излагаемый материал, рекомендуем сделать небольшой чертеж для случая $n = 2$ и одномерного векторного пространства.) Исходная задача $\mathcal{A}$ превращается в задачу $\mathcal{A}$ (0) семейства $\mathcal{F}$, и ее рассматривают в связи со всеми другими задачами $\mathcal{A}$ (u) геометрического программирования из $\mathcal{F}$, но особое внимание уделяется задачам $\mathcal{A}$ (u) из $\mathcal{F}$, которые наиболее близки к $\mathcal{A}$ (0) в том смысле, что норма u мала.

Параметрическое семейство $\mathcal{F}$, состоящее из всех задач $\mathcal{A}$ (u) (при фиксированных $g : \mathcal{C}$ и $\mathcal{X}$), называется *ГП-семейством.* Чтобы упростить дальнейшее изложение и придать ему надлежащую математическую строгость, ниже приводится формальное определение задачи $\mathcal{A}$ (u), которое следует сравнить с формальным определением задачи $\mathcal{A}$, приведенным в начале разд. 2.1.

Задача $\mathcal{A}$ (u). *Используя множество допустимых решений*

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}) \triangleq \mathcal{X} \cap (\mathcal{C} - \mathbf{u}),$$

найти инфимум задачи

$$\varphi(\mathbf{u}) \triangleq \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}(\mathbf{u})} g(\mathbf{x} + \mathbf{u})$$

и множество оптимальных решений

$$\mathcal{S}^*(\mathbf{u}) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{S}(\mathbf{u}) \mid g(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u})\}.$$

Отметим, что (в довольно общем теоретико-множественном смысле) символы $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, φ и $\mathcal{S}^*$ теперь обозначают функции от u, хотя вначале они представляли собой конкретные значения функций $\mathcal{A}$ (0), $\mathcal{S}$ (0), φ (0) и $\mathcal{S}^*$ (0) соответственно. Читателю следует иметь в виду указанные расхождения в обозначениях, когда он будет сравнивать последующие рассуждения с предыдущими результатами.

При заданном u задача $\mathcal{A}$ (u) может быть либо совместной, либо несовместной, в зависимости от того, пусто или не пусто множество $\mathcal{S}$ (u). Очевидно, что параметрическое семейство $\mathcal{F}$ содержит бесконечное число совместных задач $\mathcal{A}$ (u). В качестве области определения функции инфимума φ берется непустое множество $\mathcal{U}$ векторов u, для которых задачи $\mathcal{A}$ (u) совместны. Таким образом,

область значений функции φ может содержать $-\infty$; но если $\varphi(\mathbf{u}) = -\infty$, то множество оптимальных решений $\mathcal{S}^*(\mathbf{u})$, очевидно, является пустым.

Поскольку наибольший интерес представляет исследование исходной задачи $\mathcal{A}(0)$, то удобно рассматривать задачу $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ как «возмущенный» вариант задачи $\mathcal{A}(\mathbf{0})$; поэтому множество

$$\mathcal{U} \triangleq \{\mathbf{u} \in E_n \mid \mathcal{S}(\mathbf{u}) \text{ непусто}\}$$

будем называть *множеством допустимых возмущений для задачи* $\mathcal{A}(0)$ (относительно семейства $\mathcal{F}$).

Функции φ и $\mathcal{S}^*$ обычно показывают зависимость оптимальных решений от внешних воздействий (возмущений), и поэтому анализ этих функций представляет исключительный интерес при изучении зависимости «стоимость — прибыль» и рассмотрении аналогичных вопросов. Для примеров из разд. 2.1 легко показать, что вектор возмущений $\mathbf{u}$

1) изменяет в примере 1 логарифм модуля коэффициентов сигнома c_i, которые в общем случае зависят от требований проектирования и эксплуатации, стоимости материалов и т. д.;

2) изменяет вектор $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, который следует оптимально аппроксимировать в задаче линейного регрессионного анализа из примера 2;

3) изменяет вектор $\mathbf{b}^i$, описывающий положение «старых» (фиксированных) заводов в примере 3, при условии что стоимость $d_i(\mathbf{z}, \mathbf{b}^i) = \| \mathbf{z} - \mathbf{b}^i \|_i$ по некоторой норме $\| \cdot \|_i$;

4) смещает множество состояний R_i и множество управлений D_i в примере 4.

Следующая теорема поможет выявить те свойства параметрического семейства $\mathcal{F}$, которые имеют большое теоретическое значение и, кроме того, представляют интерес с точки зрения параметрического программирования.

Теорема 6. Множество допустимых возмущений $\mathcal{U}$ определяется формулой

$$\mathcal{U} = \mathcal{C} - \mathcal{X}$$

Кроме того, если и $\mathcal{C}$, и $\mathcal{X}$ выпуклы, то и множество $\mathcal{U}$ выпукло и точечно-множественная функция $\mathcal{S}$ вогнута на $\mathcal{U}$ в том смысле, что

$$\delta_1 \mathcal{S}(\mathbf{u}^1) + \delta_2 \mathcal{S}(\mathbf{u}^2) \subseteq \mathcal{S}(\delta_1 \mathbf{u}^1 + \delta_2 \mathbf{u}^2)$$

для каждой выпуклой комбинации $\delta_1 \mathbf{u}^1 + \delta_2 \mathbf{u}^2$ произвольных точек $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in \mathcal{U}$. Далее, если и $g : \mathcal{C}$, и $\mathcal{X}$ выпуклы, то для каждого $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ задача $\mathcal{U}(\mathbf{u})$ является выпуклой и функция инфимума φ либо конечна и выпукла на $\mathcal{U}$, либо же $\varphi^*(\mathbf{u}) \equiv -\infty$ для всех $\mathbf{u} \in (\mathrm{ri}\, \mathcal{U})$.

В тех случаях, когда $\mathcal{X}$ является векторным пространством, с помощью теоремы 7 изучение параметрического семейства $\mathcal{F}$ можно свести к анализу только тех задач $\mathcal{A}(\mathbf{u})$, для которых $\mathbf{u} \in \mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp}$. В таких случаях удобно обозначать через $\mathbf{u}_{\mathcal{X}}$ и $\mathbf{u}_{\mathcal{Y}}$ ортогональные проекции произвольного вектора $\mathbf{u} \in E_n$ на ортогонально дополняющие подпространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно.

Теорема 7. Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — ортогонально дополняющие подпространства из E_n, то для каждого вектора $\mathbf{u} \in E_n$ либо оба множества допустимых решений $\mathcal{S}(\mathbf{u})$ и $\mathcal{S}(\mathbf{u}_{\mathcal{Y}})$ пустые, либо оба непустые, причем последний случай будет иметь место тогда и только тогда, когда $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$; при этом $\mathcal{S}(\mathbf{u}) = \mathcal{S}(\mathbf{u}_{\mathcal{Y}}) - \mathbf{u}_{\mathcal{X}}$ и $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}_{\mathcal{Y}})$. Кроме того, если $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, то либо оба множества оптимальных решений $\mathcal{S}^*(\mathbf{u})$ и $\mathcal{S}^*(\mathbf{u}_{\mathcal{Y}})$ пустые, либо же оба непустые и $\mathcal{S}^*(\mathbf{u}) = \mathcal{S}^*(\mathbf{u}_{\mathcal{Y}}) - \mathbf{u}_{\mathcal{X}}$.

Теорема 7 и ее (несформулированная) двойственная теорема помимо очевидных применений в задачах параметрического программирования может быть использована для установления связи представленной ГП-формулировки двойственности с формулировкой двойственности Фенхеля [17], а также с формулировками двойственности, предложенными сравнительно недавно в работах [28—30]. Указанные связи достаточно подробно прослежены в работе [25].

Теорема 8 является ГП-вариантом теоремы, первоначально сформулированной в работах [28—30]; она устанавливает прямую связь между функцией инфимума φ и двойственной задачей $\mathcal{B}$. Эта зависимость позволяет с помощью теории сопряженных преобразований получить важные свойства функции φ.

Теорема 8. Функция инфимума φ конечна во всех точках области определения $\mathcal{U}$ и обладает сопряженной функцией тогда и и только тогда, когда двойственная задача $\mathcal{B}$ совместна; в этом случае $h : \mathcal{T}$ — целевая функция двойственной задачи $\mathcal{B}$ — является сопряженной функцией относительно функции $\varphi : \mathcal{U}$.

Хотя теорему 8 можно довольно просто и непосредственно доказать (что и было сделано впервые Рокафелларом), ее также можно рассматривать как прямое следствие других теорем, которые позволяют дать микроэкономическую интерпретацию двойственной задаче $\mathcal{B}$. Довольно интересный класс микроэкономических задач можно свести к задаче $\mathcal{B}$; детальный анализ соответствующих результатов проведен в работе [20]. Следующее следствие играет важную роль в большинстве приложений теоремы 8.

Следствие 8А. Если двойственная задача $\mathcal{B}$ совместна, то сопряженной функцией относительно ее целевой функции $h : \mathcal{T}$ будет

$\overline{\varphi} : \overline{\mathcal{U}}$ — выпуклая оболочка функции инфимума $\varphi : \mathcal{U}$, которая, конечно, совпадает с $\varphi : \mathcal{U}$, когда последняя является выпуклой и замкнутой.

Теорема 8 и ее следствие позволяют, *не используя процедур численной оптимизации, разработать метод построения* $\overline{\varphi} : \overline{\mathcal{U}}$ — *замкнутой выпуклой оболочки функции* $\varphi : \mathcal{U}$. (Если же $g : \mathscr{C}$ и $\mathscr{X}$ выпуклы, то в силу теоремы 6 выпуклая оболочка представляет собой, по существу, искомую функцию инфимума $\varphi : \mathcal{U}$.) В частности, если множество $\mathscr{T}$ двойственных допустимых решений непустое (как следует из теоремы 6, это единственный интересный нетривиальный случай), то его можно покрыть сеткой

$$\mathscr{M} \triangleq \{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^s\} \subseteq \mathscr{T} \triangleq \mathscr{Y} \cap \mathscr{D}.$$

Из следствия 8*A* и теории сопряженных преобразований следует, что функция $\overline{\varphi}$ ограничена снизу на множестве $\overline{\mathcal{U}}$ кусочно-линейной (многогранной) аппроксимирующей функцией $\overline{\varphi}_b$, которая определяется соотношением

$$\overline{\varphi}_b(\mathbf{u}) \triangleq \max_{i=1, 2, \ldots, s} [\langle \mathbf{y}^i, \mathbf{u}\rangle - h(\mathbf{y}^i)] \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in \overline{\mathcal{U}}.$$

Кроме того, с помощью сопряженного неравенства (для $\overline{\varphi} : \overline{\mathcal{U}}$ и $h : \mathscr{T}$) можно показать, что

$$\overline{\varphi}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{y}^i, \mathbf{u}\rangle - h(\mathbf{y}^i) \text{ для каждого}$$
$$\mathbf{u} \in \partial h(\mathbf{y}^i) - \{\chi \in \mathscr{X} \mid \langle \chi, \mathbf{y}\rangle = 0\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s;$$

выпуклость функции $\overline{\varphi}$ тогда означает, что линейная интерполяция по таким значениям функции будет ограничивать функцию $\overline{\varphi}$ сверху. Кроме того, из теории сопряженных преобразований следует, что указанную аппроксимацию снизу и сверху можно провести с произвольной точностью, если выбрать в $\mathscr{T}$ достаточно плотную сетку $\mathscr{M}$. Однако, для того чтобы можно было использовать метод, требуется в явном виде построить целевую функцию $h : \mathscr{T}$ двойственной задачи, что довольно просто фактически для всех важных примеров из разд. 2.1.

Предыдущее следствие помогает также понять причины, которые привели к следующему определению.

Определение. *Задача* $\mathscr{A}(u)$ *называется квазисовместной*, если *существует* замкнутая выпуклая оболочка $\overline{\varphi} : \overline{\mathcal{U}}$ функции инфимума $\varphi : \mathcal{U}$ и если $\mathbf{u} \in \overline{\mathcal{U}}$; в этом случае говорят, что $\overline{\varphi}(\mathbf{u})$ является квазиинфимумом задачи $\mathscr{A}(\mathbf{u})$.

Поскольку $\mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$, то каждая совместная задача будет также квазисовместной, но обратное неверно.

Следующая теорема позволяет полностью объяснить эффект невязки двойственности, а также служит основой многих процедур постоптимального анализа чувствительности.

Теорема 9. Если двойственная задача $\mathscr{B}$ совместна, то ее инфимум ψ имеет конечное значение тогда и только тогда, когда задача $\mathscr{A}$ (0) квазисовместна; в этом случае

$$\bar{\varphi}(0)+\psi=0 \quad \text{и} \quad \partial\bar{\varphi}(0)=\mathscr{T}^*.$$

В приведенном ниже следствии 9*A* невязку двойственности предлагается рассматривать просто как разность между $\varphi(0)$ и $\bar{\varphi}(0)$.

Следствие 9A. Если двойственные задачи $\mathscr{A}$ (0) и $\mathscr{B}$ совместны, то задача $\mathscr{A}$ (0) квазисовместна и

$$\varphi(0)-\varphi(0)=\varphi(0)+\psi$$

Предыдущее следствие влечет за собой следующее определение.

Определение. *Совместная задача $\mathscr{A}$ (0) называется нормальной, если* $\varphi(\mathbf{u})=\bar{\varphi}(\mathbf{u})$.

Ниже сформулировано следствие о том, что нормальность задачи и отсутствие в ней невязки двойственности эквивалентны и выполнение любого из этих условий гарантирует справедливость уравнения, которое составляет основу многих процедур анализа чувствительности.

Следствие 9B. Если двойственные задачи $\mathscr{A}$ (0) и $\mathscr{B}$ совместны, то задача $\mathscr{A}$ (0) будет нормальной тогда и только тогда, когда задачи $\mathscr{A}$ (0) и $\mathscr{B}$ не имеют невязки двойственности; в этом случае $\partial\varphi(0)=\mathscr{T}^*$.

Для анализа чувствительности потребуется следующее определение.

Определение. *Совместная задача $\mathscr{A}$ (u), имеющая конечный инфимум* $\varphi(\mathbf{u})$, *называется множеством устойчивости (относительно семейства $\mathscr{T}$), если односторонняя производная по направлению*

$$D_d\varphi(\mathbf{u})\triangleq\lim_{s\to 0+}\frac{\varphi(\mathbf{u}+s\mathbf{d})-\varphi(\mathbf{u})}{s}$$

существует и конечна для всех возможных направлений $\mathbf{d}$ *(т. е. для каждого* $\mathbf{d}$, *такого, что* $\mathbf{u}+s\mathbf{d}\in\mathscr{U}$ *для достаточно малого* $s>0$).

В следующей теореме вопрос о стабильности связывается непосредственно с существованием некоторых субградиентов; кроме того, показано, как выполнение каждого условия гарантирует нормальность задачи.

Теорема 10. Если g: $\mathscr{C}$ и $\mathscr{X}$ выпуклы, а задача $\mathscr{A}(0)$ совместна и имеет конечный инфимум $\varphi(0)$, то задача $\mathscr{A}(0)$ будет множеством устойчивости тогда и только тогда, когда $\partial\varphi(0)$ не пусто; в этом случае задача $\mathscr{A}(0)$ является нормальной.

Пусть дана совместная задача $\mathscr{A}(0)$ с известным конечным инфимумом $\varphi(0)$; *анализ чувствительности* заключается в оценке другого значения инфимума $\varphi(\mathbf{u})$ для очень малого $\mathbf{u}$. Конечно, оценку первого порядка можно получить на основе производных по направлению $D_{\mathbf{u}}\varphi(0)$, если задача $\mathscr{A}(0)$ представляет собой множество устойчивости. В этом случае из вышеприведенного определения $D_{\mathbf{u}}\varphi(0)$ следует обычная оценочная формула

$$\varphi(\mathbf{u}) \approx \varphi(0) + D_{\mathbf{u}}\varphi(0),$$

для которой необходимо вычислить $D_{\mathbf{u}}\varphi(0)$. В работах [17, 30] обобщена хорошо известная формула $D_{\mathbf{u}}\varphi(0) = \langle \mathbf{u}, \nabla\varphi(0)\rangle$ и показано, что $D_{\mathbf{u}}\varphi(0) = \max\limits_{\mathbf{y}\in\partial\varphi(0)} \langle \mathbf{u}, \mathbf{y}\rangle$, если φ — выпуклая функция на $\mathscr{U}$, что действительно имеет место для выпуклых g : $\mathscr{C}$ и $\mathscr{X}$ в силу теоремы 6. Используя следствие 9*B*, предыдущую формулу можно записать в виде

$$D_{\mathbf{u}}\varphi(0) = \max_{\mathbf{y}\in\mathscr{T}^*} \langle \mathbf{u}, \mathbf{y}\rangle;$$

эта запись справедлива, если двойственная задача $\mathscr{B}$ совместна и отсутствует невязка двойственности, что почти всегда имеет место, как свидетельствуют теоремы 6, 8 и теорема (Фенхеля) 5. Поэтому для того, чтобы можно было использовать полученные формулы для оценки $\varphi(\mathbf{u})$ при малых значениях $\mathbf{u}$, необходимо помимо $\varphi(0)$ и $\mathscr{S}^*(0)$ найти множество $\mathscr{T}^*$. Но из рассуждений, приведенных после следствия 3*B*, ясно, что множество $\mathscr{T}^*$ можно найти на основе произвольного $\mathbf{x}^* \in \mathscr{S}^*(0)$ с помощью условий экстремальности.

Для дальнейшего описания невязки двойственности погрузим двойственную задачу $\mathscr{B}$ в параметрическое семейство $\mathscr{R}$ взаимосвязанных задач $\mathscr{B}(\mathbf{v})$ геометрического программирования. Семейство $\mathscr{R}$ получается, если область $\mathscr{D}$ определения функции h подвергнуть допустимым возмущениям $-\mathbf{v} \in E_n$, а множество $\mathscr{Y}$ сохранить неизменным. В параметрическом семействе $\mathscr{R}$ задача $\mathscr{B}(0)$ является исходной задачей, и ее исследование проводится наряду с другими задачами $\mathscr{B}(\mathbf{v})$ геометрического программирования, но особое внимание уделяется тем задачам $\mathscr{B}(\mathbf{v})$ из $\mathscr{R}$, которые близки к $\mathscr{B}(0)$ в том смысле, что норма $\mathbf{v}$ мала.

Естественно, что символы $\mathscr{B}$, $\mathscr{T}$, ψ и $\mathscr{T}^*$ теперь обозначают функции от $\mathbf{v}$, хотя вначале они представляли собой конкретные значения $\mathscr{B}(0)$, $\mathscr{T}(0)$, $\psi(0)$, $\mathscr{T}^*(0)$ соответственно. Читателю следует помнить об этом расхождении в обозначениях, когда

он будет сравнивать последующие результаты и рассуждения с вышеприведенными.

Поскольку основные результаты, касающиеся *двойственного* $\mathcal{A}$ *семейства геометрического программирования*, по существу, являются двойственными к результатам, которые уже установлены для семейства $\mathcal{F}$, то мы будем их использовать без обсуждений.

В следующей важной теореме устанавливается рефлексивность семейств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$.

Теорема 11. Если $g : \mathcal{C}$ и $\mathcal{X}$ выпуклы и замкнуты и двойственные задачи $\mathcal{A}(0)$ и $\mathcal{B}(0)$ совместны, то следующие три условия будут эквивалентны:

1) задача $\mathcal{A}(0)$ нормальная;
2) задача $\mathcal{B}(0)$ нормальная;
3) в задачах $\mathcal{A}(0)$ и $\mathcal{B}(0)$ нет невязки двойственности.

Если выполняется любое из указанных условий, то $\partial\varphi\,(0) = \mathcal{T}^*$ и $\partial\psi\,(0) = \mathcal{S}^*$.

Совместность может быть очень слабой (квазисовместность) и сильной, причем существует множество промежуточных градаций.

Определение. *Говорят, что задача* $\mathcal{B}(\mathrm{v})$ *сильно совместна, если* $\mathrm{v} \in (\mathrm{ri}\ \mathcal{V})$. *Поскольку* $(\mathrm{ri}\ \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$, *то любая сильно совместная задача* $\mathcal{B}(\mathrm{v})$ *является совместной, но обратное несправедливо.*

Следующая теорема демонстрирует важность понятий сильной совместности.

Теорема 12. Каждая сильно совместная двойственная задача $\mathcal{B}(0)$ с конечным инфимумом $\psi\,(0)$ является множеством устойчивости (и, следовательно, нормальная).

Поскольку $(\mathrm{ri}\ \mathcal{V})$ составляет почти все множество $\mathcal{V}$, из теоремы 12 следует, что почти все совместные задачи $\mathcal{B}(0)$, имеющие конечный инфимум ψ, нормальные. Возвращаясь теперь к теореме 11, мы понимаем, что невязка двойственности представляет собой довольно редкое явление, если $g : \mathcal{C}$ и $\mathcal{X}$ выпуклы и замкнуты. Тем не менее невязка двойственности может существовать даже при выпуклых и замкнутых $g : \mathcal{C}$ и $\mathcal{X}$; в работе [20], приложение C, приведены соответствующие примеры.

3.2. Связь между задачами с ограничениями и без ограничений

Задачу геометрического программирования без ограничений можно, конечно, рассматривать как частный случай задачи с ограничениями, если в качестве пустых индексных множеств взять

I и J, $g_0 : C_0$ заменить на $g : \mathscr{C}$, а X — на $\mathscr{X}$. Более удивительный факт состоит в том, что справедливо и обратное, а именно: задачу с ограничениями можно фактически сформулировать как задачу без ограничений. Ниже показано, как это делается.

Положим, что область определения функционала записывается в виде

$$\mathscr{C} \triangleq \{(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^I, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}^J, \boldsymbol{\varkappa}) \in E_n \mid \mathbf{x}^0 \in C_0; \quad \mathbf{x}^i \in C_i \alpha_i \in E_1,$$
$$g_i(\mathbf{x}^i) + \alpha_i \leqslant 0, \ i \in I; \ (\mathbf{x}^j, \varkappa_j) \in C_j^+, \ j \in J\},$$

функционал имеет значения

$$g(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^I, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}^J, \boldsymbol{\varkappa}) \triangleq g_0(\mathbf{x}^0) + \sum_J g_i^+(\mathbf{x}^j, \varkappa_j) \triangleq G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varkappa}),$$

конус определяется соотношением

$$\mathscr{X} \triangleq \{(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^I, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}^J, \boldsymbol{\varkappa}) \in E_n \mid (\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^I, \mathbf{x}^J) \in X; \ \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \ \boldsymbol{\varkappa} \in E_{0(J)}\}.$$

Тогда (неограниченная) задача $\mathscr{A}$, очевидно, совпадает с (ограниченной) задачей A. Добавочная векторная независимая переменная $\boldsymbol{\alpha}$ $(\alpha_i, \ i \in I)$ может показаться излишней, но благодаря ее включению в задачу параметрическое семейство $\mathscr{F}$, по существу, совпадает с семейством F, которое содержит некоторые важные параметры ограничений μ_i (подробное объяснение мы отложим до разд. 3.3.4).

Конечно, выбор $g : \mathscr{C}$ и $\mathscr{X}$ приводит также к выбору двойственной задачи $\mathscr{B}$ и двойственного семейства $\mathscr{G}$, соответствующих задаче $\mathscr{A}$ (т. е. задаче A). Как показано в работе [23], из вычислений результирующей сопряженной функции $h : \mathscr{X}$ и двойственного конуса $\mathscr{Y}$ следует, что возникающая двойственная задача $\mathscr{B}$ и двойственное семейство $\mathscr{G}$, по существу, совпадают с двойственной задачей B и двойственным семейством G соответственно (см. разд. 3.3.3 и 3.3.4). Указанная тождественность имеет большое значение, поскольку позволяет эффективно распространять на задачи с ограничениями большинство результатов, полученных ранее для задач без ограничений.

3.3. Задачи с ограничениями

В этом разделе на задачи с ограничениями будут распространены только основные идеи и результаты, полученные для задач без ограничений; восполнить недостающие детали можно, обратившись к разд. 3.1.

Пусть Y — конус, двойственный к конусу X, т. е.

$$Y \triangleq \{\mathbf{y} \in E_n \mid 0 \leqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \text{ для каждого } \mathbf{x} \in X\}.$$

Конечно, тот факт, что $\mathbf{x} \triangleq (\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^I, x^J)$, означает, что $\mathbf{y} \triangleq (\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^I, \mathbf{y}^J)$ и $\mathbf{y}^I$ и $\mathbf{y}^J$ построены таким же образом, как и $\mathbf{x}^I$, и $\mathbf{x}^J$.

3.3.1. Условия оптимальности. Введем следующее фундаментальное определение.

Определение. *Критическим решением (стационарным решением, равновесным решением, P-решением) задачи A называется вектор* $(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$, *для которого существует вектор* λ^* *в* $E_{0(I)}$, *такой, что* $(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$ *и* λ^* *совместно удовлетворяют следующим P-условиям оптимальности:*

$$\mathbf{x}^* \in X,$$
$$g_i(\mathbf{x}^{*i}) \leqslant 0, \qquad i \in I,$$
$$\lambda_i^* \geqslant 0, \qquad i \in I,$$
$$\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^{*i}) = 0, \qquad i \in I,$$
$$y^* \in Y_{\mathbf{x}} \ \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \rangle = 0,$$
$$\langle \mathbf{x}^{*j}, \mathbf{y}^{*j} \rangle = g_j^+(\mathbf{x}^{*j}, \varkappa_j^*), \ j \in J, \text{ где}$$

$$\mathbf{y}^{*0} \triangleq \nabla g_0(\mathbf{x}^{*0}), \ \mathbf{y}^{*i} \triangleq \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^{*i}), \ i \in I; \ \mathbf{y}^{*j} \triangleq \nabla g_j(\mathbf{x}^{*j}/\varkappa_j^*), \ j \in J.$$

Следует отметить, что для задачи обычного математического программирования сформулированные P-условия оптимальности, по существу, являются (более известными) условиями оптимальности Куна — Таккера.

Рассмотрим одно важное понятие обычного программирования, которое играет важную роль при изучении задач геометрического программирования с ограничениями.

Определение. *Вектором Куна — Таккера совместной задачи A, имеющей конечный инфимум* φ, *называется некоторый вектор* λ^* из $E_{0(I)}$, *который обладает двумя свойствами:*

$$\lambda_i^* \geqslant 0, \quad i \in I \quad \text{и} \quad \varphi = \inf_{\substack{(\mathbf{x}, \varkappa) \in C \\ \mathbf{x} \in X}} L_0(\mathbf{x}, \varkappa; \lambda^*),$$

где (обычный) лагранжиан $L_0(\mathbf{x}, \varkappa; \lambda) \triangleq G(\mathbf{x}, \varkappa) + \sum_I \lambda_i g_i(\mathbf{x}^i)$.

В теореме 13 сформулированы два условия выпуклости, выполнение которых гарантирует, что P-условия оптимальности являются необходимыми и(или) достаточными условиями оптимальности.

Теорема 13. Если g_k дифференцируема в точке $\mathbf{x}^{*k}$, $k \in \{0\} \cup I$, g_j^+ дифференцируема в точке $(\mathbf{x}^{*j}, \varkappa_j^*)$, $j \in J$, и

1) X — выпуклое множество, $(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$ — оптимальное решение задачи A, а λ^* есть вектор Куна — Таккера для задачи A, то $(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$ является критическим решением задачи A относительно λ^* (но не наоборот);

2) g_k — выпуклая функция на C_k, $k \in \{0\} \cup I \cup J$, а $(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$ — критическое решение задачи A относительно λ^*, то $(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$ является оптимальным решением задачи A и λ^* есть вектор Куна — Таккера для задачи A.

3.3.2. Седловые точки лагранжиана. Пусть $h_k : D_k$ представляет собой сопряженную функцию относительно функции $g_k : C_k$, $k \in \{0\} \cup I \cup J$, и пусть эти множества D_j определяют множества, введенные в разд. 2.2 (D_j, $j \in J$).

Следующее определение чрезвычайно важно.

Определение. *Функция H с областью определения*

$$D \triangleq \{(\mathbf{y}, \lambda) \mid \mathbf{y}^k \in D_k, \quad k \in \{0\} \cup J, \quad (\mathbf{y}^i, \lambda_i) \in D_i^+, i \in I\}$$

описывается формулой

$$H(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) \triangleq h_0(\mathbf{y}^0) + \sum_I h_i^+(\mathbf{y}^i, \lambda_i), \text{ где}$$

$$D_i^+ \triangleq \{(\mathbf{y}^i, \lambda_i) \mid \textit{ либо } \lambda_i = 0 \textit{ и } \sup_{c^i \in C_i} \langle \mathbf{y}^i, \mathbf{c}^i \rangle < +\infty,$$

$$\textit{либо } \lambda_i > 0 \textit{ и } \mathbf{y}^i \in \lambda_i D_i\},$$

$$h_i^+\{\mathbf{y}^i, \lambda_i\} \triangleq \begin{cases} \sup\limits_{c^i \in C_i} \langle \mathbf{y}^i, \mathbf{c}^i \rangle, \textit{ если } \lambda_i = 0 \textit{ и } \sup\limits_{c^i \in C_i} \langle \mathbf{y}^i, \mathbf{c}^i \rangle < +\infty, \\ \lambda_i h_i(\mathbf{y}^i/\lambda_i), \textit{ если } \lambda_i > 0 \textit{ и } \mathbf{y}^i \in \lambda_i D_i. \end{cases}$$

P-вектором совместной задачи A, имеющей конечный инфимум φ, называется вектор $(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, обладающий двумя свойствами:

$$(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in D \textit{ и } \varphi = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in X \\ \boldsymbol{\varkappa} \geqslant 0}} L_g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varkappa}; \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*),$$

где (геометрический) лагранжиан $L_g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varkappa}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) \triangleq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - H(y, \lambda) - \sum_J \varkappa_j h_j(\mathbf{y}^j)$.

Отметим, что для данной задачи A геометрический лагранжиан L_g полностью отличается от обычного лагранжиана L_0. В отличие от геометрического лагранжиана L_g обычный лагранжиан L_0 превращается просто в целевую функцию G, когда $I = \varnothing$, но L_0 существует, даже если не существует сопряженной функции $h_k : D_k$, $k \in \{0\} \cup I \cup J$. Однако следствие 17*B* из разд. 3.3.3 показывает, что векторы Куна — Таккера и P-векторы тесно связаны.

В следующей теореме о седловой точке ряд свойств оптимальных решений описывается через P-векторы.

Теорема 14. Если функция g_k: C_k, $k \in \{0\} \cup I \cup J$ выпукла и замкнута и $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\varkappa}^*)$ таковы, что $\mathbf{x}^* \in X$ и $\boldsymbol{\varkappa}^* \geqslant 0$, а $(\mathbf{y}^*, \lambda) \in D$, то $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\varkappa}^*)$— оптимальное решение задачи A, а $(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ является P-вектором задачи A тогда и только тогда, когда упорядоченная пара $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\varkappa}^*; \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ представляет собой седловую точку лаг-

ранжиана L_g, т. е.

$$\sup_{(y,\ \lambda)\in D} L_g(\mathbf{x}^*, \varkappa^*; \mathbf{y}, \lambda) = L_g(\mathbf{x}^*, \varkappa^*; \mathbf{y}^*, \lambda^*) =$$

$$= \inf_{\substack{\mathbf{x}\in X\\ \varkappa\geqslant 0}} L_g(\mathbf{x}, \varkappa; \mathbf{y}^*, \lambda^*);$$

в этом случае говорят, что лагранжиан L_g имеет в седловой точке значение $\varphi = L_g(\mathbf{x}^*, \varkappa^*; \mathbf{y}^*, \lambda^*) = G(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$. Кроме того,

$$\sup_{(\mathbf{y},\ \lambda)\in D} L_g(\mathbf{x}^*, \varkappa^*; \mathbf{y}, \lambda) = L_g(\mathbf{x}^*, \varkappa^*; \mathbf{y}^*, \lambda^*)$$

тогда и только тогда, когда векторы $(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$ и $(\mathbf{y}^*, \lambda^*)$ удовлетворяют условиям разрешимости

$$(\mathbf{x}^*, \varkappa^*) \in C,$$

$$g_i(\mathbf{x}^{*i}) \leqslant 0, \quad i \in I,$$

и условиям субградиента и дополняющей нежесткости

$$\mathbf{y}^{*0} \in \partial g_0(\mathbf{x}^{*0}),$$

либо $\lambda_i^* = 0$ и $\langle \mathbf{x}^{*i}, \mathbf{y}^{*i}\rangle = \sup\limits_{c^i\in C_i} \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{y}^{*i}\rangle$,

$$\text{либо } \lambda_i^* > 0 \text{ и } \mathbf{y}^{*i} \in \lambda_i^* \partial g_i(\mathbf{x}^{*i}), \quad i \in I,$$

$$\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^{*i}) = 0, \quad i \in I,$$

либо $\varkappa_j^* = 0$ и $\langle \mathbf{x}^{*j}, \mathbf{y}^{*j}\rangle = \sup\limits_{d^j\in D_j} \langle \mathbf{x}^{*j}, \mathbf{d}^j\rangle$,

$$\text{либо } \varkappa_j^* > 0 \text{ и } \mathbf{y}^{*j} \in \partial g_j(\mathbf{x}^{*j}/\varkappa_j^*), \quad j \in J;$$

в этом случае $L_g(\mathbf{x}^*, \varkappa^*; \mathbf{y}^*, \lambda^*) = G(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$. Кроме того,

$$L_g(\mathbf{x}^*, \varkappa^*; \mathbf{y}^*, \lambda^*) = \inf_{\substack{\mathbf{x}\in X\\ \varkappa\geqslant 0}} L_g(\mathbf{x}, \varkappa; \mathbf{y}^*, \lambda^*)$$

тогда и только тогда, когда векторы $(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$ и $(\mathbf{y}^*, \lambda^*)$ удовлетворяют условиям разрешимости

$$\mathbf{y}^* \in Y; \ h_j(\mathbf{y}^{*j}) \leqslant 0, \ j \in J,$$

и условиям ортогональности и дополняющей нежесткости

$$\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*\rangle = 0; \ \varkappa_j^* h_j(\mathbf{y}^{*j}) = 0, \ j \in J;$$

в этом случае $L_g(\mathbf{x}^*, \varkappa^*; \mathbf{y}^*, \lambda^*) = -H(\mathbf{y}^*, \lambda^*)$.

3.3.3. Двойственность. Пусть функция $h_k : D_k$ является сопряженной относительно функции $g_k : C_k$, $k \in \{0\} \cup I \cup J$, и пусть эти множества D_j определяют множества, введенные в начале разд. 2.2 (D_j, $j \in J$).

Рассмотрим теперь следующую задачу B геометрического программирования.

Задача B. *Введем целевую функцию* H

$$H(\mathbf{y}, \lambda) \triangleq h_0(\mathbf{y}^0) + \sum_I h_i^+(\mathbf{y}^i, \lambda_i)$$

с областью определения

$$D \triangleq \{(\mathbf{y}, \lambda) \mid \mathbf{y}^k \in D_k, \quad k \in \{0\} \cup J, \quad (\mathbf{y}^i, \lambda_i) \in D_i^+, \ i \in I\};$$

здесь

$$D_i^+ \triangleq \{(\mathbf{y}^i, \lambda_i) \mid \textit{либо } \lambda_i = 0 \textit{ и } \sup_{c^i \in C_i} \langle \mathbf{y}^i, \mathbf{c}^i \rangle < +\infty,$$

$$\textit{либо } \lambda_i > 0 \textit{ и } \mathbf{y}^i \in \lambda_i D_i\},$$

$$h_i^+(\mathbf{y}^i, \lambda_i) \triangleq \begin{cases} \sup\limits_{c^i \in C_i} \langle \mathbf{y}^i, \mathbf{c}^i \rangle, \textit{ если } \lambda_i = 0 \textit{ и } \sup\limits_{c^i \in C_i} \langle \mathbf{y}^i, \mathbf{c}^i \rangle < +\infty, \\ \lambda_i h_i(\mathbf{y}^i/\lambda_i), \textit{ если } \lambda_i > 0 \textit{ и } \mathbf{y}^i \in \lambda_i D_i. \end{cases}$$

Используя множество допустимых решений

$$T \triangleq \{(\mathbf{y}, \lambda) \in D \mid \mathbf{y} \in Y, \quad h_j(\mathbf{y}^j) \leqslant 0, \ j \in J\},$$

нужно найти инфимум задачи

$$\psi \triangleq \inf_{(\mathbf{y}, \lambda) \in T} H(\mathbf{y}, \lambda)$$

и множество оптимальных решений

$$T^* \triangleq \{(\mathbf{y}, \lambda) \in T \mid H(\mathbf{y}, \lambda) = \psi\}.$$

Задачи A и B называются *двойственными задачами геометрического программирования*. Если $g_k : C_k$, $k \in \{0\} \cup I \cup J$ и X выпуклы и замкнуты, то указанная двойственность симметрична в том смысле, что задачу A можно получить из задачи B таким же образом, как только что из задачи A была получена задача B. Рассматриваемая двойственность является полностью симметричной двойственностью, которая в настоящее время известна для общего (замкнутого) выпуклого программирования с ограничениями, записанными в явном виде.

Следующее определение почти так же важно, как определение двойственных задач A и B.

Определение. *Для задачи геометрического программирования с ограничениями условиями экстремальности решений являются*

(I) $$\mathbf{x} \in X \textit{ и } \mathbf{y} \in Y,$$

(II) $$g_i(\mathbf{x}^i) \leqslant 0, \ i \in I \textit{ и } h_j(\mathbf{y}^j) \leqslant 0, \ j \in J,$$

(III) $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0,$$

(IV) $$\mathbf{y}^0 \in \partial g_0(\mathbf{x}^0),$$

(V) $$\textit{либо } \lambda_i = 0 \textit{ и } \langle \mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i \rangle = \sup_{\mathbf{c}^i \in C_i} \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{y}^i \rangle,$$

$$\textit{либо } \lambda_i > 0 \textit{ и } \mathbf{y}^i \in \lambda_i \partial g_i(\mathbf{x}^i),\ i \in I,$$

(VI) $$\textit{либо } \varkappa_j = 0 \textit{ и } \langle \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle = \sup_{d^j \in D_j} \langle \mathbf{x}^j, \mathbf{d}^j \rangle,$$

$$\textit{либо } \varkappa_j > 0 \textit{ и } \mathbf{y}^j \in \partial g_j(\mathbf{x}^j/\varkappa_j),\ j \in J,$$

(VII) $$\lambda_i g_i(x^i) = 0,\ i \in I \textit{ и } \varkappa_j h_j(\mathbf{y}^j) = 0,\ j \in J.$$

Часто встречается ситуация, когда $C_i = E_{n_i}$; при этом имеет место простое условие $\langle \mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i \rangle = \sup_{\mathbf{c}^i \in C_i} \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{y}^i \rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{y}^i = 0$. В этом случае, в частности, соответствующее условие экстремальности (V) можно заменить эквивалентным условием экстремальности

$$\lambda_i \geqslant 0,\ \mathbf{y}^i \in \lambda_i \partial g_i(\mathbf{x}^i),\ i \in I.$$

Условия экстремальности (I) являются просто условиями принадлежности к конусу, а условия экстремальности (II) представляют собой ограничения для задач A и B соответственно. Условия экстремальности (III) называются *условиями ортогональности*, условия экстремальности (IV) — (VI) *условиями субградиента*, условия экстремальности (VII) — *условиями дополняющей нежесткости*.

Результаты следующей теоремы двойственности легли в основу многих теоретических построений.

Теорема 15. Если $(\mathbf{x}, \varkappa)$ и $(\mathbf{y}, \lambda)$ являются допустимыми решениями задач A и B соответственно [в этом случае условия экстремальности (I), (II) выполняются], то $0 \leqslant G(\mathbf{x}, \varkappa) + H(\mathbf{y}, \lambda)$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда удовлетворяются условия экстремальности (III) — (VII); при этом $(\mathbf{x}, \varkappa)$ и $(\mathbf{y}, \lambda)$ будут оптимальными решениями задач A и B соответственно.

Теорема 15 имеет два важных следствия, которые лишь немного отличаются от двух следствий (аналогичной) теоремы 3, поэтому мы предоставляем читателю возможность сформулировать их самостоятельно. Первое следствие лежит в основе определения невязки двойственности; оно используется при выработке критерия останова алгоритма решения задачи с ограничениями (см. разд. 3.1.4). Второе следствие позволяет получить ряд полезных характеристик двойственных оптимальных решений $(\mathbf{x}^*, \varkappa^*)$ и $(\mathbf{y}^*, \lambda^*)$, сформулированных с учетом условий экстремальности.

Следует отметить, что если функция $g_0 : C_0$ выпукла и замкнута, то условие субградиента (IV) можно заменить на эквивалент-

ное условие субградиента

(IVa) $$\mathbf{x}^0 \in \partial h_0 (\mathbf{y}^0).$$

Аналогично, если функции $g_i : C_i$, $i \in I$, выпуклы и замкнуты, то условие субградиента (V) можно заменить на эквивалентное условие субградиента:

(Va) $$\textit{либо } \lambda_i = 0 \textit{ и } \langle \mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i \rangle = \sup_{\mathbf{c}^i \in C_i} \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{y}^i \rangle,$$

$$\textit{либо } \lambda_i > 0 \textit{ и } \mathbf{x}^i \in \partial h_i (\mathbf{y}^i/\lambda_i), \ i \in I,$$

и, наконец, если функции $g_j : C_j$, $j \in J$, выпуклы и замкнуты, то условие субградиента (VI) можно заменить эквивалентным условием субградиента:

(VIa) $$\textit{либо } \varkappa_j = 0 \textit{ и } \langle \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle = \sup_{\mathbf{d}^j \in D_j} \langle \mathbf{x}^j, \mathbf{d}^j \rangle,$$

$$\textit{либо } \varkappa_j > 0 \textit{ и } \mathbf{x}^j \in \varkappa_j \partial h_j (\mathbf{y}^j), \quad j \in J.$$

Сформулированные эквивалентные условия (IVa) — (VIa) оказываются особенно полезными при решении задач, в которых на основе только одного двойственного оптимального решения ($\mathbf{y}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*$) из T^* с использованием условий экстремальности находятся все оптимальные решения прямой задачи ($\mathbf{x}^*$, $\boldsymbol{\varkappa}^*$) из S^*.

Следует особо подчеркнуть, что нет необходимости решать непосредственно задачу A. При соответствующих условиях решение задачи A можно найти косвенным образом, либо путем решения задачи B, либо на основе условий экстремальности (I) — (VII). Иногда удобно находить решение системы уравнений, образованной условиями экстремальности (I) — (VII), особенно когда она оказывается (по существу) линейной, например для задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями. В других случаях удобно решать задачу B, особенно когда индексное множество J пусто, как, например, в задачах квадратичного программирования с квадратичными ограничениями или в задачах геометрического программирования с позиномными ограничениями; в этих случаях задача B не содержит ограничений, хотя в задаче A они имеются. Совершенно очевидно, что во всех указанных случаях чрезвычайно важно отсутствие невязки двойственности.

Из определения лагранжиана L_g (разд. 3.3.2) и того факта, что X является конусом, сразу следует, что условие принадлежности к конусу $\mathbf{y} \in Y$, ограничения $h_j (\mathbf{y}^j) \leqslant 0$, $j \in J$, условие ортогональности $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ и, наконец, условия дополняющей жесткости $\varkappa_j h_j (y^j) = 0$, $j \in J$, можно заменить одним эквивалентным условием

$$L_g (\mathbf{x}, \boldsymbol{\varkappa}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\substack{\mathbf{x}' \in X \\ \boldsymbol{\varkappa}' \geqslant 0}} L_g (\mathbf{x}', \boldsymbol{\varkappa}'; \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Кроме того, если функции $g_k : C_k$, $k \in \{0\} \cup I \cup J$ являются выпуклыми и замкнутыми, то из теории сопряженных преобразований следует, что ограничения $g_i(\mathbf{x}^i) \leqslant 0$, $i \in I$, условия субградиентов (IV) — (VI) и, наконец, условия дополняющей нежесткости $\lambda_i g_i(\mathbf{x}^i) = 0$, $i \in I$, могут быть заменены двумя эквивалентными условиями $\varkappa \geqslant 0$ и $\sup\limits_{(\mathbf{y}', \lambda') \in D} L_g(\mathbf{x}, \varkappa; \mathbf{y}', \lambda') = L_g(\mathbf{x}, \varkappa; \mathbf{y}, \lambda)$. Следовательно, условие существования седловой точки, обсуждавшееся в разд. 3.3.2, эквивалентно условиям экстремальности, если функции $g_k : C_k$, $k \in \{0\} \cup I \cup J$ выпуклы и замкнуты. Тем не менее, видимо, удобнее использовать условия экстремальности, приведенные в определении.

В следующей теореме устанавливается важная связь двойственной задачи B с P-векторами, которые были определены в разд. 3.3.2.

Теорема 16. Если задача A совместна, имеет конечный инфимум φ и

1) обладает P-вектором, то задача B совместна и $\varphi + \psi = 0$;

2) задача B совместна, а $\varphi + \psi = 0$, то $\{(\mathbf{y}^*, \lambda^*) \mid (\mathbf{y}^*, \lambda^*)$ есть P-вектор задачи $A\} = T^*$.

В следующей теореме устанавливается важная связь между задачей B и векторами Куна — Таккера, определение которых дано в разд. 3.3.1.

Теорема 17. Если задачи A и B совместны, $\varphi + \psi = 0$ и для задачи B существует минимизирующая последовательность $\{(\mathbf{y}^q, \lambda^q)\}_1^\infty$ [*т. е.* $(\mathbf{y}^q, \lambda^q) \in T$ и $\lim\limits_{q \to +\infty} H(\mathbf{y}^q, \lambda^q) = \psi$], такая, что $\lim\limits_{q \to +\infty} \lambda^q$ существует и конечен, то $\lambda^* \triangleq \lim\limits_{q \to +\infty} \lambda^q$ является вектором Куна — Таккера для задачи A.

Ниже в следствии 17А указывается на связь множества оптимальных решений T^* непосредственно с векторами Куна — Таккера.

Следствие 17А. Если задачи A и B совместны и $\varphi + \psi = 0$, то каждое двойственное оптимальное решение $(\mathbf{y}^*, \lambda^*) \in T^*$ обеспечивает вектор Куна — Таккера λ^* для задачи A.

В следствии 17B множество всех P-векторов $(\mathbf{y}^*, \lambda^*)$ непосредственно связывается с множеством векторов Куна — Таккера λ^*.

Следствие 17В. Если задача A совместна и имеет конечный инфимум φ, то каждый P-вектор $(\mathbf{y}, \lambda^*)$ для задачи A обеспечивает вектор Куна — Таккера λ^* для задачи A.

Все вышеизложенное свидетельствует о том, что наличие невязки двойственности весьма нежелательно. Ниже приводится

ГП-вариант теоремы Фенхеля, содержащий условия, выполнение которых гарантирует как отсутствие невязки двойственности, так и существование оптимального решения прямой задачи $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\varkappa}^*) \in \in S^*$.

Теорема 18. Если функции $g_k : C_k$, $k \in \{0\} \cup I \cup J$, и множество X выпуклы и замкнуты и

1) задача B имеет допустимое решение $(\mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}')$, такое, что

$$h_j(\mathbf{y}'^j) < 0, \ j \in J,$$

2) задача B имеет конечный инфимум ψ,

3) существует вектор $(\mathbf{y}^+, \boldsymbol{\lambda}^+)$, такой, что

$$\mathbf{y}^+ \in (\mathrm{ri}\, Y),$$

$$\mathbf{y}^{+h} \in (\mathrm{ri}\, D_h), \ k \in \{0\} \cup J,$$

$$(\mathbf{y}^{+i}, \lambda_i^+) \in (\mathrm{ri}\, D_i^+), \ i \in I,$$

то $\mathcal{Q} + \psi = 0$ и $S^* \neq \phi$.

Следует отметить, что вектор $(\mathbf{y}^+, \boldsymbol{\lambda}^+)$ из предположения (3) не обязательно должен быть допустимым решением задачи B. Тем не менее вектор $(\mathbf{y}^+, \boldsymbol{\lambda}^+)$, очевидно, является таким решением, если множество J пустое (что, например, имеет место в примерах из разд. 2.2). Следовательно, не нарушая справедливости теоремы 18, предположение 1) можно заменить гипотезой

(1′) Множество J пустое.

Кроме того, если конус Y представляет собой фактически векторное пространство (как, например, во всех примерах из разд. 2.2), то условие $\mathbf{y}^+ \in (\mathrm{ri}\, Y)$ можно заменить на более слабое условие $\mathbf{y}^+ \in Y$.

С помощью теоремы 18 можно показать, что в задачах типа (1) — (3), указанных после теоремы 5, нет невязки двойственности. Кроме того, (несформулированный) двойственный вариант теоремы 18 можно использовать для усиления теоремы Куна — Таккера в обычном программировании.

3.3.4. Параметрическое программирование и постоптимальный анализ. Как уже указывалось в разд. 3.2, для целей анализа задачу A следует погрузить в параметрическое семейство F, которое можно получить, если заданную область $\mathscr{C}$ (определенную в начале разд. 3.2) подвергнуть допустимым возмущениям $-\mathbf{u}$ и одновременно оставить без изменения заданный конус $\mathscr{X}$.

В силу структуры множества $\mathscr{E}_I$ целесообразно разбить вектор $\mathbf{u}$ на векторные компоненты $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{u}^I$, μ, $\mathbf{u}^J$ и $\mathbf{u}_J$, которые соответствуют векторам $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^I$, α, $\mathbf{x}^J$ и $\boldsymbol{\varkappa}$. Очевидно, что компоненты u_j вектора $\mathbf{u}_J$ не влияют на величину инфимума задачи, а подвергают

возмущению $-u_j$ только оптимальное значение $\varkappa_j$ (если таковое существует). Следовательно, если положить u_j равными нулю, то из результирующего семейства $\mathcal{F}$ будут исключены только те задачи $\mathcal{A}(\mathbf{u})$, которые, по существу, и не нужны. Поэтому в качестве результирующего семейства $\mathcal{F}$ на самом деле берется семейство F, которое не содержит таких излишних задач. Конечно, векторы $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{u}^I$, $\mathbf{u}^J$ и $\boldsymbol{\mu}$ необходимы для параметризации F: из них формируется единственный векторный параметр $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$, где $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^I, \mathbf{u}^J) \triangleq \mathbf{u}$.

ГП-*семейством* называется параметрическое семейство F всех задач $A(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$ (при фиксированных $g_k : C_k$, $k \in \{0\} \cup I \cup J$ и X). Для упрощения дальнейшего изложения и придания ему надлежащей математической строгости ниже дано формальное определение задачи $A(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$, которое следует сравнить с формальным определением задачи A, приведенным в начале разд. 2.2.

Задача $A(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$. *Рассмотрим целевую функцию* $G(\cdot + \mathbf{u}, X)$, *которая описывается выражением*

$$G(\mathbf{x}+\mathbf{u}, \varkappa) \triangleq g_0(\mathbf{x}^0+\mathbf{u}^0)+\sum_J g_j^+(\mathbf{x}^j+\mathbf{u}^j, \varkappa_j)$$

и определена в области

$$C(\mathbf{u}) \triangleq \{(\mathbf{x}, \varkappa) \mid \mathbf{x}^k+\mathbf{u}^k \in C_k,\ k \in \{0\} \cup I,$$
$$(\mathbf{x}^j+\mathbf{u}^j, \varkappa^j) \in C_j^+,\ j \in J\},$$

где

$$C_j^+ \triangleq \{(c^j, \varkappa_j) \mid \text{ либо } \varkappa_j=0 \text{ и } \sup_{d^j \in D_j} \langle \mathbf{c}^i, \mathbf{d}^j \rangle < +\infty,$$

$$\text{либо } \varkappa_j > 0 \text{ и } c^j \in \varkappa_j C_j\},$$

$$g_j^+(\mathbf{c}_j, \varkappa_j) \triangleq \begin{cases} \sup\limits_{\mathbf{d}^j \in D_j} \langle \mathbf{c}^j, \mathbf{d}^j \rangle, \text{ если } \varkappa_j=0 \text{ и } \sup\limits_{\mathbf{d}^j \in D_j} \langle \mathbf{c}^j, \mathbf{d}^j \rangle < +\infty, \\ \varkappa_j g_j(\mathbf{c}^j/\varkappa_j) \text{ если } \varkappa_j > 0 \text{ и } \mathbf{c}^j \in \varkappa_j C_j. \end{cases}$$

Используя множество допустимых решений

$$S(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) \triangleq \{(\mathbf{x}, \varkappa) \in C(\mathbf{u}) \mid \mathbf{x} \in X, \quad g_i(\mathbf{x}^i+\mathbf{u}^i)+\mu_i \leqslant 0,\ i \in I\},$$

нужно найти инфимум задачи

$$\varphi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) \triangleq \inf_{(\mathbf{x}, \varkappa) \in S(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})} G(\mathbf{x}+\mathbf{u}, \varkappa)$$

и множество оптимальных решений

$$S^*(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) \triangleq \{(\mathbf{x}, \varkappa) \in S(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) \mid G(\mathbf{x}+\mathbf{u}, \varkappa) = \varphi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})\}.$$

Конечно, исходная задача A является задачей $A(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ из параметрического семейства F; символы A, S, φ и S^* теперь пред-

ставляют функции от $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$, хотя в исходной постановке они использовались только для обозначения конкретных функциональных значений $A(0, 0)$, $S(0, 0)$, $\varphi(0, 0)$ и $S^*(0, 0)$ соответственно. При сравнении последующих результатов и рассуждений с вышеизложенным следует помнить об указанной разнице в обозначениях.

Вспомним пример 5 из разд. 2.2. Интересно, что в этом примере использование вектора возмущений $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$ приводит к изменению логарифма модуля коэффициентов сигнома c_q и величин d_k — верхних границ ограничений.

В разд. 3.1.5 сформулированы теоремы, касающиеся задач геометрического программирования без ограничений. Чтобы распространить эти теоремы на задачи с ограничениями, следует

1) каждую гипотезу о том, что множество $\mathscr{C}$ выпукло, заменить предположением о том, что множества C_0 и C_j^+, $j \in J$, а также функции $g_i : C_i$, $i \in I$, являются выпуклыми;

2) каждую гипотезу о том, что функция $g : \mathscr{C}$ выпукла (замкнута), заменить предположением о том, что функции $g_k : C_k$, $k \in \{0\} \cup I$, и функции $g_j^+ : C_j^+$, $j \in J$, являются выпуклыми (замкнутыми);

3) каждую гипотезу о выпуклости (замкнутости) конуса $\mathscr{X}$ заменить предположением о выпуклости (замкнутости) конуса X;

4) произвести очевидные изменения обозначений в самих гипотезах и в определениях, а также в утверждениях теорем.

Действуя в соответствии с п. 4, необходимо: символ $\mathscr{G}$ заменить на символ G, символ $\mathbf{v}$ — на символ $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})$, где $(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^I, \mathbf{v}^J) \triangleq \mathbf{v}$ — множества всех допустимых возмущений, а $\boldsymbol{\nu}$ определяет изменения верхних границ ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abrams R. A., Bunting M. L.., Reducing Reversed Posynomial Programs, *SIAM J. Appl. Math.*, **27**, 629—640 (1974).
2. Avriel M., Williams A. C., Complementary Geometric Programming, *SIAM J. Appl. Math.*, **19**, 125—141 (1970).
3. Courant R., Hilbert D., Methods of Mathemitcal Physics, I, Interscience, New York, 1953.
4. Dinkel J. J., Peterson E. L., Discrete Optimal Control (with Linear Dynamics) via Geometric Programming, *J. Math. Anal. and Appl.* (1978).
5. Duffin R. J., Infinite Programs, Linear Inequalities and Related Systems, H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Eds., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1956, pp. 157—170.
6. Duffin R. J., Dual Programs and Minimum Cost, *SIAM J. Appl. Math.*, **10**, 119 (1962).
7. Duffin R. J., Cost Minimization Problems Treated by Geometric Means, Operations Res., **10**, 668 (1962).
8. Duffin R. J., Linearizing Geometric Programs, *SIAM Rev.*, **12**, 211—227 (1970).
9. Duffin R. J., Peterson E. L., Duality Theory for Geometric Programming, *SIAM J. Appl. Math.*, **14**, 1307—1349 (1966).

10. Duffin R. J., Geometric Programs Treated with Slack Variables, *J. Appl. Anal.*, **2**, 255—267 (1972).
11. Duffin R. J., The Proximity of (Algebraic) Geometric Programming to Linear Programming, *Math. Prog.*, 3, 250—253 (1972).
12. Duffin R. J., Reversed Geometric Programs Treated by Harmonic Means, *Indiana Univ. Math. J.*, **22**, 531—550 (1972).
13. Duffin R. J., Geometric Programming with Signomials, *J. Optimization Theory and Applic.*, **11**. 3—35 (1973).
14. Duffin R. J., Peterson E. L., Zener C., Geometric Programming — Theory and Applications, Wiley, New York, 1967. [Имеется перевод: Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование.— М.: Мир, 1972.]
15. Falk J. E., Global Solutions of Signomial Programs, Technical Report No. T-274, George Washington Univ. Prog. in Logistics, Washington, D. C., June 1973.
16. Fenchel W., On Conjugate Convex Functions, *Canadian J. Math.*, **1**, 73—77 (1949).
17. Fenchel W., Convex Cones, Sets and Functions, Mathematics Department mimeographed lecture notes, Princeton Univ., Princeton, New Jersey, 1951.
18. Hall M. A., Peterson E. L., Traffic Equilibria Analyzed via Geometrtic Programming, Proc. Int. Symp. Traffic Equilibrium Methods, M. Florian, Ed., 53—105, Springer-Verlag Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 118, New York, 1976.
19. Kretschmer K. S., Programmes in Paired Spaces, *Canadian J. Math.*, **13**, 221 (1961).
20. Peterson E. L., Symmetric Duality for Generalized Unconstrained Geometric Programming, *SIAM J. Appl. Math.*, **19**, 487—526 (1970).
21. Peterson E. L., Mathematical Foundations of Geometric Programming, Appendix to Geometric Programming and Some of Its Extensions, Optimization and Design, M. Avriel, M. J. Rijckaert and D. J. Wilde, Eds., Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N. J., 1973, pp. 244—289.
22. Peterson E. L., Geometric Programming, *SIAM Review.*, 18, 1—51 (1976).
23. Peterson E. L., Constrained Duality via Unconstrained Duality in Generalized Geometric Programming, *J. Opt. Theory and Applic.* (1978).
24. Peterson E. L., The Mathematical Foundations of Convex and Nonconvex Programming, 1979.
25. Peterson E. L., Ecker J. G., Geometric Programming, Duality in Quadratic Programming and l_p — approximation. I, Proc. Int. Sym. Math. Prog., H. W. Kuhn, Ed., 445—480 Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970, pp. 445—480.
26. Peterson E. L., Wendell R. E., Optimal Location via Geometric Programming, 1978.
27. Rijckaert M. J., Engineering Applications of Geometric Programming, Optimization and Design, M. Avriel, M. J. Rijckaert and D. J. Wilde, Eds., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973, pp. 196—220.
28. Rockafellar R. T., Duality and Stability in Extremum Problems Involving Convex Functions, *Pac. J. Math.*, **21**, 167—187 (1967).
29. Rockafellar R. T., Duality in Nonlinear Programming, *Amer. Math. Soc. Lects. Appl. Math.*, **11**, G. B. Dantzig and A. F. Veinott Eds., Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1968, pp. 401—422.
30. Rockafellar R. T., Convex Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. , 1970.
31. Zener C., A Mathematical Aid in Optimizing Engineering Designs, *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, **47**, 537—539 (1961).
32. Zener C., A Further Mathematical Aid in Optimizing Engineering Designs, *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, **48**, 518—522 (1962).
33. Zener C., Engineering Design by Geometric Programming, Wiley, New York, 1971.

II-6. Нелинейное программирование

О. Мангасариан[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

В общем виде задача нелинейного программирования формулируется следующим образом:

$$\text{минимизировать } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при ограничениях

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0, \; j = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$
$$h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \; j = 1, \ldots, k.$$

В векторных обозначениях соотношения (1) можно записать в более компактном виде:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{x})$$

при ограничениях

$$g(\mathbf{x}) \leqslant 0, \; h(\mathbf{x}) = 0, \qquad (1')$$

где $f: R^n \to R$, $g: R^n \to R^m$ и $h: R^n \to R^k$, т. е. f, g, h — функции, отображающие каждую точку n-мерного вещественного евклидова пространства R^n соответственно в R, R^m и R^k.

Задачи такого рода часто возникают как в теории управления [12], так и в естественных науках [18, 58], и их систематическое исследование, начатое в конце 40-х годов [23], привело к возникновению самостоятельной научной дисциплины — нелинейного программирования. В данном обзоре затрагиваются как теоретические аспекты нелинейного программирования, так и вопросы построения вычислительных алгоритмов. В разд. 2 рассматривается ряд условий оптимальности. Будучи исключительно важными в принципиальном отношении, условия оптимальности играют существенную роль и при построении вычислительных алгоритмов. В разд. 3 кратко рассматривается одна из двойственных задач нелинейного программирования. Начиная с разд. 4 описываются различные вычислительные алгоритмы, рассматриваются одномерные задачи минимизации. Разд. 5 посвящен обсуждению алгоритмов минимизации при отсутствии ограничений, т. е. алгоритмов решения задачи минимизации $f(\mathbf{x})$ ($x \in R^n$). Наконец, в разд. 6 описываются различные алгоритмы решения задачи (1).

[1)] O. Mangasarian University of Wisconsin

Прежде всего введем некоторые обозначения и дадим ряд определений. Основные определения связаны с понятием «решение» задачи (1).

Точка $\bar{\mathbf{x}}$ в R^n, удовлетворяющая условиям $g(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant 0$ и $h(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, называется *решением* или *глобальным решением* задачи (1), если $f(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условиям $g(\mathbf{x}) \leqslant 0$ и $h(\mathbf{x}) = 0$. Говорят, что точка $\bar{\mathbf{x}}$ в R^n является *локальным решением* задачи (1), если $f(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условиям $g(\mathbf{x}) \leqslant 0$, $h(\mathbf{x}) = 0$, и $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leqslant \delta$, где $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| = (\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x}_j)^2)^{1/2}$, для некоторого числа $\delta > 0$. Наконец, точка $\bar{\mathbf{x}}$ в R^n является *единственным локальным решением* задачи (1), если для всех $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$, удовлетворяющих условиям $g(\mathbf{x}) \leqslant 0$, $h(\mathbf{x}) = 0$, имеет место строгое неравенство $f(\bar{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x})$, а для некоторого числа $\delta > 0$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leqslant \delta$.

Мы будем также пользоваться понятиями *выпуклой* и *вогнутой* функций. Обобщения этих понятий можно найти в работе [34]. Функция f, определенная на множестве $X \in R^n$, называется выпуклой в точке $\bar{\mathbf{x}}$ (по отношению к X), если из условий

$$\mathbf{x} \in X, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\bar{\mathbf{x}} \in X \tag{2}$$

следует

$$(1-\lambda) f(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda f(\mathbf{x}) \geqslant f((1-\lambda)\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{x}).$$

Если последнее неравенство является строгим для $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$, то функция f называется *строго выпуклой* в $\mathbf{x}$, а в случае, когда знак неравенства изменен на обратный (вместо $\geqslant$ имеет место $\leqslant$), функция f является *вогнутой* в точке $\bar{\mathbf{x}}$. Функция f *выпукла* на множестве X, если она выпукла в *каждой* точке $\bar{\mathbf{x}} \in X$.

Весьма часто будем пользоваться векторными обозначениями. Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — векторы в R^n, то через x_i и y_i $(i = 1, \ldots, n)$ будем обозначать их соответствующие составляющие; при этом $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ есть скалярное произведение $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, а $\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$ — n-мерная квадратная матрица, на пересечении i-й строки и j-го столбца которой расположен матричный элемент, равный произведению x_i и y_j. Верхние индексы будут проставляться для выделения тех или иных конкретных векторов (например, можно говорить о двух заданных векторах $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ в R^n). Показатель степени экспоненциальной функции будем заключать в скобки. Если функция f $(f: R^n \to R)$ дифференцируема в точке $\bar{\mathbf{x}}$, то существует вектор $\partial f(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_1, \ldots, \partial f(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_n$, который обозначим через $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$; если функция f дважды дифференцируема в точке $\bar{\mathbf{x}}$, то n-мерную

квадратную матрицу Гессе (гессиан) с элементами $\partial^2 f(\bar{x})/\partial x_i \partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ будем обозначать через $\nabla^2 f(\bar{x})$. Функция дифференцируема (дважды дифференцируема) *вблизи* $\bar{x}$, если она дифференцируема (дважды дифференцируема) в окрестности точки $\bar{x}$. Символ ■ будет означать конец формулировки теоремы или описания алгоритма.

2. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Необходимыми условиями оптимальности являются условия, которым должно удовлетворять либо глобальное, либо локальное, либо единственное локальное решение задачи (1). Достаточными условиями оптимальности являются условия, при которых рассматриваемая точка в R^n принадлежит одному из перечисленных выше типов решений задачи (1). Сначала сформулируем некоторые из наиболее известных условий оптимальности, в которых фигурируют лишь первые производные функций f, g и h и которые называются поэтому *условиями оптимальности первого порядка*.

2.1. Условия Куна — Таккера первого порядка [25, 34]

Необходимость. Пусть $\bar{x}$ является либо локальным, либо глобальным решением задачи (1), а функции f, g и h дифференцируемы в точке $\bar{x}$. Предположим, что g и h в точке $\bar{x}$ удовлетворяют ограничениям первого порядка [34]: h непрерывно дифференцируема в точке $\bar{x}$, величины $\nabla h_i(\bar{x})$ $(i = 1, \ldots, k)$ линейно-независимы и в $R^{(n)}$ существует вектор z, удовлетворяющий условию $\nabla g_i(\bar{x})\, z > 0$ при $i = 1, \ldots, m$, так что $g_i(\bar{x}) = 0$ и $\nabla h_j(\bar{x})\, z = 0$ при $j = 1, \ldots, k$. Тогда вектор $\bar{x}$ и произвольно выбранные $\bar{u} \in R^m$ и $\bar{v} \in R^k$ удовлетворяют условиям Куна — Таккера

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{k} \bar{v}_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0,$$

$$\bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$g(\bar{x}) \leqslant 0, \quad h(\bar{x}) = 0, \quad \bar{u} \geqslant 0.$$

Достаточность. Справедливо и обратное утверждение: если функции f и g дифференцируемы и выпуклы в точке $\bar{x}$, функция h линейна и выполняются условия Куна — Таккера (3), то $\bar{x}$ есть глобальное решение задачи (1).

Условия Куна — Таккера (3) просто означают, что линейная комбинация градиента целевой функции, взятого с положительным весом, градиентов функций, задающих активные ограничения

в виде неравенств (при неотрицательных коэффициентах перед составляющими градиентов и $g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$), и градиентов функций, задающих ограничения в виде равенств, в точке $\bar{\mathbf{x}}$ должна обращаться в нуль. Указанные выше условия, которым должны удовлетворять функции g и h, постулируются, с тем чтобы исключить из рассмотрения сингулярные решения, для которых условия Куна — Таккера не могут выполняться. Так, например, начало координат в R^2 является глобальным решением задачи минимизации x_1 при ограничениях: $(x_1)^4 - x_2 \leqslant 0$ и $-(x_1)^3 + x_2 \leqslant 0$; однако в данном случае ни перечисленные выше условия для функций g и h, ни условия Куна — Таккера не выполняются. Если не потребовать, чтобы функции g и h были выпуклыми, то с помощью условий (3) не удастся исключить из рассмотрения стационарные точки, например нулевую точку для функции $(x)^3$. Для исключения стационарных точек такого рода были сформулированы условия оптимальности с использованием вторых частных производных [14].

2.2. Условия Куна — Таккера второго порядка

Необходимость. Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ является либо локальным, либо глобальным решением задачи (1), а f, g и h дважды непрерывно дифференцируемы вблизи $\bar{\mathbf{x}}$. Предположим, что функции g и h удовлетворяют описанным в разд. 2.1 ограничениям первого порядка и, кроме того, ограничениям второго порядка: $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$, $i \in \{i \mid g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, и $\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})$ $(j = 1, \ldots, k)$ линейно независимы. Тогда вектор $\bar{\mathbf{x}}$ и произвольно взятые векторы $\bar{\mathbf{u}} \in R^m$ и $\bar{\mathbf{v}} \in R^k$ удовлетворяют условиям Куна — Таккера (3) и, кроме того, для каждого $\mathbf{y}$ в R^n, удовлетворяющего условиям $\mathbf{y}\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $i \in \{i \mid g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, и $\mathbf{y}\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ $(j = 1, \ldots, k)$, имеет место неравенство

$$\mathbf{y}\nabla_{11}\mathbf{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})\,\mathbf{y} \geqslant 0, \tag{4}$$

где лагранжиан $\mathbf{L}$ определяется соотношением

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k} v_i h_i(\mathbf{x}), \tag{5}$$

а $\nabla_{11}\mathbf{L}$ есть $(n \times n)$-мерная матрица Гессе, элементами которой являются вторые частные производные $\mathbf{L}$ по составляющим $\mathbf{x}$.

Достаточность. Будем теперь рассуждать в обратном порядке. Пусть f, g и h дважды дифференцируемы в точке $\bar{\mathbf{x}}$, а вектор $\bar{\mathbf{x}}$ и некоторые векторы $\bar{\mathbf{u}} \in R^m$ и $\bar{\mathbf{v}} \in R^k$ удовлетворяют условиям (3).

Предположим, что для любого ненулевого $\mathbf{y} \in R^n$, удовлетворяющего условиям

$$\begin{gathered}\mathbf{y}\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})=0 \text{ при } i=1, \ldots, m, \ g_i(\bar{\mathbf{x}})=0, \ \bar{\mathbf{u}}_i>0, \\ \mathbf{y}\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})\leqslant 0 \text{ при } i=1, \ldots, m, \ g_i(\bar{\mathbf{x}})=0, \ \bar{u}_i=0, \\ \mathbf{y}\nabla h_i(\bar{\mathbf{x}})=0 \text{ при } i=1, \ldots, k,\end{gathered} \tag{6}$$

имеет место неравенство

$$\mathbf{y}\nabla_{11}\mathbf{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})\, y>0. \tag{7}$$

Тогда $\bar{\mathbf{x}}$ есть единственное локальное решение задачи (1).

Достаточное условие оптимальности второго порядка играет важную роль при построении некоторых из быстрее, чем линейно-сходящихся алгоритмов, которым посвящен разд. 6. Следует также отметить, что достаточные условия оптимальности второго порядка можно использовать и в линейном программировании; поскольку в этом случае $\nabla_{11}\mathbf{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})=0$, то из условия (6) следует $\mathbf{y}=0$. При этом $\bar{\mathbf{x}}$ является единственным решением задачи линейного программирования. Что касается условия (4), то для любого решения задачи линейного программирования оно является тривиальным.

В последние годы предпринимались попытки [53, 54, 55, 56, 6, 35] исследовать взаимосвязь между решениями задач нелинейного программирования и решениями нелинейных уравнений. Цель такого рода исследований заключается в том, чтобы приспособить весьма широкий круг методов решения нелинейных уравнений [41, 42] к решению задач нелинейного программирования. Один из полученных при этом результатов воплощен в рассмотренных ниже условиях оптимальности, в которых соотношения в виде неравенств вообще не фигурируют.

2.3. Расширенные условия оптимальности Лагранжа первого порядка [36]

Необходимость. Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ — локальное или глобальное решение задачи (1), и пусть функции f, g и h дифференцируемы в точке $\bar{\mathbf{x}}$. Предположим, что g и h удовлетворяют в точке $\bar{\mathbf{x}}$ ограничениям первого порядка, уже рассмотренным в разд. 2.1. Тогда $\bar{\mathbf{x}}$ и некоторая пара векторов $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$ в $R^m \times R^k$ задают стационарную точку расширенной функции Лагранжа $M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, определяе-

мой соотношением

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{4r} \sum_{i=1}^{m} ((rg_i(\mathbf{x}) + y_i)_+^4 - (y_i)^4) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{r}{2} (h_i(\mathbf{x}))^2 + z_i h_i(\mathbf{x}) \right), \tag{8}$$

где r — фиксированное положительное число, а β_+^4 определяется следующим образом:

$$(\beta)_+^4 = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta < 0 \\ \beta^4, & \text{если } \beta \geqslant 0. \end{cases}$$

В частности, имеем

$$\nabla_1 M(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) = 0, \quad \nabla_2 M(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) = 0, \quad \nabla_3 M(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) = 0, \tag{9}$$

где $\nabla_i M$ обозначает градиент M относительно i-го аргумента ($i = 1, 2, 3$).

Достаточность. Пусть функции f и g дифференцируемы и выпуклы в точке $\bar{\mathbf{x}}$, функция h линейна и выполняются условия (9). Тогда $\bar{\mathbf{x}}$ есть глобальное решение задачи (1). ■

Заметим, что условия (9) не содержат соотношений в виде неравенств ни для переменных, ни для функций, задающих ограничения исходной задачи. Таким образом, для решения уравнения (9) можно непосредственно применить аппарат теории нелинейных уравнений [41]. Оптимальные множители Куна — Таккера $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ в условиях (3) и оптимальные $\bar{\mathbf{y}}$ и $\bar{\mathbf{z}}$, фигурирующие в условиях (9), связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= (\bar{y}_i)^3, \quad i = 1, \ldots, m \\ \bar{v}_i &= \bar{z}_i, \quad i = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{10}$$

Подробности, касающиеся расширенного лагранжиана, можно найти в работах [1, 36, 37, 53, 54, 55, 56].

Другое условие оптимальности, которое может оказаться полезным с вычислительной точки зрения, связано с так называемыми правильными штрафными функциями. Правильной штрафной функцией, отображающей R^n на R и ассоциированной с задачей (1), считается такая функция, локальный (или глобальный) минимум которой при *конечных* значениях входящего в нее параметра соответствует локальному (или глобальному) минимуму f в задаче (1). Как правило, такие функции непрерывны, но лишь кусочно-дифференцируемы [64, 43, 22, 13]. Однако некоторые из правильных штрафных функций локально дифференцируемы [15]. Мы ограничимся здесь рассмотрением простейшей кусочно-дифференцируемой правильной штрафной функции.

2.4. Условия оптимальности, в которых используются правильные штрафные функции

Необходимость. Пусть $\bar{x}$ — либо локальное, либо глобальное решение задачи (1), и пусть имеет место одна из следующих альтернатив:

а) функции f, g и h непрерывно дифференцируемы вблизи $\bar{x}$, и при этом выполняется одно из следующих условий: (1) система соотношений $\nabla f(\bar{x})\, y \leqslant 0$, $\nabla g_i(\bar{x})\, y \leqslant 0$, $i \in \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, $\nabla h(\bar{x})\, y = 0$ не имеет решения при $y \neq 0$ ($y \in R^n$); (2) $\nabla g_i(\bar{x})$, $i \in \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, $\nabla h_i(\bar{x})$ ($i = 1, \ldots, k$) линейно-независимы;

б) функции f и g выпуклы в R^n, функция h линейна, и существует такой вектор $\tilde{x}$, для которого $g(\tilde{x}) < 0$, а $h(\tilde{x}) = 0$.

Тогда существует вещественное число $r_0 > 0$, такое, что для всех $r \geqslant r_0$ и для любой точки x, принадлежащей окрестности точки $\bar{x}$, имеет место неравенство $P(\bar{x}, r) \leqslant P(x, r)$, где

$$P(x, r) = f(x) + r\Big[\sum_{i=1}^{m} g_i(x)_+ + \sum_{i=1}^{k} |h_i(x)|\Big],$$

а $g_i(x)_+$ совпадает с $g_i(x)$ при $g_i(x) \geqslant 0$ и равняется нулю, если $g_i(x) < 0$.

Достаточность. Если для всех $r \geqslant r_0 > 0$ неравенство $P(\bar{x}, r) \leqslant P(x, r)$ имеет место для всех x некоторого множества S, содержащего $\bar{x}$ и хотя бы одно из допустимых решений задачи (1), то $\bar{x}$ есть решение задачи (1) при условии, что $x \in S$. (В качестве S может быть взято R^n или достаточно большая окрестность $\bar{x}$.) ■

Заметим также, что при рассмотрении условий достаточности относительно функций f, g и h не делалось предложений ни о дифференцируемости, ни о выпуклости и даже о непрерывности этих функций.

В заключение приведем еще одну формулировку условия оптимальности, которая будет полезной в связи с рассмотрением алгоритмов проекции градиента.

2.5. Градиентная формулировка условий оптимальности первого порядка [28]

Необходимость. Пусть $\bar{x}$ — решение задачи (1); предположим, что функция g непрерывна и выпукла в R^n, функция h линейна, а функция f дифференцируема в $\bar{x}$. Тогда для любой ($n \times n$)-мерной симметричной положительно-определенной матрицы H выпол-

няется условие проекции градиента

$$Q(\bar{\mathbf{x}} - \mu \mathbf{H} \nabla f(\bar{\mathbf{x}})) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mu \geqslant 0,$$

где $Q(\mathbf{z})$ — проекция $\mathbf{z}$ на $X = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) \leqslant 0, \ h(\mathbf{x}) = 0\}$, т. е.

$$\mu \| \mathbf{H} \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \|_{H^{-1}} = \min_{y \in X} \| \bar{\mathbf{x}} - \mu \mathbf{H} \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) - y \|_{H^{-1}}, \quad \mu \geqslant 0,$$

а $\| \mathbf{x} \|_{H^{-1}} = (\mathbf{x} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{x})^{1/2}$.

Достаточность. Если при тех же допущениях условие проекции градиента выполняется для некоторого $\mu > 0$, а функция f в точке $\bar{\mathbf{x}}$ выпукла, то $\bar{\mathbf{x}}$ есть решение задачи (1). ■

3. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

С задачей минимизации (1) связана задача максимизации, решение которой при соответствующих условиях совпадает с решением задачи (1). В частности, формулируется следующая задача, являющаяся по отношению к *основной* (*прямой*) *задаче* (1) *двойственной задачей* нелинейного программирования [63]:

$$\text{максимизировать } L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{h} v_i h_i(\mathbf{x})$$

при ограничениях

$$\nabla_1 L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{h} v_i \nabla h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{u} \geqslant 0. \quad (11)$$

Существуют и другие формулировки двойственной задачи [52, 39]. Переход от основной задачи к двойственной позволяет уменьшить количество ограничений, которым должно удовлетворять решение задачи минимизации (1) и соответственно упростить вычислительные алгоритмы поиска оптимального решения [6]. Для более подробного ознакомления с рассматриваемыми здесь аспектами теории двойственности читатель может обратиться к монографии [34].

3.1. Слабая теорема двойственности

Пусть функции f и g дифференцируемы в R^n, а функция h линейна. Тогда из условий

$$g(\mathbf{x}^1) \leqslant 0, \ h(\mathbf{x}^1) = 0,$$

$$\nabla_1 L(\mathbf{x}^2, \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = 0, \ \mathbf{u}^2 \geqslant 0,$$

$$f \text{ и } g \text{ выпуклы в точке } \mathbf{x}^2$$

следует, что $f(\mathbf{x}^1) \geqslant L(\mathbf{x}^2, \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2)$. ■

3.2. Теорема двойственности

Пусть f, g и h дифференцируемы в R^n, $\bar{\mathbf{x}}$ есть либо локальное, либо глобальное решение задачи (1) и в точке $\bar{\mathbf{x}}$ удовлетворяются все ограничения первого порядка, описанные в разд. 2.1. Если функции f, g и h дважды дифференцируемы в точке $\bar{\mathbf{x}}$, то вектор $\bar{\mathbf{x}}$ и векторы $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ в $R^m \times R^k$ удовлетворяют условиям Куна — Таккера первого порядка для двойственной задачи (11), а $f(\bar{\mathbf{x}}) = L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$. Если функции f и g выпуклы в R^n, а функция h линейна, то вектор $\bar{\mathbf{x}}$ и пара векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ в $R^m \times R^k$ составляют глобальное решение задачи (11) и $f(\bar{\mathbf{x}}) = L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$.

3.3. Строгая обратная теорема двойственности

Пусть f, g и h дифференцируемы в R^n, а $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ есть либо локальное, либо глобальное решение двойственной задачи (11). Если $(n \times n)$-мерная матрица Гессе $\nabla_{11} L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ не вырождена, то $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ удовлетворяет условиям Куна — Таккера первого порядка (3) для исходной (прямой) задачи (1). Если функции f и g, кроме того, выпуклы в точке $\bar{\mathbf{x}}$, а функция h линейна, то $\bar{\mathbf{x}}$ является также глобальным решением исходной задачи (1). ■

4. АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Поскольку многие алгоритмы оптимизации как при отсутствии, так и при наличии ограничений связаны с минимизацией функции на заданном интервале изменения одной переменной, приведем в данном разделе алгоритмы решения следующей задачи:

$$\text{минимизировать } f(x)$$

$$\text{при ограничении } a \leqslant x \leqslant b, \tag{12}$$

где f — функция, определенная на вещественном отрезке $[a, b]$. Часто в процессе одномерной минимизации (как составной части n-мерного алгоритма минимизации) ограничение на x сверху в в задаче (12) не указывается. Однако в этом случае задается условие $f'(a) < 0$. При возникновении задач такого рода сначала ищется такое число b, для которого выполняется условие $f'(b) > 0$, а затем решается задача минимизации в формулировке (12).

4.1. Алгоритм золотого сечения и алгоритм Фибоначчи [24, 61]

Пусть $a^0 = a$, $b^0 = b$. Если a^i и b^i известны, то значения a^{i+1} и b^{i+1} находятся следующим образом:

1) Определяются величины

$$\ell^i = b^i - \tau^i (b^i - a^i), \quad r^i = a^i + \tau^i (b^i - a^i),$$

где в случае золотого сечения

$$\tau^i = \tau = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618,$$

а в случае поиска методом Фибоначчи

$$\tau^i = \frac{F_{n-i-1}}{F_{n-i}}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-3, \quad \tau^{n-2} = \frac{1+\varepsilon}{2} \text{ или } \frac{1-\varepsilon}{2}.$$

В последнем случае n ($n \geqslant 2$) — заранее установленное («предписанное») число итераций, связанных с оценкой значений функции $f(x)$, ε — любое малое положительное число ($\varepsilon < 1$), а F_j — число Фибоначчи: $F_0 = F_1 = 1$, $F_j = F_{j-1} + F_{j-2}$, $j \geqslant 2$.

2) Используются соотношения

$$a^{i+1} = \ell^i, \quad b^{i+1} = b^i, \quad \text{если } f(\ell^i) > f(r^i);$$
$$a^{i+1} = a^i, \quad b^{i+1} = r^i, \quad \text{если } f(\ell^i) \leqslant f(r^i). \quad \blacksquare$$

4.2. Сходимость алгоритма золотого сечения и алгоритма поиска по Фибоначчи

Предположим, что функция f в интервале $[a, b]$ имеет минимум в точке $\bar{x}$, а также допустим, что функция f на указанном выше интервале унимодальна, т. е. для ℓ и r внутри интервала $[a, b]$ и при выполнении неравенства $\ell < r$ справедливы следующие утверждения: если $f(\ell) > f(r)$, то $\bar{x} \in [\ell, b]$; если $f(\ell) < f(r)$, то $\bar{x} \in [\ell, r]$, и если $f(\ell) = f(r)$, то $\bar{x} \in [\ell, r]$. После n ($n \geqslant 2$) последовательных оцениваний положение точки $\bar{x}$, в которой целевая функция принимает минимальное значение, ограничивается интервалом $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, где

$$b_{n-1} - a_{n-1} = \begin{cases} (0{,}618)^{n-1}(b-a) & \text{в случае золотого сечения,} \\ \dfrac{1}{F_n}(b-a) \text{ или } \dfrac{1+\varepsilon}{F_n}(b-a) & \text{в случае поиска по Фибоначчи.} \end{cases}$$

В случае поиска по Фибоначчи получается наименьший интервал $b_{n-1} - a_{n-1}$ в результате заранее предписанного (фиксированного) числа n последовательных оцениваний значений целевой функции. Тем не менее чаще предпочитают использовать алгоритм золотого сечения, поскольку он проще в практическом отношении и при

его реализации не требуется заранее задавать значение n. Для ознакомления с другими методами читатель может обратиться к работе [9]. Поскольку $(b^i - a^i)$ есть максимальная величина погрешности на i-м шаге, оценка *скорости* сходимости алгоритма задается отношением $(b^i - a^i)/(b^{i-1} - a^{i-1})$. Следовательно, для метода золотого сечения имеем $(b^i - a^i)/(b^{i-1} - a^{i-1}) = 0{,}618$, а в случае поиска по Фибоначчи $(b^i - a^i)/(b^{i-1} - a^{i-1}) = F_{n-i}/F_{n-i+1}$. Нетрудно убедиться в том, что $F_{n-i}/F_{n-i+1} \to 0{,}618$ при $i \to \infty$, $n \to \infty$. Поскольку, как было показано выше, величины $(b^{i-1} - a^{i-1})$ и $(b^i - a^i)$ связаны между собой *линейно*, будем говорить, что алгоритм золотого сечения характеризуется *линейной скоростью сходимости*, а скорость сходимости алгоритма по Фибоначчи *асимптотически линейна*. Скорость сходимости можно повысить, если удастся оценить отношение истинной погрешности локализации минимума на i-м шаге к соответствующей погрешности на $(i-1)$-м шаге, которое при возрастании значения i в отличие от отношения $(a^i - b^i)/(a^{i-1} - b^{i-1})$, стремящегося к некоторому положительному значению, стремится к нулю. Достигаемые при этом скорости сходимости алгоритмов иногда называют «*суперлинейными*», поскольку они «лучше» скоростей линейной сходимости. Одним из методов, обеспечивающих более быструю по сравнению с линейной сходимость, является метод сечений (иногда встречается латинское название данного метода zegula falsi). Метод сечений представляет собой дискретную модификацию метода Ньютона, используемого при отыскании на отрезке $[a, b]$ точки, в которой обращается в нуль производная заданной функции f (если она действительно существует). Метод Ньютона заключается в линеаризации f' вблизи текущей точки и приравнивании нулю линеаризованной функции, индуцирующей таким образом, следующую точку итерации. В частности, используется алгоритм сечений в приведенной ниже формулировке.

4.3. Алгоритм сечений [41, 57]

Сначала на интервале $[a, b]$ берут две несовпадающие точки x^0 и x^1, такие, что $f'(x^0) \neq f'(x^1)$. При известных x^i и x^{i-1} значение x^{i+1} вычисляется по формуле

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f'(x^i)}{[f'(x^i) - f'(x^{i-1})]/[x^i - x^{i-1}]}. \quad \blacksquare$$

4.4. Сходимость алгоритма сечений

Пусть $|f'''(x)/2f''(y)| \leqslant M$ при некотором M и всех x и y в некотором интервале $[a', b']$, содержащем интервал $[a, b]$, и пусть $M|\hat{x} - x^0| < 1$ и $M|\hat{x} - x^1| < 1$, где $\hat{x}$ — точка,

в которой f' обращается в нуль на интервале $[a', b']$. Тогда последовательность $\{x^i\}$ сходится к $\hat{x}$. Если, кроме того, $f''(x) > 0$ для всех x в интервале $[a', b']$, то единственное решение $\bar{x}$, минимизирующее $f(x)$ $(x \in [a, b])$, определяется следующими соотношениями:

$$\bar{x} = \hat{x}, \text{ если } a \leqslant \hat{x} \leqslant b; \ \bar{x} = a, \text{ если } \hat{x} < a; \ \bar{x} = b, \text{ если } \hat{x} > b. \ \blacksquare$$

Можно показать, что верхняя граница погрешности на i-м шаге при использовании алгоритма сечений удовлетворяет неравенству

$$|x^i - \hat{x}| < \frac{\delta^{F_i}}{M},$$

где $\delta = \max\{M(x^0 - \hat{x}), M(x^1 - \hat{x})\} < 1$, а F_i — число Фибоначчи (разд. 4.1). Обозначив верхнюю границу погрешности на i-м шаге через e^i, будем иметь

$$e^{i+1} = \delta^{F_{i-1}} e^i.$$

При больших значениях i величина $\delta^{F_{i-1}}$ стремится к $\delta^{0,724(1,618)^{i-1}}$, т. е. $\delta^{F_{i-1}} \to 0$ при $i \to \infty$. Следовательно, сходимость в данном случае лучше линейной: скорость сходимости равняется приблизительно 1,618 для одного шага итерационного процесса, реализующего последовательное оценивание значений целевой функции. Мы видим, что скорость сходимости рассмотренного алгоритма выше скорости сходимости (равной приблизительно 1,414) алгоритма Ньютона в случае одномерных задач.

5. АЛГОРИТМЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

В данном разделе нас будет интересовать следующая задача:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{x}) \ (x \in R^n), \tag{13}$$

где $f: R^n \to R$. Из-за ограниченности объема данной главы будут приведены лишь два из наиболее эффективных методов решения задачи (13): метод переменной метрики (метод Дэвидона — Флетчера — Пауэлла) и метод сопряженных градиентов. Оба метода обладают двумя важными особенностями: 1) характеризуются «суперлинейной» скоростью сходимости и 2) позволяют находить минимум строго выпуклой квадратичной функции не более чем за n шагов. В алгоритме переменной метрики, как и в алгоритме Ньютона, вычисляются разности $\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i = -\lambda^i \mathbf{H}^i \nabla f(\mathbf{x}^i)$, где $\mathbf{H}^i$ — величина, аппроксимирующая (в определенном смысле) $\nabla^2 f(\mathbf{x}^i)^{-1}$, а λ^i — длина шага. Аппроксимация достигается путем реализации квазиньютоновского условия $\mathbf{H}^{i+1}(\nabla f(\mathbf{x}^{i+1}) - \nabla f(\mathbf{x}^i)) = \mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i$, которое должно выполняться в тех случаях, когда f

является строго выпуклой квадратичной функцией. Что касается методов сопряженных градиентов, то они основаны на выборе в R^n направлений p^i, удовлетворяющих *условию сопряжения* $p^i \nabla^2 f(\mathbf{x}^i)\, p^{i-1} = 0$. Для строго выпуклой квадратичной функции n первых таких направлений линейно назависимы и ортогональны градиенту $\nabla f(\mathbf{x}^n)$, который должен затем обратиться в нуль, так что $\mathbf{x}^n$ есть оптимальное решение задачи (13).

5.1. Алгоритм переменной метрики (алгоритм Дэвидона — Флетчера — Пауэлла) [16]

Сначала выбирается произвольная точка $\mathbf{x}^0 \in R^n$. Предполагается, что $\mathbf{H}^0 = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная n-мерная матрица. Переход от $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{H}^i$ к $\mathbf{x}^{i+1}$ и $\mathbf{H}^{i+1}$ осуществляется следующим образом:

1) Предполагается, что $\mathbf{p}^i = -\mathbf{H}^i \nabla f(\mathbf{x}^i)$. Вычисляется $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \lambda^i \mathbf{p}^i$, где λ^i — первый неотрицательный корень уравнения $\nabla f(\mathbf{x}^i + \lambda \mathbf{p}^i)\, \mathbf{p}^i = 0$, т. е. $\lambda^i \geqslant 0$, а $f(\mathbf{x}^i + \lambda^i \mathbf{p}^i)$ — первый локальный минимум функции $f(\mathbf{x}^i + \lambda \mathbf{p}^i)$ при условии. что $\lambda \geqslant 0$.

2) Если либо $\mathbf{y}^i = 0$, либо $\mathbf{z}^i = 0$, где $\mathbf{z}^i = \mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i$, а $\mathbf{y}^i = \nabla f(\mathbf{x}^{i+1}) - \nabla f(\mathbf{x}^i)$, то полагается $\mathbf{x}^i = \bar{\mathbf{x}}$ и вычисления заканчиваются. В противном случае осуществляется переход к вычислению

$$\mathbf{H}^{i+1} = \mathbf{H}^i + \frac{\mathbf{z}^i \mathbf{z}^{iT}}{\mathbf{z}^i \mathbf{y}^i} - \frac{(\mathbf{H}^i \mathbf{y}^i)(\mathbf{H}^i \mathbf{y}^i)^{Ti}}{\mathbf{y}^i \mathbf{H}^i \mathbf{y}^i}. \quad \blacksquare$$

5.2. Сходимость алгоритма переменной метрики [48, 5]

Если $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}C\mathbf{x} + a\mathbf{x}$ и C является положительно определенной, то алгоритм, рассмотренный в разд. 5.1, приводит к единственному минимизирующему $f(x)$ решению $\bar{\mathbf{x}}$ не более чем за n шагов. Справедливо и следующее более общее утверждение: если функция f дважды непрерывно дифференцируема в R^n и $\alpha \| \mathbf{y} \|^2 \leqslant \mathbf{y} \nabla^2 f(\mathbf{x})\, \mathbf{y}$ для некоторого $\alpha > 0$ и любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в R^n, то последовательность $\{\mathbf{x}^i\}$, порождаемая алгоритмом переменной метрики (разд. 5.1), заканчивается в точке $\bar{\mathbf{x}}$ (или сходится к этой точке), являющейся единственным решением задачи (13). Если, кроме того, $\| \nabla^2 f(\mathbf{y}) - \nabla^2 f(\mathbf{x}) \| \leqslant R \| \mathbf{y} - \mathbf{x} \|$ для некоторого $R > 0$ и любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в R^n, то $\| \mathbf{x}^{i+1} - \bar{\mathbf{x}} \| \leqslant \delta^i \| \mathbf{x}^i - \bar{\mathbf{x}} \|$, где $\lim\limits_{i \to \infty} \delta^i = 0$, т. е. $\{\mathbf{x}^i\}$ быстрее, чем линейно, сходится к $\bar{\mathbf{x}}$. $\blacksquare$

5.3. Алгоритм сопряженных направлений [17, 44, 47]

Выбирается любая точка $\mathbf{x}^0$ в R^n и предполагается, что $\mathbf{p}^0 = -\nabla f(\mathbf{x}^0)$. Переход от $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{p}^i$ к $\mathbf{x}^{i+1}$ и $\mathbf{p}^{i+1}$ осуществляется следующим образом:

1) Вычисляется $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \lambda^i \mathbf{p}^i$, где λ^i — первый неотрицательный корень уравнения $\nabla f(\mathbf{x}^i + \lambda \mathbf{p}^i)\mathbf{p}^i = 0$, т. е. $\lambda^i \geqslant 0$, а $f(\mathbf{x}^i + \lambda^i \mathbf{p}^i)$ — первый локальный минимум функции $f(\mathbf{x}^i + \lambda \mathbf{p}^i)$ при условии, что $\lambda \geqslant 0$.

2) Если $\nabla f(\mathbf{x}^i) = 0$, то полагается $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^i$ и вычисления заканчиваются. В противном случае вычисляется

$$\mathbf{p}^{i+1} = -\nabla f(\mathbf{x}^{i+1}) + \alpha^{i+1}\mathbf{p}^i, \text{ где}$$

$$\alpha^{i+1} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}^{i+1})\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}^i)\|^2} \text{ (по Флетчеру — Ривсу), или}$$

$$\alpha^{i+1} = \frac{(\nabla f(\mathbf{x}^{i+1}) - \nabla f(\mathbf{x}^i))\nabla f(\mathbf{x}^{i+1})}{\|\nabla f(\mathbf{x}^i)\|^2}$$

(по Польяку — Полаку — Рибьеру). ■

5.4. Сходимость алгоритма сопряженных градиентов [68, 32, 35, 7]

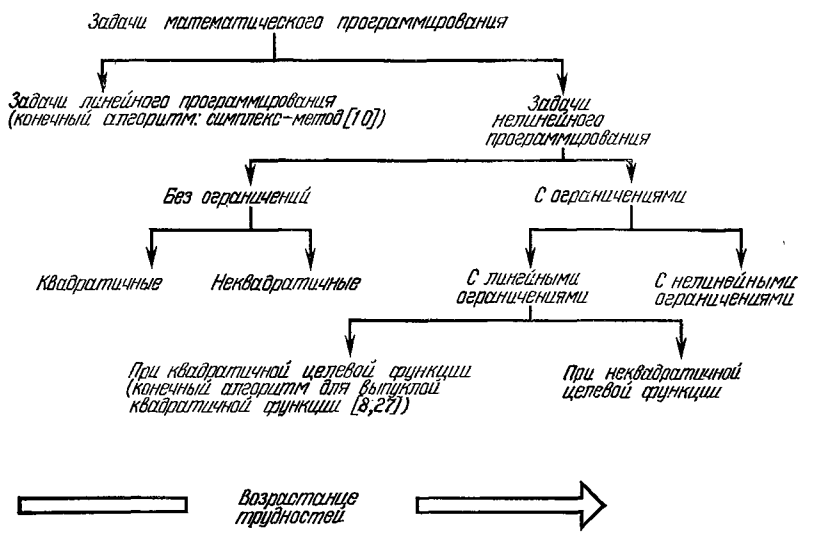
Пусть для некоторого числа $M > 0$ и любой пары векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в R^n выполняется условие $\|\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \leqslant M\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Если $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}C\mathbf{x} + a\mathbf{x}$, где C положительно определена, то алгоритм сопряженных направлений приводит к единственному решению $\bar{\mathbf{x}}$ за n или меньшее число шагов. Справедливы и следующие, более общие, утверждения: а) Если множество $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0)\}$ ограничено, то алгоритм Флетчера — Ривса либо приводит к стационарной точке $\bar{\mathbf{x}}$, в которой $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, либо по крайней мере одна предельная точка $\bar{\mathbf{x}}$ последовательности $\{\mathbf{x}^i\}$ является стационарной. б) Если функция f дважды непрерывно дифференцируема в R^n, то алгоритм Польяка — Полака — Рибьера (разд. 5.3) либо приводит к стационарной точке $\bar{\mathbf{x}}$, либо каждая предельная точка $\bar{\mathbf{x}}$ последовательности $\{\mathbf{x}^i\}$ является стационарной. Если, кроме того, множество $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0)\}$ ограничено и для некоторого $M \geqslant \alpha > 0$ и любой пары векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в R^n выполняется условие $\alpha\|\mathbf{y}\|^2 \leqslant \mathbf{y}\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{y} \leqslant M\|\mathbf{y}\|^2$, то описанный в разд. 5.3 алгоритм сопряженных направлений Польяка — Полака — Рибьера быстрее, чем линейно, сходится за n шагов, т. е.

$$\|\mathbf{x}^{n(i+1)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leqslant \delta^i \|\mathbf{x}^{ni} - \mathbf{x}\|, \quad \lim_{i\to\infty} \delta^i = 0,$$

при условии, что $\mathbf{p}^i$ после каждых n шагов принимается равным $-\nabla f(\mathbf{x}^i)$.

6. АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

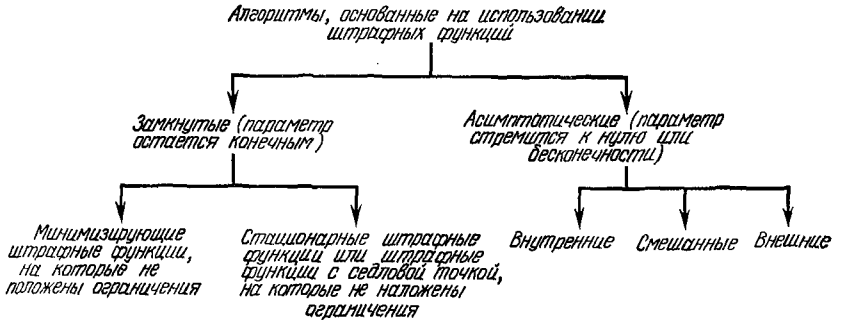
Задачи оптимизации при наличии ограничений в нелинейном программировании являются определяющими. В самом общем виде задача нелинейного программирования при наличии ограничений сформулирована в разд. 1. Трудности, связанные с решением задач такого рода, зависят от вида функций f, g и h, которые могут быть линейными, квадратичными или более сложной структуры. В частности, можно выделить следующие классы задач:



В данном разделе основное внимание будет уделено алгоритмам решения задач, указанных в правой части приведенной выше схемы, т. е. задач с нелинейными ограничениями и задач с линейными ограничениями и неквадратичной целевой функцией. Будет описан ряд алгоритмов, позволяющих находить решения задач такого рода.

Рассмотрим сначала алгоритмы, основанные на использовании штрафных функций. Основная идея здесь заключается в том, чтобы свести задачу с ограничениями к последовательности задач без ограничений (задач безусловной минимизации), решение которых позволяет найти решение, близкое к решению исходной задачи. Это достигается путем построения комбинаций функций, задающих ограничения, и целевой функции таким образом, чтобы минимизация полученной в результате штрафной функции не допускала нарушений ограничений задачи. Алгоритмы, основанные на введении в рассмотрение штрафных функций, можно классифицировать

следующим образом:



Указанные выше методы имеют свои достоинства и недостатки, которые будут отмечены после описания каждого из алгоритмов.

6.1. Асимптотический внутренний алгоритм штрафных функций [14]

Для любой убывающей и сходящейся к нулю последовательности положительных вещественных чисел $\{r_i\}$ находим решения $\mathbf{x}^i$ задач минимизации $P^i(\mathbf{x})$ при ограничении $g(\mathbf{x}) < 0$, где

$$P^i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - r^i \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\mathbf{x})} \text{ для всех значений } i \text{ или}$$

$$P^i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - r^i \sum_{j=1}^{m} \log(-g_i(\mathbf{x})) \text{ для всех значений } i.$$

Если множество $X^0 = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) < 0\}$ оказывается непустым и $\operatorname*{infimum}_{\mathbf{x} \in X^0} f(\mathbf{x}) = \operatorname*{infimum}_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$, где $X = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$, и если функции f и g на множестве X непрерывны, то каждая точка сгущения последовательности $\{\mathbf{x}^i\}$ есть решение задачи минимизации $f(\mathbf{x})$ при ограничениях $g(\mathbf{x}) \leqslant 0$ (т. е. является решением задачи (1) без ограничений $h(\mathbf{x}) = 0$). ■

Главные трудности, связанные с реализацией рассмотренного выше алгоритма, заключаются в том, что он не способен оперировать с ограничениями в виде равенств, и величина «штрафного» параметра r^i при возрастании i должна стремиться к нулю; последнее обстоятельство порождает дополнительную задачу проверки условий сходимости [29, 30, 40]. Чтобы обойти первую из упомянутых трудностей, рассмотрим внешние алгоритмы штрафных функций, в которых могут учитываться ограничения как в виде неравенств, так и равенств.

6.2. Внешний алгоритм штрафных функций [14]

Для любой бесконечно возрастающей последовательности положительных вещественных чисел $\{r^i\}$ находим решения x^i задач безусловной минимизации $P^i(x)$ $(x \in R^n)$, где

$$P^i(x) = f(x) + r^i \left[\sum_{j=1}^{m} (g_j(x)_+)^2 + \sum_{j=1}^{h} (h_j(x))^2 \right].$$

В выражении для $P^i(x)$ величины $g_j(x)_+$ совпадают с $g_j(x)$ при $g_j(x) \geqslant 0$ и тождественно равны нулю при $g_j(x) < 0$. Если f, g и h непрерывны в R^n и задача (1) имеет решение, то каждая предельная точка $\bar{x}$ последовательности $\{x^i\}$ есть решение задачи (1).

Реализация внешнего алгоритма штрафных функций также связана с трудностями проверки условия, налагаемого на последовательность $\{r^i\}$, а именно условия $r^i \to \infty$ при неограниченном возрастании i. С целью преодоления этих трудностей предложены так называемые методы штрафных функций с ограниченными значениями параметров (см. ниже). Следует вместе с тем подчеркнуть, что условие $r^i \to \infty$ не является обязательным, если нас устраивает некоторый допуск $\varepsilon > 0$ относительно предельной точки $\bar{x}$, т. е. если достаточно выполнение требования

$$\sum_{j=1}^{m} (g_i(\bar{x})_+)^2 + \sum_{j=1}^{h} (h_j(\bar{x}_j))^2 \leqslant \varepsilon.$$

В этом случае последовательность $\{r^i\}$ не должна неограниченно возрастать, и лишь требуется, чтобы $\lim\limits_{i \to \infty} r^i > [2|f(\hat{x}) - f(x^0)|]/\varepsilon$, где $\hat{x}$ — произвольная допустимая точка, т. е. точка, в которой $g(\hat{x}) \leqslant 0$, $h(\hat{x}) = 0$, а x^0 — решение задачи минимизации $P^0(x)(x \in R^n)$, полученное на первой итерации. Комбинированные методы штрафных функций [14] представляют собой сочетания внешних и внутренних методов. Типичная смешанная штрафная функция для задачи (1) имеет следующий вид:

$$P^i(x) = f(x) - r^i \sum_{j \in J_1} \log(-g_j(x)) +$$

$$+ \frac{1}{r^i} \left[\sum_{j \in J_2} (g_j(x)_+)^2 + \sum_{j=1}^{h} (h_j(x))^2 \right],$$

где J_1 — любое подмножество значений индексов в ограничениях-неравенствах, для которых существует внутренняя допустимая точка, т. е. существует вектор $\hat{x}$, удовлетворяющий условию $g_j(\hat{x}) < 0$ при $j \in J_1$. Через J_2 обозначено множество индексов, ассоциированных с остальными ограничениями в виде неравенств.

При этом требуется решить следующие подзадачи: минимизировать $P^i(\mathbf{x})$ при ограничениях $g_j(\mathbf{x}) < 0$ $(j \in J_1)$ и гарантировать сходимость убывающей последовательности $\{r^i\}$ к нулю. Если функции f, g и h непрерывны и $-\infty < \operatorname{infimum}_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) - \operatorname{infimum}_{\mathbf{x} \in X^1 \cap X^2} f(\mathbf{x})$, где

$$X = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad h(\mathbf{x}) = 0\}, \qquad X^1 = \{\mathbf{x} \mid g_j(\mathbf{x}) < 0,\ j \in J_1\},$$

$X^2 = \{\mathbf{x} \mid g_j(\mathbf{x}) \leqslant 0,\ j \in J_2,\ h(\mathbf{x}) = 0\}$, то каждая предельная точка последовательности $\{\mathbf{x}^i\}$ является решением задачи (1) при условии, что решение действительно существует.

В последние годы были предприняты попытки построить штрафные функции, параметры которых остаются конечными. Такие штрафные функции называются замкнутыми. К сожалению, замкнутые штрафные функции, как правило, оказываются либо недифференцируемыми [64, 43, 22], либо лишь локально дифференцируемыми [15]; их использование нередко не позволяет свести решение задачи минимизации при наличии ограничений к решению задач безусловной минимизации и сопряжено с необходимостью отыскания стационарной, или седловой, точки для заданной штрафной функции [53, 54, 55, 56, 1, 36].

6.3. Алгоритм штрафных функций со строго локализованным минимумом [64, 43, 22]

Для возрастающей последовательности вещественных чисел $\{r^i\}$ находим точку $\mathbf{x}^i$ безусловного локального (глобального) минимума функции $P(\mathbf{x}, r^i)$, выражение для которой приведено в разд. 2.5. Как только точка $\mathbf{x}^i$ окажется допустимой (т. е. окажутся выполненными условия $g(\mathbf{x}^i) \leqslant 0$, $h(\mathbf{x}^i) = 0$), вычислительная процедура заканчивается. Точка $\mathbf{x}^i$ есть локальное (глобальное) решение задачи (1). ■

Заметим, что преимущество данного алгоритма (по сравнению с асимптотическими методами штрафных функций) состоит в том, что здесь значения r^i конечные. Основным недостатком его является то, что функция $P(\mathbf{x}, r)$ в лучшем случае является кусочно-дифференцируемой. Для ее минимизации необходимо привлечение специальных методов [46].

Обратимся теперь к рассмотрению последнего варианта метода штрафных функций, известного под названием «алгоритм штрафных функций с явно выраженными стационарными точками».

6.4. Алгоритм штрафных функций с явно выраженными стационарными точками (метод расширенного лагранжиана)

Для некоторого положительного числа $r > 0$ находим решение $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$ системы $m + n + k$ уравнений (9). Вектор $\bar{\mathbf{x}}$ и заданные соотношениями (10) векторы $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ удовлетворяют условиям

Куна — Таккера первого порядка (3). Если, кроме того, функции f и g в точке $\bar{\mathbf{x}}$ выпуклы, а функция h линейна, то $\bar{\mathbf{x}}$ есть глобальное решение задачи (1). ■

Специальные методы решения уравнений (9) рассмотрены в работе [36]. Краткий обзор методов решения нелинейных уравнений можно найти в книге [41].

В следующем разделе будет рассмотрен метод допустимых направлений. Основная идея этого метода заключается в том, чтобы отыскать направление, при перемещении вдоль которого подлежащая минимизации целевая функция убывает, а точки, через которые производится перемещение, остаются допустимыми. В данном алгоритме для предотвращения зигзагообразных перемещений и «топтания на одном месте» необходимо вводить допуск ε^i [67]. Отметим, что метод допустимых направлений позволяет решать задачи, в которых функция g может быть нелинейной, но функция h должна быть линейной.

6.5. Алгоритм допустимых направлений [67, 65]

Начинаем с выбора произвольной точки $\mathbf{x}^0 \in X = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) \leqslant 0, h(\mathbf{x}) = 0\}$, где h — линейная функция, и некоторого (фиксированного) положительного числа $\varepsilon^0 > 0$. Переход от $\mathbf{x}^i$, ε^i к $\mathbf{x}^{i+1}$, ε^{i+1} осуществляется следующим образом. Сначала решается следующая задача линейного программирования:

$$\text{минимизировать } \{\delta \mid \nabla f(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{q} \leqslant \delta,\ \nabla g_j(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{q} \leqslant \delta,$$

$$j \in I_N(\mathbf{x}^i, \varepsilon^i), \nabla g_j(\mathbf{x}^i)\mathbf{q} \leqslant 0,\ j \in I_L(\mathbf{x}^i, \varepsilon^i),\ \nabla h(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{q} = 0\}, \text{ где}$$

$$I_N(\mathbf{x}^i, \varepsilon^i) = \{j \mid -\varepsilon^i \leqslant g_j(\mathbf{x}^i) \leqslant 0, \text{ функция } g_j \text{ нелинейна}\},$$

$$I_L(\mathbf{x}^i, \varepsilon^i) = \{j \mid -\varepsilon^i \leqslant g_j(\mathbf{x}^i) \leqslant 0, \text{ функция } g_j \text{ линейна}\}.$$

Обозначим решение данной задачи линейного программирования через δ^i, $\mathbf{q}^i$. Если $\delta^i = 0$, вычислительная процедура заканчивается; в противном случае полагаем

$$\varepsilon^{i+1} = \begin{cases} \varepsilon^i, & \text{если } \varepsilon^i \leqslant -\delta^i, \\ \dfrac{\varepsilon^i}{2}, & \text{если } \varepsilon^i > -\delta^i. \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{p}^i = v^i\mathbf{q}^i$, где $v^i = \max\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$, так что $\mathbf{x}^i + \mu\mathbf{p}^i \in X$ для всех $\mu \in [0, 1]$. Определим вектор $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \lambda^i\mathbf{p}^i$, для которого $f(\mathbf{x}^i + \lambda^i\mathbf{p}^i) = \min\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} f(\mathbf{x}^i + \lambda\mathbf{p}^i)$ или $\lambda^i = \max\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$, так что $f(\mathbf{x}^i) - f(\mathbf{x}^i + \lambda^i\mathbf{p}^i) \geqslant -\frac{1}{4}\nabla f(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{p}^i$. Если f имеет непрерывные первые частные производные, g имеет непрерывные частные производные в смысле

Липшица, а функция h линейна, то либо последовательность $\{\mathbf{x}^i\}$ сходится к стационарной точке, либо каждая предельная точка $\bar{\mathbf{x}}$ является стационарной, т. е. не существует допустимого направления $\mathbf{p}$, удовлетворяющего условиям $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})\,\mathbf{p} < 0$, $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})\,\mathbf{p} < 0$, $j \in \{j \mid g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$ и $\nabla h(\bar{\mathbf{x}})\,\mathbf{p} = 0$. Если, кроме того, функции f и g являются выпуклыми в R^n и существует вектор $\tilde{\mathbf{x}}$, для которого $g(\tilde{\mathbf{x}}) < 0$ и $h(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$, то $\tilde{\mathbf{x}}$ есть решение задачи (1). ■

В следующем разделе рассмотрим весьма часто используемый в нелинейном программировании алгоритм проекции градиента, который представляет собой вариант алгоритма Левитина — Польяка [28]. Этот алгоритм позволяет оперировать с различными подмножествами ограничений, и при его использовании вводится в рассмотрение матрица, играющая роль обратной матрицы по отношению к гессиану функции Лагранжа, используемой в процессе аппроксимаций.

6.6. Алгоритм проекции градиента [28]

Начинаем с выбора произвольной точки $\mathbf{x}^0 \in X = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) \leqslant 0,\ h(\mathbf{x}) = 0\}$, где g — выпуклая функция, h — линейная функция, и некоторого (фиксированного) числа $\varepsilon^0 > 0$. Переход от $\mathbf{x}^i$ и ε^i к $\mathbf{x}^{i+1}$ и ε^{i+1} осуществляется следующим образом. Сначала решается задача квадратичного программирования:

$$\text{минимизировать } \|\mathbf{x}^i - H(\mathbf{x}^i)\nabla f(\mathbf{x}^i) - \mathbf{y}\|^2_{H(\mathbf{x}^i)^{-1}}, \quad \mathbf{y} \in X^i,$$

где $\|\mathbf{z}\|^2_H = \mathbf{z}H\mathbf{z}$, $H(\mathbf{x}^i)$ — любая непрерывная симметричная положительно определенная матрица, а $X^i = \{\mathbf{x} \mid g_j(\mathbf{x}) \leqslant 0,\ j \in I(\mathbf{x}^i, \varepsilon^i),\ h(\mathbf{x}) = 0\}$, $I(\mathbf{x}^i, \varepsilon^i) = \{j \mid -\varepsilon^i \leqslant g_j(\mathbf{x}^i) \leqslant 0\}$. Обозначим решение этой задачи через $\mathbf{y}^i$. Если $\mathbf{y}^i = \mathbf{x}^i$, вычислительная процедура заканчивается (искомое решение найдено). В противном случае возьмем $\varepsilon^{i+1} \geqslant \hat{\varepsilon} \geqslant 0$, где $\hat{\varepsilon}$ — произвольное положительное число. Положим $\mathbf{p}^i = \nu^i(\mathbf{y}^i - \mathbf{x}^i)$, где $\nu^i = \max\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$, так что $\mathbf{x}^i + \mu\mathbf{p}^i \in X$ для любого значения $\mu \in [0, 1]$. Построим вектор $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \lambda^i\mathbf{p}^i$, для которого $f(\mathbf{x}^i + \lambda^i\mathbf{p}^i) = \min\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} f(\mathbf{x}^i + \lambda\mathbf{p}^i)$ или $\lambda^i = \max\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$, такое, что

$$f(\mathbf{x}^i) - f(\mathbf{x}^i + \lambda^i\mathbf{p}^i) \geqslant -\frac{1}{4}\nabla f(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{p}^i.$$

Если функция f выпукла и имеет в R^n непрерывные первые производные, градиенты функций g_i непрерывны в смысле Липшица и существует такой вектор $\tilde{\mathbf{x}} \in X$, для которого $h(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$, $g(\tilde{\mathbf{x}}) < 0$ и $M_1\|\mathbf{z}\|^2 \leqslant \mathbf{z}H(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{z} \leqslant M_2\|\mathbf{z}\|^2$ для всех значений i,

всех векторов $z \in R^n$ и некоторых чисел M_1 и M_2, удовлетворяющих условию $M_2 \geqslant M_1 > 0$, то пределом последовательности $\{\mathbf{x}^i\}$ является решение задачи (1), или, другими словами, каждая предельная точка является решением задачи (1). ■

Мы видим, что основной объем работы описанного выше алгоритма связан с решением задачи квадратичного программирования, т. е. с определением $\mathbf{y}^i$. В случае когда ограничения задачи линейные, эта часть алгоритма легко и быстро реализуется с помощью хорошо известных методов [27, 8], для которых имеются эффективные машинные программы [60].

В завершение данной главы будет дано краткое описание алгоритма Ньютона, ориентированного на решение задач с нелинейными ограничениями и обладающего свойством локальной квадратичной сходимости. Этот алгоритм впервые предложен Вильсоном [62], а квадратичная сходимость данного алгоритма установлена Робинсоном [51]. Одну из модификаций алгоритма Ньютона можно найти в работе [50].

6.7. Алгоритм Ньютона для задач с нелинейными ограничениями [62, 51]

Начнем с выбора произвольных векторов $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) \in R^n \times R^m \times R^k$. Зная точку $\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i$, определим точку $\mathbf{x}^{i+1}, \mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v}^{i+1}$ в окрестности точки $\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i$, получаемой в результате решения следующей задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями:

$$\text{минимизировать } \nabla f(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}\nabla_{11}L(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i)\,\mathbf{p}$$

при ограничениях

$$g(\mathbf{x}^i) + \nabla g(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{p} \leqslant 0, \quad h(\mathbf{x}^i) + \nabla h(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{p} = 0,$$

где L — лагранжиан, определение которого дано в разд. 2.3 [см. выражение (5)]. Положим $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \mathbf{p}^i$, где $\mathbf{p}^i$ — оптимальный множитель Лагранжа, полученный в результате решения указанной выше задачи. Если точка $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$ расположена в окрестности точки $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$, которая удовлетворяет рассмотренным в разд. 2.2 достаточным условиям второго порядка и в которой строго выполняются дополнительные условия, состоящие в том, что $\bar{u}_i > 0$ при $g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, величины $\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})$ $(j = 1, \ldots, k)$ и $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$ при $i \in \{i \mid g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$ линейно-независимы, а функции f, g и h дважды непрерывно дифференцируемы вблизи $\bar{\mathbf{x}}$, то последовательность $\{\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i\}$ квадратично сходится к $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$, т. е.

$$\|(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i) - (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})\| \leqslant \delta\left(\frac{1}{2}\right)^{2^i},$$

где σ — некоторая константа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arrow K. J., Gould F. J., Howe S. M., A General Saddle Point Result for Constrained Optimization, *Math. Prog.*, 5, 225—234 (1973).
2. Avriel M., Nonlinear Programming Analysis and Methods, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
3. Bertsekas D. P., Multiplier Methods: A Survey, *Automatica*, 12, 133—145 (1976).
4. Blum E., Oettli W., Mathematische Optiemierung-Grundlagen und Verfahren, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
5. Broyden C. G., Dennis J. E., Jr., Moré J. J., On the Local and Superlinear Convergence of Quasi-Newton Methods, *J. Inst. Maths. Applics.*, 12, 223—245 (1973).
6. Buys J. D., Dual Algorithms for Constrained Optimization Problems, Doctorate Dissertation, University of Leiden, June 1972.
7. Cohen A., Rate of Convergence of Several Conjugate Gradient Algorithms, *SIAM J. Numer. Anal.*, 9, 248—259 (1972).
8. Cottle R. W., Dantzig G. B., Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming, *J. Linear Algebra Applic.*, 1, 103—125 (1968).
9. Данилин Ю. М. Оценка эффективности алгоритма отыскания абсолютного минимума.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 1971, т. 11, № 4, с. 261, 267.
10. Dantzig G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, Jew Jersey, 1963.
11. Dennis J. E., Jr., Moré J. J., Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory, *SIAM Review*, 19, 46—89 (1977).
12. Dennis J. E., Jr., Veinott A. F. (eds.), Math. of the Dec. Sci., Pats I, II, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1968.
13. Evans J. P., Gould F. J., Tolle J. W., Exact Penaly Functions in Nonlinear Programming, *Math. Prog.*, 4, 72—97 (1973).
14. Fiacco A. V., McCormick G. P., Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques, Wiley, New York, 1968.
15. Fletcher R., An Exact Penalty Function for Nonlinear Programming with Inequalities, *Math. Prog.*, 5, 129—150 (1973).
16. Fletcher R., Powell M. J. D., A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, *Computer J.*, 6, 163—168 (1963).
17. Fletcher R., Reeves C. M., Function Minimization by Conjugate Gradients, *Computer J.*, 7, 149—154 (1964).
18. Fox R. L., Optimization Methods for Engineering Design, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971.
19. Garcia Palomares, Mangasarian U. M., Mangasarian O. L., Superlinearly Convergent Quasi-Newton Algorithms for Nonlinearly Constrained Problems, *Math. Prog.*, 11, 1—13 (1976).
20. Han S.-P., Penalty Larangean Methods Via a Quasi-Newton Approach, Department of Computer Science, Cornell University, Ithaca, Report TR, 75—252, 1976.
21. Hestenes M. R., Optimization Theory the Finite Dimensional Case, Wiley, New York, 1975.
22. Howe S., New Conditions for Exactness for a Simple Penalty Function, *SIAM J. Control.*, 11, 378—381 (1973).
23. John F., Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions, in K. O. Friedrichs, O. E. Neugebauer and J. J. Stoker, eds., Studies and Essays: Courant Anniversary Volume, Interscience, New York, 1948. pp. 187—204.
24. Kowalik J., Osborne M. R., Methods for Unconstrained Optimization Problems, Elsevier, New York, 1968.

25. Kuhn H. W., Tucker A. W., Nonlinear Programming in J. Neyman, ed., Proceedings of the Second Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, California, 1951, pp. 481—492.
26. Künzi H. P., Oettli W., Nichtlineare Optiemierung: Neuere Verfahren Bibliographie, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems No. 16, Springer, Berlin, 1969.
27. Lemke C. E., A Method of Solution for Quadratic Programs, *Management Sci.*, 8, 442—455 (1962).
28. Levitin E. S., Polyak B. T., Constrained Minimization Methods, *USSR Computational Math. and Mathematical Physics*, 6, 1—50 (1966).
29. Lootsma F. A., Hessian Matrices of Penalty Functions for Solving Constrained Optimization Problems, Philips Res. Report No. 24, 322—331, 1969.
30. Lootsma F. A., ed., Numerical Methods for Non-linear Optimization, Academic Press, London, 1972.
31. Luenberger D. G., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.
32. McCormick G. P., Ritter K., Alternate Proofs of the Convergence Properties of the Conjugate Gradient Method, *J. Optimization Theory and Applic.*, 13, 497—518 (1974).
33. McCormick G. P., Ritter K., Methods of Conjugate Directions Versus Quasi-Newton Methods, *Math. Prog.*, 3, 101—116 (1972).
34. Mangasarian O. L., Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York, 1969.
35. Mangasarian O. L., Techniques of Optimization, *J. of Eng. for Ind.*, 94, Series **B**, 2, 365—372 (1972).
36. Mangasarian O. L., Unconstrained Lagrangeans in Nonlinear Programming, *SIAM J. Control*, 13, 772—791 (1975a).
37. Mangasarian O. L., Unconstrained Methods in Nonlinear Programming, in Nonlinear Programming, Vol. IX SIAM-AMS Proceedings, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 169—184 (1975b).
38. Mangasarian O. L., Meyer R. R., Robinson S. M., Nonlinear Programming 2, Academic Press, New York, 1975.
39. Mangasarian O. L., Ponstein J., Minmax and Duality in Nonlinear Programming, *J. Math. Anal. and Appl.*, 11, 504—518 (1965).
40. Murray W., Analytical Expressions for the Eigenvalues and Eigenvectors of the Hessian Matrices of Barrier and Penalty Functions, *J. Optimization Theory and Applic.*, 7, 189—196 (1971).
41. Ortega J. M., Rheinboldt W. C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.
42. Ostrowski A., Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, New York, 1966.
43. Pietrzykowski T., An Exact Potential Method for Constrained Maxima, *SIAM J. Numer. Anal.*, 6, 299—304 (1969).
44. Polak E., Ribière G., Note sur la Convergence de Méthodes de Directions Conjuguées, *Rev. Fr. Inform. Rech. Opér.*, 16-R1, 35—43 (1969).
45. Polak E., Computational Methods in Optimization: A Unified Approach, Academic Press, New York, 1971.
46. Polyak B. T., Minimization of Non-Smooth Functionals, *USSR Computational Math. and Mathematical Physics*, 9, 14—29 (1969a).
47. Polyak B. T., The Method of Conjugate Gradients in Extremum Problems. *USSR Computational Math. and Mathematical Physics*, 9, 94—112 (1969b).
48. Powell M. J. D., On the Convergence of the Variable Metric Algorithm, *J. Inst. of Maths. and Its Appl.*, 7, 21—36 (1971).
49. Powell M. J. D., Algorithms for Nonlinear Constraints that Use LaGrangean Functions, Department of Appl. Math. and Theor. Phys., Cambridge University, Cambridge (1976).

50. Robinson S. M., A Quadratically-Convergent Algorithm for General Nonlinear Programming Problems, *Math. Prog.*, 3, 145—156 (1972).
51. Robinson S. M., Perturbed Kuhn-Tucker Points and Rates of Convergence for a Class of Nonlinear Programming Algorithms, *Math. Prog.*, 7, 1—16 (1974).
52. Rockafellar R. T., Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
53. Rockafellar R. T., New Applications of Duality in Convex Programming, Proceedings of the Fourth Conference on Probability, Brasov, Romania, 1971.
54. Rockafellar R. T., A Dual Approach to Solving Nonlinear Programming Problems by Unconstrained Optimization, *Math. Prog.*, 5, 354—373 (1973).
55. Rockafellar R. T., The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming, *J. Optimization Theory and Applic.*. 12. 555—562 (1973).
56. Rockafellar R. T., Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming, *SIAM J. Control*, 12, 268—285 (1974).
57. Shampine L. F., Allen R. C., Jr., Numerical Computing, An Introduction, Saunders, Philadelphia, 1973.
58. Stark R. M., Nichols R. L., Mathematical Foundations for Design-Civil Engineering Systems, McGraw-Hill, New York. 1972.
59. Tapia R. A., Diagonalized Multiplier Methods and Quasi-Newton Methods for Constrained Optimization, Department of Math. Sciences, Rice University, Houston. 1976.
60. Teorey T., QUADPR, Quadratic Programming Subroutine. University of Wisconsin, Madison Academic Computing Center, June 1972.
61. Wilde D. J., Optimum Seeking Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1964.
62. Wilson R. B., A Simplicial Method for Convex Programming, Ph. D. Dissertation, Harvard University, 1963.
63. Wolfe P., A Duality Theorem for Nonlinear Programming, *Quart. of Appl. Math.*, 19, 239—244 (1961).
64. Zangwill W. I., Nonlinear Programming via Penalty Functions, *Management Sci.*, 13, 344—358 (1967).
65. Zangwill W. I., Nonlinear Programming, A Unified Approach, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
66. Zoutendijk G., Mathematical Programming Methods, North-Holland. Amsterdam, 1976.
67. Zoutendijk G., Methods of Feasible Directions. Elsevier, Amsterdam, 1960.
68. Zoutendijk G., Nonlinear Programming, Computational Methods, in J. Abadie (ed.), Integer and Nonlinear Programming, North Holland, Amsterdam, 1970, pp. 37—86.
69. Zoutendijk G., Mathematical Programming Methods, North Holland, Amsterdam, 1976.

II-7. Математическое программирование задач большой размерности

Л. Лэсдон[1])

1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из основных обстоятельств, позволяющих в настоящее время извлекать из математического программирования практическую пользу, состоит в том, что мы располагаем машинными программами для решения задач оптимизации с большим числом ограничений. Задачи линейного программирования (ЛП) с большим количеством ограничений почти всегда имеют специфическую структуру. Структурные особенности задач такого рода используются при поиске их решений. Действительно, матрица ограничений в задачах большой размерности, как правило, содержит большое количество нулевых элементов (сильно «разрежена»), а ненулевые матричные элементы в большинстве случаев группируются в блоки (чаще всего вдоль главной диагонали). Сильная разреженность обычно имеет место и в задачах нелинейного программирования с большим числом ограничений. Кроме того, условия в задачах такого рода содержат большое число линейных ограничений, а нелинейные члены имеют упрощенную структуру (например, обладают свойством сепарабельности).

Методы решения задач математического программирования большой размерности можно разделить на два класса: прямые и декомпозиционные. В прямых методах существующие алгоритмы приспосабливаются для решения задач специального вида. Например, в линейном программировании, где главным инструментом является симплекс-метод, основная вычислительная задача состоит в получении матрицы, обратной к базисной. В случае когда матрица ограничений имеет специальную структуру, при реализации требуемых вычислительных процедур на промежуточных этапах в памяти ЭВМ можно хранить матрицу, размеры которой существенно меньше размеров исходной матрицы ограничений. Алгоритмы такого типа рассматриваются в разделах 2 и 3.

При использовании декомпозиционных методов исходную задачу разбивают на ряд подзадач, каждая из которых решается независимо. Однако решение подзадач не может в общем случае приводить к точному решению, поскольку они взаимосвязаны. В работе [44] предложен многоуровневый подход, который учитывает взаи-

[1]) Leon S. Lasdon, Case Western Reserve University.

модействия подсистем. Автор предлагает исходные подсистемы рассматривать как системы первого уровня, а взаимодействия между ними описывать при помощи одной или нескольких подсистем второго уровня. Цель подсистем второго уровня — так скоординировать решение подзадач первого уровня, чтобы получить решение исходной задачи. Подобным образом функционируют все большие организации. Декомпозиционные алгоритмы рассматриваются в разд. 4 и 5.

При изложении материала данной главы предполагается, что читатель знаком с материалом по линейному программированию, приведенным в гл. II-1.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ (МСМ)

В настоящее время большинство крупных компаний и ряд фирм предлагают системы программ, с помощью которых можно решать задачи линейного программирования очень большой размерности. Некоторые программы позволяют решать задачи, содержащие от 8000 до 16 000 строк в матрице условий, если имеется оперативная память достаточного объема. При наличии обобщенных ограничений сверху (ООС) (см. разд. 3) можно решать задачи еще большей размерности. Например, при помощи системы математического программирования MPS III была решена задача, содержащая 50 000 строк в матрице. Задача, имеющая более 5000 строк, считается большой по любым стандартам; так как обычно в ЛП-моделях столбцов больше, чем строк, число элементов матриц условий в таких задачах колеблется от 10^6 до 10^8. Решение задач такой большой размерности возможно благодаря тому, что большинство элементов матриц равно нулю. Количество ненулевых элементов в задачах большой размерности не превышает, как правило, 0,5% от общего числа элементов матрицы условий.

Многие ЛП-модели не столь велики. Большинство прикладных задач приводит к моделям, в которых матрицы содержат от 500 до 1500 строк, хотя число столбцов может достигать нескольких тысяч. Для решения таких задач и задач большей размерности разработаны специальные приемы и процедуры управления данными. Ниже в этом разделе описываются некоторые приемы решений. Отличный обзор характеристик современных ЛП-программ можно найти в книге [45], где описаны также системы управления данными. Большинство приведенных выше статистических данных заимствовано из этой книги.

Все современные ЛП-программы используют модифицированный симплекс-метод (МСМ). В большинстве программ обратная

матрица $\mathbf{B}^{-1}$ хранится в виде произведения элементарных матриц: $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1} \ldots \mathbf{E}_1$, где каждая элементарная матрица $\mathbf{E}_i$ отличается от единичной только одним столбцом. Такое представление называется мультипликативной формой обратной матрицы.

Важная особенность элементарных матриц состоит в том, что их можно хранить в памяти ЭВМ, запоминая только элементы неединичного вектора-столбца и его положение в матрице (практически хранятся только ненулевые элементы и данные об их расположении в столбце). Эти столбцы часто называют η-векторами. Поскольку нет явной формулы для обратных матриц, все вычисления с использованием обратных матриц требуют выполнения последовательности матричных перемножений. Рассмотрим необходимые вычисления в том порядке, в котором они осуществляются при использовании симплекс-метода.

Вычисление симплексных множителей. Пусть $\mathbf{c}_B$ — вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных, упорядоченных так же, как столбцы базиса $\mathbf{B}$. Тогда симплексные множители вычисляются по формуле

$$\pi = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}; \tag{1}$$

если же $\mathbf{B}^{-1}$ задана в мультипликативной форме, то следует вычислить матричное произведение

$$\pi = (\ldots((\mathbf{c}_B\mathbf{E}_k)\ \mathbf{E}_{k-1})\ldots)\ \mathbf{E}_1. \tag{2}$$

Порядок выполнения умножения определяется круглыми скобками, т. е. сначала вычисляется вектор-строка $\mathbf{c}_B\mathbf{E}_k$, затем $(\mathbf{c}_B\mathbf{E}_k)\ \mathbf{E}_{k-1}$ и т. д. Каждая из этих операций требует умножения элементарной матрицы слева на вектор-строку, например на $\mathbf{v}$. При каждом таком умножении изменяется только одна компонента вектора $\mathbf{v}$, которая соответствует η-столбцу; она равна скалярному произведению вектора $\mathbf{v}$ и η-столбца. Таким образом, если матрица в мультипликативной форме содержит k элементарных матриц, то для вычисления π потребуется вычислить k скалярных произведений.

Вычисление разложения столбца $\bar{\mathbf{P}}_s$. Вектор $\bar{\mathbf{P}}_s$ — разложение $\mathbf{P}_s$ относительно базиса — находится по формуле

$$\bar{\mathbf{P}}_s = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_s, \tag{3}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_s = \mathbf{E}_k\,(\ldots\ (\mathbf{E}_2\,(\mathbf{E}_1\mathbf{P}_s))\ \ldots). \tag{4}$$

Здесь умножение проводится в прямой последовательности: сначала $\mathbf{E}_1\mathbf{P}_s$, а затем $\mathbf{E}_2\,(\mathbf{E}_1\mathbf{P}_s)$ и т. д. Каждая операция требует

вычисления произведения вида $\mathbf{E}\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — вектор-столбец. Вычисления проводятся по формулам, приведенным ниже:

$$\mathbf{E}\mathbf{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1})', \tag{5}$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} \mathbf{v}_i + \eta_i \mathbf{v}_r, & i = 1, 2, \ldots, m+1, \ i \neq r, \\ \mathbf{v}_r \eta_r, & i = r, \end{cases} \tag{6}$$

а r — номер η-столбца. Таким образом, вычисление $\mathbf{E}\mathbf{v}$ требует $m+1$ умножений и m сложений.

Преобразование обратной матрицы. Для преобразования следует только внести новый η-вектор в список, который хранится в памяти ЭВМ. Элементы нового вектора находятся из текущего значения $\overline{\mathbf{P}}_s$.

Использование разреженности матрицы. При решении задач большой размерности мультипликативная форма обратной матрицы обеспечивает ряд важных вычислительных преимуществ. Дело в том, что матрицы условий больших задач ЛП (более 100 строк) почти всегда разрежены. Для нахождения обратных матриц разработаны эффективные процедуры, которые сохраняют исходную разреженность и для η-векторов. Поскольку хранятся только ненулевые элементы η-векторов, требования к объему памяти уменьшаются и в результате бо́льшая часть η-файла может храниться в оперативной памяти ЭВМ. Остаток файла можно хранить на дисках или барабанах. Перенос информации с этих устройств в оперативную память замедляет процедуру вычислений, поскольку скорость обмена информацией значительно меньше скорости выполнения арифметических операций. Если η-вектор хранится с учетом разреженности, то пересылки будут требоваться реже и они будут занимать меньше времени. Кроме того, разреженность η-вектора приводит к ускорению вычислений π по формуле (1) и $\overline{\mathbf{P}}_s$ по формуле (3). Это обусловлено тем, что операции умножения и сложения будут производиться только в том случае, если оба операнда отличны от нуля.

2.1. Эффективные алгоритмы получения обратных матриц

Эффективные алгоритмы для вычисления $\mathbf{B}^{-1}$ в мультипликативной форме используют тот факт, что, хотя обратная матрица — единственна, ее можно представить в виде произведения различных элементарных матриц. Поэтому можно выбрать такое представление, которое обладает некоторыми желаемыми свойствами, например разреженностью. Мы не будем подробно описывать современные алгоритмы обращения: они слишком громоздки и их

можно найти в работах [24. 29]. Основная идея тем не менее довольно проста. При выборе ведущих элементов следует стремиться к тому, чтобы число ненулевых элементов, которые возникают в результате проведения операции исключения, было как можно меньше. Для каждой строки подсчитывается число ненулевых элементов, которые стоят на пересечении данной строки с допустимыми столбцами; число таких элементов будем называть *длиной строки*; аналогично определяется *длина столбца*. Сначала рассматриваются все строки и столбцы. При выполнении операции исключения ведущая строка прибавляется к остальным строкам, поэтому ведущая строка с малой длиной будет порождать немного новых ненулевых элементов. Если длина строки — единица, то не возникнет новых ненулевых элементов. Если же найдется такая строка, то она и столбец, содержащий ненулевой элемент, помечаются как недопустимые, а длину строки и столбца уменьшают. Затем продолжают поиск новой строки с единичной длиной. Аналогичная процедура может быть проведена для поиска столбцов единичной длины. При этом локализуются треугольные части матриц условий; во многих практических случаях базис почти полностью треугольный. Остальная часть (ядро) требует более тщательного рассмотрения. Читатель может обратиться к литературе, упоминавшейся выше.

2.2. LU-разложение

LU-разложением несингулярной матрицы **B** называется представление ее в виде $\mathbf{B} = \mathbf{LU}$, где **L** и **U** — нижняя и верхняя несингулярные треугольные матрицы соответственно [3]. Обратная матрица определяется формулой $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$. Ранее описанные процедуры обращения приводят $\mathbf{B}^{-1}$ к этому виду (с точностью до перестановки строк), представляя в мультипликативной форме $\mathbf{U}^{-1}$ и $\mathbf{L}^{-1}$. Хотя η-столбцы в мультипликативной форме достаточно разрежены сразу после процедуры обращения, дальнейшие итерации симплекс-метода порождают η-векторы с возрастающей плотностью ненулевых элементов. По этой причине η-файл быстро переполняет оперативную память ЭВМ. и время вычисления увеличивается. В работе [11] предложена модификация алгоритма, которая частично решает проблему памяти. Вместо объединения η-файлов для $\mathbf{U}^{-1}$ и $\mathbf{L}^{-1}$, как это делается в стандартных программах МСМ, предлагается хранить и корректировать η-файлы отдельно [11]. Когда новый столбец вводится в базис, каждый из файлов пересчитывают отдельно, чтобы привести $\mathbf{U}^{-1}$ и $\mathbf{L}^{-1}$ в соответствие с новым базисом. Детали вычислительной процедуры можно найти в указанных работах.

Метод **LU**-разложения был использован в системе математического программирования UMPIRE, предложенной в США корпорацией Computer Sciences. В работе [11] отмечается, что по срав-

нению со стандартными программами МСМ использование LU-разложения позволило сократить число новых ненулевых элементов примерно на 90%, уменьшить длину η-файла на 60—70% и увеличить скорость выполнения симплексных итераций на 40%. Статистические данные позволяют предположить, что в будущем в ЛП-программах будут использованы идеи, описанные выше.

2.3. Сверхразреженность

В работе [27] высказана идея, которая позволяет решать задачи немыслимой ранее размерности; при этом используется только оперативная память ЭВМ. Предлагается учесть то обстоятельство, что в типичной матрице условий число различных ненулевых элементов много меньше общего числа ненулевых элементов. Особенно часто встречаются единицы. В результате можно хранить конкретные величины автономно, а на месте всех ненулевых элементов матрицы поместить указатели, которые являются адресами ячеек памяти ЭВМ, где хранятся конкретные значения этих элементов. Указатели можно поместить в части полного машинного слова — возможно, только в двух 8-разрядных байтах вместо четырех байтов, требуемых для запоминания матричного элемента с обычной точностью. В примерах, представленных в работе [27], предполагается, что реальное число различных ненулевых элементов ЛП-матриц является величиной того же порядка, что и число столбцов, а часто их даже меньше. Следовательно, предложенная схема хранения элементов может дать большую экономию памяти.

На самом деле можно получить даже бóльшую экономию памяти, если использовать другую идею, предложенную в работе [27]. Напомним, что обратную матрицу задачи представляют η-векторы, которые получаются из векторов $\overline{\mathbf{P}}_s$ [см. равенство (3)] по следующим формулам:

$$\boldsymbol{\eta}_i = \begin{cases} -\alpha_i/\alpha_r, & i \neq r, \\ 1/\alpha_r, & i = r, \end{cases}$$

где α_i — элементы $\overline{\mathbf{P}}_s$, а r — номер ведущей строки. η-векторы используются только для вычислений $\boldsymbol{\pi}$ [уравнение (2)] и $\overline{\mathbf{P}}_s$ [уравнение (4)], но эти вычисления можно запрограммировать так, чтобы в них непосредственно были включены деление на α_r и изменение знака. Следовательно, векторы $\overline{\mathbf{P}}_s$ можно хранить и использовать для представления обратного базиса. Как было отмечено в разд. 2.1, основная часть ЛП-базисов имеет треугольную форму, например для столбцов $\mathbf{P}_i$, которые не входят в ядро. Для таких

столбцов $\mathbf{P}_i$ и $\overline{\mathbf{P}}_i$ совпадают, поэтому эти столбцы можно запоминать, используя указатели, отмечающие положение столбцов в исходной матрице. В работе [24] показано, что большинство столбцов ядра обратной матрицы можно хранить таким образом. Следовательно, обратную матрицу можно представить, используя лишь небольшое число ненулевых элементов, не входящих в исходную матрицу.

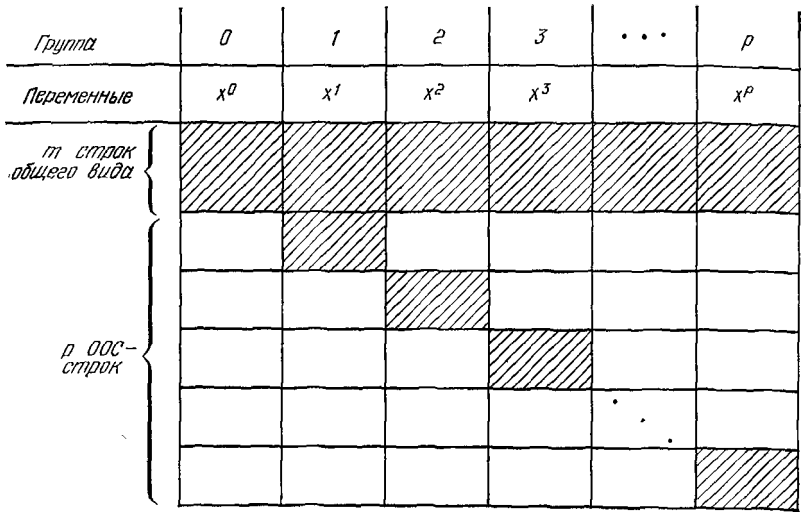
2.4. Многоуровневая оценка

Отметим, что относительные оценки $\overline{c}_j$ при использовании МСМ должны вычисляться отдельно. Этот факт можно использовать различными способами. Время вычисления по мультипликативным программам сильно зависит от числа обращений к полному списку исходных данных задачи (**A**, **b**, **c**). Последнее особенно существенно, когда данные хранятся во внешнем запоминающем устройстве, так как при каждом обращении к исходным данным их необходимо передавать в оперативную память ЭВМ. Обозначим словом «вызов» каждое обращение к исходным данным задачи. Число таких вызовов можно уменьшить, если использовать прием, называемый многоуровневой оценкой или субоптимизацией. Вычислим множители π и отберем k небазисных столбцов, имеющих наибольшие отрицательные относительные оценки. Преобразуем отобранные столбцы и сформируем в оперативной памяти усеченную задачу, включающую только текущие базисные переменные и выбранные k столбцов. К этой задаче применим стандартный симплекс-метод, пользуясь только оперативной памятью. После того как решение усеченной задачи найдено, начинаем очередной вызов.

Решение усеченной задачи не требует обращений к исходным данным и может привести к значительному уменьшению целевой функции. В результате число вызовов, а следовательно, и общее время решения может быть значительно сокращено. В современной программе линейного программирования IBM MPSX-370 величина k — целое число, принимающее значения от 1 до 9. Слишком большое значение k может замедлить сходимость, поскольку много времени будет расходоваться на столбцы, которые в данный момент не используются.

3. МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ СВЕРХУ

Метод обобщенных ограничений сверху (МООС) представляет собой модификацию симплекс-метода. Этот метод эффективен при решении задач ЛП со структурой, приведенной ниже.



Здесь m — число ограничений произвольного вида и p — число обобщенных ограничений сверху (ООС), которые не содержат общих переменных (так называемых ООС-строк). Набор переменных, связанных ООС-строкой, называется группой. Коэффициенты в ООС-строках произвольны, и ограничение сверху может иметь знак $=$, $\leqslant$, $\geqslant$, или может быть задана область ($\leqslant a$, $\geqslant b$). Часто в ООС-строке все коэффициенты есть просто ± 1; последнего можно добиться масштабированием переменных.

Почти все задачи линейного программирования имеют ООС-строки, а во многих задачах большинство строк именно типа ООС. Уравнения материального баланса, которые записываются в виде $111 \ldots 1 - 1 \ldots -1 = 0$, могут быть взяты в качестве ООС-строки. Такие соотношения довольно распространены в ЛП-моделях и часто используются для определения одних переменных через другие. Ограничения вида $111 \ldots 1 \{\leqslant\} b$ могут иметь место в связующей задаче декомпозиции Данцига — Вулфа (см. разд. 5), а также в λ-форме сепарабельного программирования [21]. Они записываются в виде равенств и имеют $b = 1$. Такую же структуру имеют условия, состоящие в том, что общая величина произведенной или перевезенной продукции должна удовлетворять спросу или же не превышать некоторых запасов. Следовательно, транспортные, обобщенные транспортные задачи и задачи перевозок включают ООС-строки, в качестве которых можно взять ограничения спроса и предложения. Во многих транспортных моделях число стоков (покупателей или распределительных центров) много больше, чем число источников (фабрик или фабричных складов); в таких задачах основную массу ограничений составляют ООС-

строки. Многие ЛП-модели содержат распределительные подзадачи; в этом случае все изложенное выше относится и к общим задачам ЛП.

Методом ООС удается решить перечисленные задачи, хотя при этом используется так называемый рабочий базис размером $m \times m$. Последнее дает существенный выигрыш, когда p велико по сравнению с m. Все величины, необходимые для проведения итераций симплекс-метода, например значения базисных переменных, симплексные множители, коэффициенты разложения новых столбцов по базису, получаются из соответствующих величин рабочего базиса. Мы не будем останавливаться на деталях алгоритма. Основные идеи можно найти в работах [8, 30], а в книге [45] показано, как при использовании МООС уменьшаются время решения и необходимые размеры памяти. В работе [25] приводятся результаты сравнения программы MPS III GUB Management Science Systems, Inc., Rockville, Maryland (вариант 1974 г.) с программой IBM MPSX LP. Сравнение показало, что если половину строк в задаче составляют строки типа ООС, то время решения с помощью MPS III будет составлять 1/3 времени для MPSX. Если же 80—90% строк имеют структуру ООС, то время решения с помощью MPS III приблизительно в десять раз меньше. Кроме того, приводятся случаи специальных задач. В настоящее время большинство ЛП-программ включают МООС или как часть пакета программ, или как подпрограммы, которые можно арендовать за дополнительную плату.

Ниже будут сформулированы задачи, содержащие ООС-строки. Приводимые постановки задач интересны и сами по себе, так как описывают многие практические проблемы и, кроме того, иллюстрируют возможности широкого использования МООС.

3.1. Распределение ресурсов между предприятиями

Многопродуктовые задачи календарного планирования, сформулированные в работах [10] и [42], относятся к следующему классу задач распределения ресурсов. Пусть имеется I промышленных предприятий, каждому из которых присвоен номер i ($i = 1, 2, \ldots, I$), и допустим, что в каждый период времени t ($t = 1, 2, \ldots, T$) предприятия должны быть обеспечены некоторым однородным ресурсом. Обозначим через x_{it} интенсивность работы i-го предприятия в t-й период и введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{X}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{iT}), \quad i = 1, \ldots, I. \tag{7}$$

С каждым вектором $\mathbf{X}_i$ связаны производственные затраты $c_i(\mathbf{X}_i)$. Обозначим через $y_{it}(\mathbf{X}_i)$ потребность i-го предприятия в однородном ресурсе в t-й период времени, а через b_t — количество ресурса, которым мы располагаем в t-й период (суммарный объем имеющегося в наличии ресурса в t-й период).

Введем обозначения

$$\mathbf{Y}_i(\mathbf{X}_i) = (y_{i1}(\mathbf{X}_i),\ y_{i2}(\mathbf{X}_i),\ \ldots,\ y_{iT}(\mathbf{X}_i)) \tag{8}$$

и

$$\mathbf{b} = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_T). \tag{9}$$

Каждое предприятие имеет свои ограничения; запишем их символически в виде

$$\mathbf{X}_i \in S_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ I. \tag{10}$$

Задача оптимального распределения ресурсов заключается в определении минимального значения суммы

$$\sum_{i=1}^{I} c_i(\mathbf{X}_i) \tag{11}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{I} \mathbf{Y}_i(\mathbf{X}_i) \leqslant \mathbf{b}, \tag{12}$$

$$\mathbf{X}_i \in S_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ I. \tag{13}$$

В работах [10, 42] рассмотрены задачи, в которых ограниченным ресурсом является рабочая сила, x_{it} — количество изделий i-го вида, произведенное в t-м периоде, т. е. размер партии; S_i — набор неотрицательных ограничений на объем производства изделий i-го вида (при неотрицательных требованиях на изделия i-го вида возникают неотрицательные ограничения на уровни запасов); $c_i(\mathbf{X}_i)$ — функция издержек производства i-го вида продукции за весь плановый период (сумма затрат на наладку оборудования плюс стоимость запасов). В работе [10] предполагается существование различных ресурсов: например, трудовые ресурсы могут быть различного типа, а их использование является управляющей переменной, причем вводятся соответствующие затраты на наем и увольнение рабочей силы. Для простоты изложения мы не будем рассматривать такие уточнения модели, хотя это и не привело бы к серьезным трудностям.

Введем в рассмотрение V_i — подмножество множества S_i. Будем говорить, что $\tilde{x}_{ij} \in V_i$, если элемент $\tilde{x}_{ij}$ может войти в оптимальное решение задачи (11) — (13). Пусть множество V_i конечно; это предположение обосновано в работе [10] с помощью теоремы из [42]. (В задаче из разд. 3.2 множество S_i является конечным.) Предположим далее, что $I > T$. При сделанных предположениях

приближенное решение задачи (11) — (13) может быть найдено в результате решения следующей задачи ЛП:

$$\text{минимизировать} \sum_{i,j} c_{ij}\theta_{ij} \tag{14}$$

при ограничениях

$$\sum_{i,j} Y_{ij}\theta_{ij} \leqslant b, \tag{15}$$

$$\sum_{j} \theta_{ij} = 1, \ i = 1, 2, \ldots, I, \ \theta_{ij} \geqslant 0, \text{ где} \tag{16}$$

$$c_{ij} = c_i(X_{ij}), \quad Y_{ij} = Y_i(X_{ij}).$$

Оптимальное решение задачи (11) — (13) будет получено, если к условиям (15), (16) добавить требование целочисленности θ_{ij}. Любое базисное допустимое решение задачи (14) — (16) обладает следующим свойством: не менее чем $(I - T)$ индексам i соответствует точно одна положительная переменная θ_{ij} со значением, равным единице. Таким образом, решение задачи (14) — (16) дает хорошее приближение к решению задачи (11) — (13) при условии, что число различных видов изделий I значительно больше количества интервалов времени T. В этом случае для решения задачи выгодно использовать МООС, так как I условий (16) являются ограничениями типа ООС.

3.2. Задача календарного планирования

В работе [39] рассмотрен специальный случай модели, предложенной в предыдущем разделе. Имеется I видов продукции, спрос на которую для каждого промежутка t ($t = 1, 2, 3, \ldots, T$) задан. При производстве продукции используется взаимозаменяемое оборудование (машины). Переход от выпуска изделий одного вида к выпуску изделий другого вида на одном и том же оборудовании связан с затратами на наладочные работы, которые не зависят от видов продукции. Будем предполагать, что после соответствующей наладки оборудование может выпускать любую продукцию. Наладочные работы включают замену некоторой части оборудования (например, штампов), определяющей вид выпускаемой продукции. Суммарные затраты включают а) затраты, связанные с хранением запасов, и б) затраты на наладочные работы. Требуется составить график использования оборудования, при котором эти затраты были бы минимальными.

Сформулированная задача полностью соответствует задаче (11) — (13). Переменные x_{it} обозначают количество единиц оборудования, используемого для производства i-го вида продукции

в t-м периоде; b_t — количество единиц оборудования, которое может быть использовано в t-м периоде. Функция $\mathbf{Y}_i(\mathbf{X}_i)$ есть $\mathbf{X}_i$. Затраты $c_i(\mathbf{X}_i)$ равны

$$c_i(\mathbf{X}_i) = p_s \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - x_{i,\,t-1})_+ + \sum_{t=1}^{T} \gamma_{it}(v_{it}), \tag{17}$$

где первое слагаемое характеризует затраты на наладочные работы (p_s — затраты на одну наладочную операцию), а второе — затраты, связанные с хранением запасов. (v_{it} — необходимый уровень запасов продукции i-го вида в t-м периоде, полученный с учетом предполагаемого спроса.) Функция x_+ определяется следующим образом:

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Функции γ_{it} описывают затраты, связанные с хранением (при $v_{it} > 0$), и убытки от недостатка (при $v_{it} < 0$) продукции i-го вида; эти функции могут иметь любую удобную форму. Наконец, S_i представляет собой множество всех векторов $\mathbf{X}_i$, компоненты которых x_{it} являются целыми неотрицательными числами, удовлетворяющими ограничениям: а) $x_{it} \leqslant n_i$, т. е. x_{it} не превышает некоторого максимального количества единиц оборудования, которое может быть использовано одновременно для производства продукции i-го вида; б) уровень запасов v_{it} лежит между заданными верхней и нижней границами.

Для сформулированной проблемы задача ЛП (14) — (17) принимает вид

$$\text{минимизировать} \sum_{i,j} c_{ij}\theta_{ij} \tag{18}$$

при ограничениях

$$\sum_{i,j} X_{ij}\theta_{ij} \leqslant b, \tag{19}$$

$$\sum_{j} \theta_{ij} = 1 \text{ при всех } i, \ \theta_{ij} \geqslant 0. \tag{20}$$

Решение задачи отложим до разд. 4.

3.3. Задачи производства и распределения

В работе [25] приводятся различные ООС-модели. Рассмотрим одну из них, которая часто встречается на практике: максимизи-

ровать u_1 при ограничениях

$$u_i + \sum_{j=1}^{n_0} a_j^i x_j + \sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} a_{kp}^i x_{kp} = b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{k=1}^{n_p} x_{kp} = g_p, \quad p = 1, 2, \ldots, P.$$

Логические переменные | Сырье для производства продукции | Выполнение производственных заказов

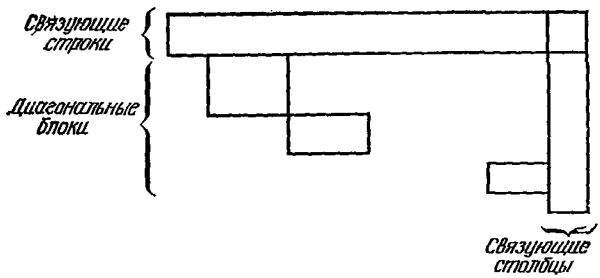
Здесь b_i — величина i-го ресурса, имеющегося в наличии; g_p — спрос на продукцию вида p; x_{kp} — количество продукции вида p, изготовленное с использованием k-го технологического процесса. Различные индексы k могут относиться к разным технологическим процессам производства на одном предприятии или к производству на различных предприятиях. Как правило, требуется минимизировать затраты. Поскольку обычно P значительно больше m, то целесообразно решать такие задачи методом ООС.

В описанную модель можно включить два (или более) предприятий и большое число периодов времени, но тогда получится действительно огромная задача. Основные свойства модели, содержащей два периода времени, описаны в работе [41]. В модели предполагается, что предприятие выполняет такие функции, как приобретение сырья (исходных материалов), производство продукции, транспортировка на склады, хранение и транспортировка к покупателям. Ограничениями в модели являются: лимиты на исходные материалы, производственные ресурсы, объемы хранилищ для исходных материалов на предприятиях и для готовой продукции на складах. В модель входят также соотношения материального баланса, которые связывают объемы производства с приобретенными и имеющимися в наличии исходными материалами (сырьем). Некоторые добывающие отрасли могут поставлять сырье непосредственно на склады. Уравнения производственного баланса связывают производство продукции с ее транспортировкой на склады и к покупателям. Кроме того, уравнения баланса связывают объемы продукции, поступающей на склад, хранящейся на складе и перевезенной к покупателю.

В описанной модели ООС-строками являются условия, которые отражают спрос, а также ограничения на объемы хранилищ для исходных материалов и готовой продукции. К ООС-строкам можно также отнести ограничения на производственные мощности и добычу исходных материалов. Как указано в работе [25], была решена задача, матрица которой содержала 4000 строк. Подобные интегральные модели планирования ранее не формулировались из-за большой размерности задач. В настоящее время решение таких задач представляет собой одну из наиболее интересных областей применения метода ООС.

3.4. Обобщение метода ООС

Описанный выше метод ООС может быть использован при решении задач с матрицей ограничений, имеющей следующую структуру:



Блоки могут представлять как производство на различных предприятиях или объединениях корпорации, так и состояние производства в различные моменты времени. Связующие строки могут отражать ограничения на использование ресурсов или спрос, для удовлетворения которого необходима продукция более чем одного предприятия. Связующие столбцы могут появляться в тех моделях, где нужно учесть условия на запасы продукции или перевозки продукции с одного предприятия на другое. В тех случаях, когда условия задачи не содержат связующих столбцов, с помощью модифицированного метода ООС решение задачи находят, используя только а) обратную матрицу рабочего базиса размерами ($m \times m$); б) обратные матрицы для каждого из блоков. Как и исходный, модифицированный метод ООС подобен симплекс-методу. Но обратная базисная матрица хранится в компактной форме. Детали можно найти в работе [32]. При наличии связующих столбцов рабочий базис может быть несколько больше, а алгоритм становится более сложным (см. [23]). В работах [20, 33] разработана двойственная форма описанных алгоритмов. Насколько автору известно, до 1974 г. ни один из этих алгоритмов не был использован в коммерческих ЛП-программах; тем не менее обобщенные алгоритмы ООС могут появиться в ближайшем будущем, поскольку в настоящее время происходит развертывание работ в этом направлении.

Другим методом решения задач с блочно-диагональной матрицей условий и связующими блоками является метод декомпозиции Данцига — Вулфа, описанный в разд. 5 этой главы.

4. МЕТОД ГЕНЕРАЦИИ СТОЛБЦОВ

Рассмотрим задачу ЛП, в которой необходимо минимизировать целевую функцию. Обозначим столбцы матрицы условий через $\mathbf{p}_j$, а коэффициенты целевой функции через c_j. Пусть $\mathbf{B}$ — некото-

рый допустимый базис задачи, а π — вектор двойственных переменных, связанных с данным базисом. Для улучшения текущего базисного допустимого решения мы «оцениваем» небазисные столбцы, вычисляя их характеристические разности $\bar{c}_j = c_j - \pi \mathbf{p}_j$. Если затем удается найти отрицательное $\bar{c}_j$, то, за исключением вырожденного случая, имеющиеся значения целевой функции можно уменьшить, если включить в базис соответствующий столбец и выполнить операцию исключения (ведущее преобразование).

Если столбцов много, т. е. от нескольких тысяч до нескольких миллионов, то нахождение минимального значения $\bar{c}_j$ путем вычисления всех $\bar{c}_j$ и их сравнения может оказаться невозможным. К счастью, в таких задачах большинство столбцов обычно имеет специфический вид, что объясняется структурой реальных систем, моделируемых в задачах ЛП.

В общем случае будем предполагать, что все столбцы $\mathbf{p}_j$ выбираются из множества S, которое является множеством всех $\mathbf{m}$-векторов, удовлетворяющих некоторой системе равенств или неравенств. Тогда столбец, подлежащий включению в базис, может быть определен в результате решения подзадачи: найти минимум $[c(\mathbf{p}_j) - \pi \mathbf{p}_j]$ при условии $p_j \in S$, где $c(\mathbf{p}_j) \equiv c_j$ — заданная функция вектора $\mathbf{p}_j$. В зависимости от структуры множества S и вида функции $c(\cdot)$ можно выбирать различные методы для решения этой подзадачи, например методы линейного программирования, динамического программирования и т. д. Изложенный выше метод вычисления столбцов называется генерацией столбцов, так как при решении подзадачи просматривается обычно небольшое число столбцов множества S и новые столбцы генерируются по мере необходимости. Таким образом, ни один из столбцов не хранится в памяти ЭВМ, что является очевидным преимуществом при решении задач большой размерности.

4.1. Задача о раскрое

Рассмотрим задачу о раскрое неограниченного числа рулонов бумаги различной длины, при котором необходимо получить по крайней мере n_i кусков длины l_i ($i = 1, 2, \ldots, I$). Цель состоит в минимизации общего числа рулонов, которые приходится разрезать. Так как при раскрое каждого рулона образуются отходы, то наша цель эквивалентна минимизации отходов.

Предположим для простоты, что все рулоны имеют одинаковую длину l. Если $l_i \leqslant l$, $i = 1, 2, \ldots, I$, то задача имеет решение. Кусок длины l_i будем условно называть заготовкой. Из каждого рулона можно вырезать различное число таких заготовок, например a_1 заготовок длины l_1, a_2 заготовок длины l_2 и т. д. Каждый конкретный набор заготовок соответствует определенному способу

раскроя. Таким образом, способ раскроя однозначно определяется вектором $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_I)$. Существует конечное число способов раскроя, но это число может быть очень большим. Сформулируем следующую задачу: указать, сколько раз следует использовать каждый конкретный способ раскроя, чтобы полностью удовлетворить требованиям на заготовки различной длины и при этом общее количество раскроенных рулонов было минимальным.

Введем следующие обозначения: a_{ij} — число заготовок i-го типа (длины l_i), получаемых из одного рулона при j-м способе раскроя; $\mathbf{p}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{Ij})$ — вектор, описывающий j-й способ раскроя; x_j — интенсивность использования j-го способа раскроя; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_I)$ — вектор спроса на заготовки длины $l_1, l_2, \ldots, l_I$. Тогда для удовлетворения спроса должны выполняться неравенства $\sum_j \mathbf{p}_j x_j \geqslant \mathbf{n}$, $x_j \geqslant 0$ и целые. Необходимо минимизировать величину $z = \sum_j x_j$, которая представляет собой общее число раскроенных рулонов длины l.

Условие целочисленности переменных x_j значительно усложняет решение поставленной задачи, поэтому отбросим его. Во многих задачах, особенно при больших величинах спроса, оптимальные значения x_j достаточно велики, и поэтому округление их до целых чисел вносит малую погрешность в оптимальное решение. Однако решение задачи связано с определенными трудностями, так как число столбцов $\mathbf{p}_j$ может быть очень большим. Например, при раскрое рулона длиной 2000 дюймов на заготовки 40 видов длиной от 20 до 80 дюймов число способов раскроя может легко превысить 10 и даже 100 миллионов [16]. Однако трудности, связанные с большим числом столбцов, могут быть преодолены путем предварительной оценки столбцов и введения соответствующих подзадач.

Определим характеристические разности небазисных переменных x_j: $\bar{c}_j = 1 - \sum_j \pi_i a_{ij}$, где π_i — двойственные переменные (множители) для соответствующих ограничений. Для того чтобы вектор $\mathbf{A}$ описывал допустимый способ раскроя, его координаты должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$a_i \text{ — неотрицательные целые числа, } \sum_{i=1}^{I} l_i a_i \leqslant l.$$

Таким образом, нахождение минимального значения $\bar{c}_j$ на множестве всех столбцов эквивалентно вычислению максимума $\sum_j \pi_i a_i$ при указанных ограничениях. Задачи такого типа получили название задач о рюкзаке из-за следующей возможной интерпретации их условий. Отправляясь в поход, мы можем взять

рюкзак, общий вес которого не превышает l. Для каждого предмета (номер предмета обозначим через a_i) известен его вес l_i и относительная полезность. Требуется найти вариант загрузки рюкзака, при котором достигается максимум суммарной функции полезности. Задачи такого типа могут быть эффективно решены с помощью ряда алгоритмов, например методами динамического программирования (ДП) [2]. В работе [16] предложен алгоритм, который находит решение почти в пять раз быстрее, чем стандартные методы ДП.

Известно, что если $\min \bar{c}_j < 0$, то решение задачи ЛП можно улучшить. Пусть v — оптимальное значение целевой функции в задаче о рюкзаке; тогда условие $\min \bar{c}_j < 0$ можно записать в виде $v > 1$. Если $v > 1$, то сформируем соответствующий вектор раскроя и введем его в базис. Если $v \leqslant 1$ и дополнительные переменные неотрицательны, то текущее решение оптимально.

В работах [15, 16] такой подход был успешно использован при решении практических задач, возникающих в бумажной промышленности. Обзор результатов можно найти в [36]. Были решены задачи, в которых требовалось до 40 заготовок различной длины l_i, и минимальный процент отходов составил от 0,5 до 1%. Кроме того, проверялись различные приемы ускорения процесса вычислений. Один из них, названный методом медиан, был применен для решения следующей проблемы. При использовании стандартного симплекс-метода введение в базис столбца, которому соответствует $\min \bar{c}_j$, не гарантирует максимально возможного уменьшения целевой функции z. Такая процедура гарантирует только наибольшее относительное уменьшение целевой функции: максимальное уменьшение z при возрастании x_j на единицу. Величина x_j может оказаться мала, и целевая функция z уменьшится всего на $\bar{c}_j x_j$. Часто можно найти некоторое $\bar{c}_i$, такое, что хотя $\bar{c}_i > \min\limits_j c_j$, соответствующее x_i будет большой величиной, что и приведет к значительному уменьшению функционала. Для выбора столбца x_j, обеспечивающего наибольшее уменьшение целевой функции, в общем случае требуется слишком много вычислений, но в данной задаче число вычислительных операций сокращено. В многих задачах раскроя требования n_i на заготовки (листы бумаги различного формата) весьма различны. Рассмотрим некоторый способ раскроя, при котором получаются заготовки, пользующиеся большим и малым спросом. Интенсивность использования такого способа раскроя ограничена самым малым спросом, поскольку в противном случае только рассматриваемый способ может привести к превышению спроса. Поэтому, для того чтобы получать достаточно большие значения величины x_i, которые приведут к большим изменениям z, все

виды заготовок целесообразно разделить на группы, пользующиеся повышенным и пониженным спросом (т. е. группы заготовок, спрос на которые больше или меньше значения медианы спроса). В ходе вычислений при проведении ведущего преобразования (операции исключения) в задаче о рюкзаке приравнивались нулю все переменные a_i, которые относились к группе заготовок, пользующихся пониженным спросом. Такой метод позволяет получать заготовки с большими значениями x_j и обеспечивает большое значение функционала.

В работе [16] метод медиан, дающий точное решение задачи о рюкзаке (а), сравнивается с двумя другими методами: с методом медиан (б), при котором находилось частично оптимальное решение задачи о рюкзаке (вычисления прекращались, как только получалось решение, при котором $\bar{c}_j < 0$), и с методом (в), в котором использовался принцип метода «б», но не использовался метод медиан. Результаты сравнения показывают [16], что при нахождении оптимального решения методом «а» требуется немного меньше времени для вычислений, чем в случае метода «б», и существенно меньше, чем для метода «в». Следовательно, в данном случае нахождение $\min\limits_j \bar{c}_j$ привело к наилучшим результатам, хотя этот вопрос был ранее спорным и исследователи приходили к весьма различным заключениям [5]. Время вычислений можно сократить, если удается найти хорошее приближение величины $\min\limits_j \bar{c}_j$ (см. разд. 4.2).

Если требуется разрезать широкие листы или прямоугольные шаблоны, то возникает двумерная задача о раскрое. Двумерные или многомерные задачи о раскрое можно также сформулировать как ЛП-задачи с большим количеством столбцов, хотя в этом случае труднее решить подзадачи генерации столбцов. Некоторые двумерные задачи о раскрое можно свести к решению последовательности одномерных задач о рюкзаке. Подробнее эти вопросы изложены в работе [17].

4.2. Календарное планирование

В разд. 3.2 рассматривалась задача календарного планирования. Применим для ее решения метод генерации столбцов. В практических случаях задача ЛП (18) — (20) содержит огромное число столбцов — по одному на каждый возможный технологический процесс производства каждого вида изделия. Пусть $\mathbf{B}$ — базисная матрица задачи (18) — (20) и (π_1, π_2) — вектор двойственных переменных, соответствующих данному базису; здесь π_1 — оценки ограничений (19), а π_2 — оценки ограничений (20). Вычислим оценки столбцов, связанных с 0_{ij}. Их характеристические разности равны $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_1 \mathbf{X}_{ij} - \pi_{2i}$. Чтобы определить столбец,

вводимый в базис, необходимо найти $\min_i \min_j \bar{c}_{ij}$. Нахождение $\min_i \bar{c}_{ij}$ эквивалентно решению подзадачи

$$\text{минимизировать } [c_i(\mathbf{X}_{ij}) - \pi_1 \mathbf{X}_{ij}]; \tag{21}$$

поскольку $\mathbf{X}_{ij}$ является произвольным элементом множества S_i, эта подзадача в свою очередь эквивалентна подзадаче

$$\text{минимизировать } [c_i(\mathbf{X}_i) - \pi_1 \mathbf{X}_i] \tag{22}$$

при ограничениях

$$\mathbf{X}_i \in S_i.$$

Отметим, что подзадачи (21), (22) являются задачами составления графика выпуска одного вида изделий со штрафом $(-\pi_1 \mathbf{X}_i)$ за использование дефицитного ресурса, которым являются станки. Вектор π_1 содержит двойственные («теневые») цены за использование станка на каждом из временны́х интервалов. Подзадачи (21), (22) могут быть решены методами динамического программирования с двумя переменными состояния x_{it} и v_{it}. Поскольку исходное состояние x_{i0} задано, используется метод прямой прогонки.

В работе [39] решен набор тестовых задач календарного планирования. Результаты показали, что поиск первого допустимого плана исходной задачи с использованием полного множества искусственных переменных во многих случаях неэффективен. Поэтому сначала решались подзадачи (21), (22) при $\pi_1 = 0$. Если полученные решения удовлетворяли ограничениям на число имеющихся станков, т. е. если выполнялось условие (19), то они являлись оптимальными. В противном случае строился допустимый план с использованием переменных θ_{ij} (по одной для каждой подзадачи) и, кроме того, T слабых и искусственных переменных. Это позволяло осуществлять операцию обращения базисной матрицы аналитически и получать хорошее приближение для решения основной подзадачи.

Были решены четыре тестовые задачи тремя различными методами. В методе 1 применен алгоритм декомпозиции Данцига — Вулфа (см. разд. 5). Метод 2, в котором использовалась генерация столбцов, применялся для решения задачи с ООС, причем на каждой итерации симплекс-метода в базис вводился столбец с минимальной характеристической разностью $\bar{c}_{ij}$. Таким образом, решалось I подзадач ДП, но использовался только лучший из полученных столбцов. Методом 3 решалась ограниченная основная задача ЛП, в которую в качестве небазисных столбцов вводились одновременно все I столбцов, полученных при решении подзадач. В качестве начального решения такой задачи ЛП было

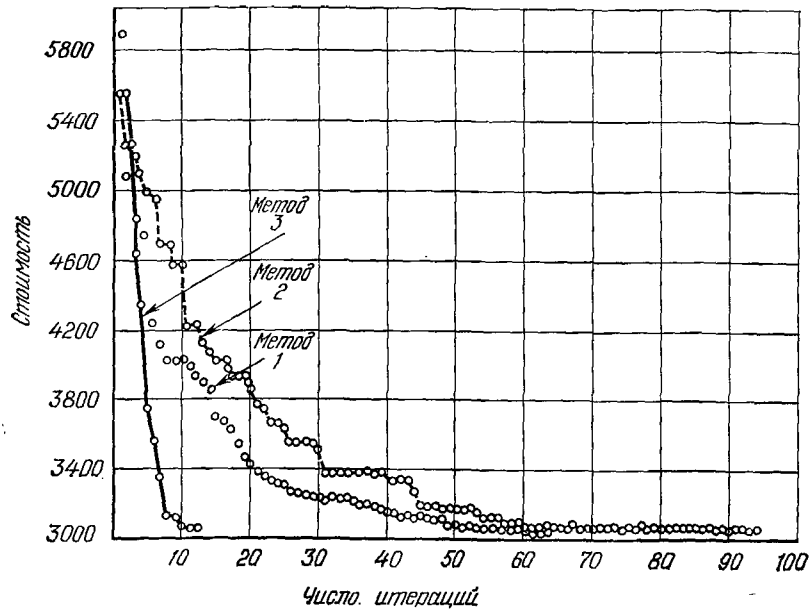


Рис. 1. Изменение стоимости в зависимости от числа итераций. (Задача, в которой рассматривалось от трех до десяти видов продукции.)

взято текущее базисное решение. При этом получилось частное решение задачи ЛП (отброшены все столбцы, выведенные из базиса). При использовании метода 3 многие из решений подзадач можно ввести в базис перед началом следующих итераций. В этом методе применяется стратегия многократного оценивания, описанная в разд. 2.4. Находится наилучший столбец для каждой из I частей таблицы ЛП, причем любая часть содержит столбцы, которые представляют календарные графики выпуска конкретных видов изделий.

На рис. 1 изображены типичные кривые, позволяющие сравнивать три метода; для примера взята задача с 10 видами продукции. Методы 1 и 2 сходятся очень медленно вблизи оптимума. Метод 3 сходится значительно быстрее. При использовании метода 3 на каждой итерации решается (возможно, частично) задача ЛП. (При использовании методов 1 и 2 это не делается.) Несмотря на это, время решения приблизительно пропорционально числу итераций, потому что ограниченная задача ЛП решается намного быстрее, чем I подзадач.

Проверялся и ряд других приемов, сокращающих время вычислений. Один из них заключался в решении подзадач с помощью алгоритма динамического программирования, в котором допуска-

лось изменение только одной переменной состояния, а значение другой переменной (x_{i1}) оставалось фиксированным на начальном уровне x_{i0}. Этот прием ускорял процесс вычислений более чем вдвое и часто приводил либо к оптимальному решению, либо к хорошему приближению. Такой прием полезен, пока есть возможность получения столбцов с отрицательной характеристической оценкой. В тестовых примерах этим приемом пользовались до тех пор, пока не выполнялось условие оптимальности, а затем происходило переключение на точный алгоритм с двумя переменными состояния. Оказалось, что такая процедура сокращает время решения примерно в два раза.

В настоящее время на четырех заводах США, являющихся основными производителями автопокрышек, используется система производственного планирования и управления запасами; центральным «ядром» системы является расширенный вариант модели, описанной выше. Обобщения и вычислительные эксперименты описаны в работе [39].

5. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ДАНЦИГА — ВУЛФА

В данном разделе рассматривается метод решения задачи ЛП следующего вида:

$$\text{минимизировать } z = c_0x_0 + c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_p\mathbf{x}_p \tag{23}$$

при ограничениях

$$m \text{ связующих строк} \quad \{\mathbf{A}_0x_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p = \mathbf{b} \tag{24}$$

$$p \text{ блоков ограничений, каждый блок } \mathbf{B}_i \text{ состоит из } m_i \text{ строк} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_p\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p \end{array} \right. \tag{25}$$

$$\mathbf{x}_1 \geqslant 0,\ \mathbf{x}_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ \mathbf{x}_p \geqslant 0. \tag{26}$$

В разд. 3.4 и в книге [34] описываются условия, при которых могут возникнуть подобные задачи.

Задача, двойственная к данной, имеет блоки вдоль диагонали и связующие столбцы. Решение двойственной задачи легко получить, если известно решение прямой задачи. В силу этого обстоятельства методы решения задач со связующими строками можно применять для решения задач со связующими столбцами, и наоборот.

5.1. Алгоритм декомпозиции

Обозначим через $S_i = \{\mathbf{x}_i \mid \mathbf{B}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i,\ \mathbf{x}_i \geqslant 0\}$ множество всех допустимых решений i-го блока. Предположим, что S_i непусто и ограничено. Обозначим j-ю экстремальную точку множества S_i через $\mathbf{x}_i^j$. Тогда любой элемент $\mathbf{x}_i$ множества S_i может быть представлен в виде выпуклой комбинации $\mathbf{x}_i^j$:

$$\mathbf{x}_i = \sum_j \lambda_{ij}\mathbf{x}_i^j, \tag{27}$$

где весовые коэффициенты λ_{ij} удовлетворяют условию

$$\sum_j \lambda_{ij} = 1,\ \lambda_{ij} \geqslant 0. \tag{28}$$

Доказательство этого результата дано в работе [35]. Подставив выражение (27) в формулы (23) и (24) и добавив условие выпуклости (28), преобразуем ЛП-уравнения (23) — (25) в новую задачу ЛП, которую будем называть координирующей:

$$\text{минимизировать } z = \sum_{i,j} (\mathbf{c}_i\mathbf{x}_i^j)\,\lambda_{ij} \tag{29}$$

при ограничениях

$$\sum_{i,j} (\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i^j)\,\lambda_{ij} = \mathbf{b}, \tag{30}$$

$$\sum_j \lambda_{ij} = 1,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ \lambda_{ij} \geqslant 0. \tag{31}$$

Решение координирующей задачи (29) — (31) полностью эквивалентно решению исходной задачи (23) — (25). Вычислив оптимальные значения λ_{ij}, можно подставить их в уравнение (27) и получить в результате оптимальные значения исходных векторов $\mathbf{x}_i$.

В исходной задаче имеется $m + \sum_{i=1}^{p} m_i$ строк, что значительно больше числа строк координирующей задачи $(m + p)$, особенно если сумма $\sum_i m_i$ велика. Но для описания экстремальной точки каждого диагонального блока в координирующей задаче используется один столбец, а общее число столбцов может составлять сотни тысяч или даже миллионы. Вместо того чтобы заранее табулировать все столбцы, воспользуемся процедурой генерации столбцов, описанной в разд. 4, и будем формировать столбцы, а затем вводить их по мере надобности в базис. Покажем, как это делается. Рассмотрим характеристические разности $\bar{c}_{ij}$ для переменных λ_{ij}. Пусть в координирующей задаче получен допустимый базис $\mathbf{B}$. Обозначим через π двойственные переменные,

соответствующие этому базису для связующих строк (30), а через π_i — двойственную переменную для i-й строки (31). Тогда

$$\bar{c}_{ij} = \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i^j - \pi \mathbf{A} \mathbf{x}_i^j - \mu_i. \tag{32}$$

Для определения столбца, вводимого в базис, необходимо найти для каждого i

$$\min_j \bar{c}_{ij} = \min_j [(\mathbf{c}_i - \pi \mathbf{A}_i)\, \mathbf{x}_i^j] - \mu_i. \tag{33}$$

Напомним, что x_i^j — экстремальная точка множества S_i, и отметим, что уравнение (33) линейно относительно x_i^j. Поскольку линейный функционал всегда достигает оптимального значения в экстремальной точке непустого и ограниченного множества, то минимизацию (33) можно заменить решением следующей подзадачи:

минимизировать $(\mathbf{c}_i - \pi A_i)\mathbf{x}_i$ (34)

при ограничениях

$$\mathbf{B}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{x}_i \geqslant 0. \tag{35}$$

Чтобы найти столбец, для которого получается минимальное значение $\bar{c}_{ij}$ при данном i, необходимо решить подзадачу (34) — (35), т. е. определить оптимальное значение целевой функции z_i^* и вектор $\mathbf{x}_i^*$, а затем вычислить

$$\min_j \bar{c}_{ij} = z_i^* - \mu_i. \tag{36}$$

Если $\min_j \bar{c}_{ij} < 0$, то введение в базис столбца, полученного на основе x_i^*, приведет к уменьшению целевой функции (за исключением случаев вырожденности). Если же $\min_j c_{ij} \geqslant 0$ для всех i, то текущее решение координирующей задачи оптимально.

Вообще алгоритм декомпозиции Данцига — Вулфа представляет собой итеративную процедуру, которая состоит из последовательного решения координирующей задачи (29) — (31) и подзадач (34) — (35). Сформировав исходный допустимый базис координирующей задачи, получаем двойственные переменные π, которые используем для получения целевой функции подзадач. Решение подзадач порождает новые столбцы для координирующей задачи. Включив полученные столбцы в условия координирующей задачи, получим новый базис и новые двойственные переменные, с которыми вновь повторяем процедуру. Поскольку описанный процесс является симплексным алгоритмом, то он за конечное число итераций сходится к оптимальному решению, если приняты соответствующие меры предосторожности, чтобы избежать зацикливания.

Отметим, что координирующая задача имеет структуру ООС благодаря наличию строк вида (31), поэтому она может быть решена алгоритмом ООС, изложенным в разд. 3.

5.2. Экономическая интерпретация

В рассматриваемом алгоритме декомпозиции осуществляется координация решения подзадач с помощью системы цен. Двойственные переменные — π представляют собой так называемые теневые цены на дефицитные ресурсы (см. гл. II-1, разд. 5). Если целевой функцией является некоторая стоимость, выраженная в долларах, то π_i — стоимость (в долларах) единицы i-го ресурса. Целевая функция i-й подзадачи [см. (34)] является суммой двух членов. Слагаемое $c_i x_i$ представляет прямые издержки использования технологического процесса с интенсивностью x_i, а величина $-\pi \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i$ является произведением вектора цен $-\pi$ и вектора использованных ресурсов $\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i$. Второе слагаемое описывает плату подсистемы за использование дефицитных ресурсов. Увеличение цен π_i на дефицитные ресурсы и уменьшение цен на ресурсы, которые имеются в большом количестве, приводят к тому, что решениями подзадач будут такие вектор-столбцы, которые можно включить в общий оптимальный план.

5.3. Вычисления

Результаты вычислительных экспериментов по проверке метода Данцига — Вулфа имеют противоречивый характер. Во многих работах [4, 39] отмечается медленная сходимость метода вблизи оптимального решения; один из примеров можно найти в разд. 4.2 (рис. 1). В других работах, например в [10], приводятся более обнадеживающие результаты. Поведение алгоритма зависит как от решаемой задачи (в основном неизвестным образом), так и от выбранной стратегии решения. Поскольку в методе используется генерация столбцов, к нему применимы рассуждения разд. 4. Можно использовать различные стратегии, комбинируя полное или частное решение подзадач и решение некоторых или всех подзадач на одной итерации. Основываясь на результатах, изложенных в разд. 4.1, 4.2, можно рекомендовать находить решения всех подзадач по крайней мере вблизи оптимума. Естественно, возникает вопрос: сколько подзадач следует решать на каждом цикле? Ответ на него, вероятно, зависит от конкретных процедур управления данными. Если данные подзадач не хранятся в оперативной памяти, для пересылки их в оперативную память ЭВМ потребуется время. Поэтому в каждом цикле имеет смысл решать меньше подзадач и генерировать столько столбцов, сколько их должно быть вблизи оптимального решения. Если вся информа-

ция хранится в оперативной памяти ЭВМ или подзадачи имеют много общих данных, то, вероятно, лучше решать все подзадачи, а затем все полученные столбцы вводить в качестве небазисных в ограниченную координирующую задачу ЛП, которая в свою очередь решается полностью. Такой подход обсуждался в разд. 4. 3 и является иллюстрацией метода многократного оценивания (см. разд. 2.4). Если на некоторой итерации все подзадачи решены, то легко вычислить нижнюю границу оптимального значения целевой функции:

$$z^0 \geqslant z_B + \sum_{i=1}^{p} (\min_j \bar{c}_{ij}),$$

где z^0 и z_B — оптимальное и текущее значения целевой функции соответственно, а $\min_j c_{ij}$ находится из уравнения (33) [29]. Эту оценку можно использовать для останова алгоритма вблизи оптимального решения.

Как и в любых методах ЛП, быстрая сходимость данного алгоритма может сильно зависеть от хорошего начального решения, которое обычно имеется, если задача является вариантом уже решенных задач. Если начальное решение неизвестно, целесообразно начать с решения подзадач, задавая $\pi = 0$. Если полученные решения удовлетворяют связующим ограничениям, то они оптимальны. В противном случае нужно использовать эти решения в первой фазе процедуры, добавив к ним соответствующие дополнительные и искусственные переменные. Будем понимать под «невязкой» степень невыполнения конкретных связующих ограничений при использовании начального решения подзадач. Эти «невязки» являются некоторой мерой того, насколько трудно решить данную задачу.

Хорошее начальное решение можно получить, если известно хорошее приближение к значению оптимального вектора π. Проще всего использовать это приближение в целевых функциях подзадач, а из полученных решений сформировать столбцы для матрицы условий координирующей задачи. Интересно отметить, что если оптимальный вектор π известен точно, то можно найти оптимальное решение координирующей задачи, не проводя итерационного процесса. Для этого при известном π нужно найти оптимальные решения всех подзадач и, таким образом, получить все альтернативные оптимальные решения. Последнее существенно, поскольку некоторые подзадачи могут иметь вырожденный оптимум, т. е. несколько экстремальных точек множества S_i соответствуют оптимальному значению функционала подзадачи. Получив такие решения подзадач, нужно сформировать условия координирующей задачи, результирующее решение которой будет оптимальным.

5.4. Физическая интерпретация координирующей задачи

Во многих приложениях координирующую задачу можно рассматривать как экономически легко интерпретируемую альтернативу исходной задачи. В качестве примера рассмотрим задачу о многопродуктовом потоке в сети. Эту задачу можно сформулировать с использованием понятий дуг и узлов; тогда ее переменными будут потоки вдоль дуг. В работе [47] доказано, что если к такой задаче применить метод декомпозиции, то координирующая задача будет многопродуктовой задачей, сформулированной подобным образом. Переменными в координирующей задаче являются потоки товаров вдоль конкретных путей, соединяющих источники и стоки. В работе [40] приводится другой пример: задача о морских перевозках. В исходной постановке задачи переменными являются количества рейсов каждого судна между каждой парой источник — сток. В координирующей задаче переменными являются числа рейсов, совершаемых каждым судном вдоль каждого простого цикла графа. В работе [26] рассматривается задача о диете; столбцами в координирующей задаче являются рецепты конкретной диеты, а значения переменных показывают, как часто используется тот или иной рецепт.

5.5. Метод декомпозиции в нелинейных подзадачах

Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать} \sum_{i=1}^{p} f_i(\mathbf{x}_i)$$

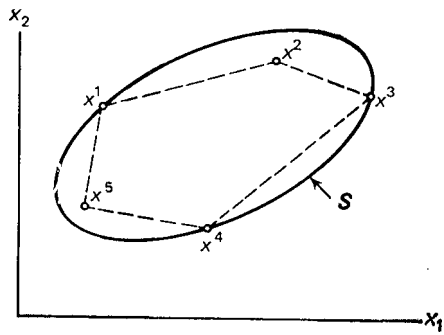
при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{p} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i = b, \quad \mathbf{x}_i \in S_i, \ i = 1, 2, \ldots, p,$$

где f_i — выпуклые функции вектора x_i, а S_i — выпуклое множество. Сформулированная задача является обобщением на нелинейный случай задачи (23) — (25). Пусть $\{x_i^j\}$ — множество точек, образующих сетку в S_i. Поскольку множество S_i выпукло, то внутри него будут лежать все точки, заданные следующей системой уравнений:

$$x = \sum_j \lambda_{ij} x_i^j, \quad \sum_j \lambda_{ij} = 1, \quad \lambda_{ij} \geqslant 0. \tag{37}$$

Множество всех точек, удовлетворяющих (37), является выпуклой оболочкой множества узловых точек $\{x_i^j\}$. В работе [13] такая выпуклая оболочка названа внутренней линеаризацией множества S_i. Пример линеаризации приведен ниже.



Кусочно-линейная аппроксимация функций f_i [29] для такой внутренней линеаризации имеет вид

$$f_i(\mathbf{x}_i) = \sum_j \lambda_{ij} f_i(x_i^j). \tag{38}$$

Подставив формулы (37) и (38) в исходную задачу, получим линейную координирующую задачу, аналогичную задаче (29) — (34), где функция $f_i(x_i^j)$ заменена на $\mathbf{c}_i\mathbf{x}_i^j$. Полученную задачу можно решить методом генерации столбцов. Подзадачи представляют собой задачи выпуклого программирования следующего вида:

$$\text{минимизировать} \quad f_i(\mathbf{x}_i) - \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i$$

$$\text{при ограничениях} \quad \mathbf{x}_i \in S_i.$$

Решения этих подзадач используются для формирования столбцов в матрице условий координирующей задачи. Итерации алгоритма точно такие же, как и в линейном случае.

В нелинейном случае алгоритм декомпозиции не сходится за конечное число шагов. Дело в том, что если множество S_i не является многогранником, то сетка с конечным числом узлов не может точно описать все это множество. Кроме того, если функции f_i не являются кусочно-линейными, то формула (38) является только некоторым приближением к исходной функции f_i. В работе [7] доказано, что рассмотренный алгоритм сходится к оптимальному решению исходной задачи, когда число итераций стремится к бесконечности. Далее, при выполнении условий выпуклости S_i все промежуточные решения являются допустимыми в исходной задаче. Если одно из множеств S_i невыпукло, то промежуточные решения могут оказаться недопустимыми, поскольку внутренняя линеаризация может выйти за границы множества S_i. Даже если окончательное решение допустимо, оно может оказаться локальным, а не глобальным оптимумом. Приведенные замечания справедливы, если одна из функций f_i невыпукла.

В работе [22] приведено решение данным методом задачи планирования использования водных ресурсов, в которой не выполняются условия выпуклости.

5.6. Современное состояние метода декомпозиции Данцига — Вулфа

Интерес к методу декомпозиции Данцига — Вулфа, привлекавшему особенно большое внимание в середине 60-х годов, за последние 6—7 лет заметно ослаб. В настоящее время, по мнению автора, это объясняется тем, что метод практически не применяется, а те несколько коммерческих программ, которые были созданы в 60-е годы, не находят сбыта. Такая ситуация сложилась из-за нестабильности вычислительных свойств алгоритма и частично в связи с появлением мультипликативной формы симплекс-метода и МООС, которые позволяют решать задачи очень большой размерности. Кроме того, для того чтобы решить методом Данцига — Вулфа реальную большую задачу, необходима сложная система программ, что препятствует использованию метода. Эти проблемы подробно обсуждаются в книге [45].

5.7. Алгоритм BOXSTEP

В работе [43] предложена процедура, названная BOXSTEP, которая улучшает сходимость метода декомпозиции Данцига — Вулфа и связанных с ним алгоритмов. В процедуре BOXSTEP центральной проблемой является решение задачи, двойственной по отношению к координирующей задаче (29)—(31). Выбирается исходный вектор двойственных переменных π_0, а затем на все двойственные переменные π накладываются ограничения, которые образуют параллелепипед с центром в π_0. Такой ограниченной двойственной задаче будет соответствовать новая координирующая задача, аналогичная исходной, но содержащая дополнительные и слабые переменные в каждой строке, кроме строк, задающих условие выпуклости. При решении новой координирующей задачи получаются другие λ^*, π^*. Если π^* — внутренняя точка параллелепипеда, то решение оптимально. Если π^* лежит на границе, то строится новый параллелепипед с центром в π^*, и процедура повторяется. Описанная процедура позволяет находить решение приблизительно в 1,5—2 раза быстрее, чем стандартный метод Данцига — Вулфа (который соответствует одному решению при очень большом параллелепипеде). В тестовых примерах использовались параллелепипеды очень малых и очень больших размеров; наилучшие результаты получались при параллелепипеде средних размеров. Успех процедуры объясняется, видимо,

тем, что она ограничивает большие флуктуации в значениях переменных x. Такая идея может быть с успехом использована в самых различных алгоритмах.

6. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В настоящее время нелинейные модели большой размерности не применяются так широко, как линейные модели. Однако в этой области наметился определенный прогресс. В тех организациях, где линейное программирование использовалось очень широко, пришли к выводу о необходимости анализа нелинейных задач, поскольку математическое программирование охватывает более широкий круг проблем, чем линейное программирование. В химической промышленности большие нелинейные модели планирования используются для изучения распределения дефицитного сырья по различным производственным линиям [46]. Нелинейные соотношения применяются при описании процесса превращения исходного сырья в готовые продукты. В нефтяной промышленности нелинейные модели с разделением по временным интервалам используются для поиска оптимального режима эксплуатации месторождений нефти или газа. В задачах о смешивании веществ нелинейной является зависимость некоторых свойств конечного продукта от величины различных добавок (например, октанового числа бензина от количества свинца).

Ниже рассматриваются два наиболее известных алгоритма решения нелинейных задач большой размерности: алгоритм сепарабельного программирования [38] и метод касательных [19]. Линеаризация условий исходной задачи является основой обоих алгоритмов, что позволяет использовать существующие программы решения задач линейного программирования.

6.1. Сепарабельное программирование

Функция называется сепарабельной, если ее можно представить в следующем виде:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j).$$

Сепарабельное программирование применяется для решения задач, в которых все нелинейные функции сепарабельны. Для каждой переменной x_j, которая является аргументом нелинейной функции, выбирается множество узловых точек $\{x_j^k\}_{k=1}^{n_j}$. Затем каждая нелинейная функция f_{ij} аппроксимируется кусочно-линейной функ-

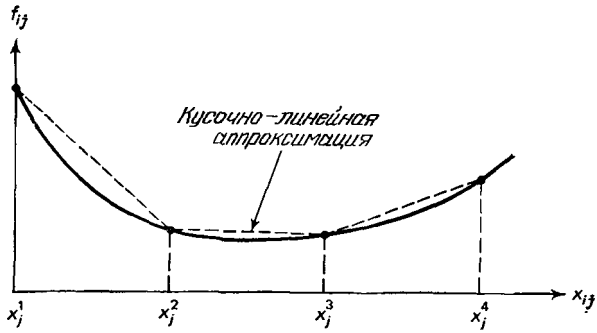


Рис. 2. Кусочно-линейная аппроксимация.

цией, которая имеет изломы в узловых точках сетки:

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{jk} f_{ij}(x_j^k), \text{ где} \tag{39}$$

$$\sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{jk} = 1, \quad \lambda_{jk} \geqslant 0. \tag{40}$$

Эта идея, которую хорошо иллюстрирует рис. 2, использовалась в разд. 5.5.

Некоторую исходную сепарабельную задачу нелинейного программирования можно свести к задаче линейного программирования, если в исходной задаче заменить все нелинейные функции f_{ij} их аппроксимациями (39) и добавить формулы (40) к исходным ограничениям. Получится задача, в которой переменные λ_{jk} должны удовлетворять следующим условиям: для каждого j не более двух λ_{jk} могут быть больше нуля, причем у положительных переменных индексы принимают значения k и $k+1$. Только выполнение этих условий гарантирует, что осуществляется линейная интерполяция между соседними узлами сетки, например x_j^2 и x_j^3 на рис. 2, а не между x_j^1 и x_j^3. Как показано в книге [38], оптимальное решение аппроксимирующей задачи линейного программирования обладает указанным свойством, если нелинейные функции f_{ij} выпуклы. Кроме того, решение задачи линейного программирования позволит найти глобальный оптимум линеаризованной задачи. В противном случае придется использовать метод ветвей и границ, либо глобальный оптимум вообще не удастся найти. В работе [12] приводятся сведения о таких процедурах.

Сепарабельное программирование используется во многих коммерческих ЛП-программах. Оно позволяет эффективно решать задачи, в которых основные ограничения линейны и имеется несколько выпуклых сепарабельных нелинейных ограничений.

Существуют программы, с помощью которых решаются задачи очень большой размерности такого типа, когда в условиях задач содержатся тысячи строк и несколько тысяч столбцов.

6.2. Метод касательных

Методом касательных назван алгоритм [19] для решения задач нелинейного программирования, использующий ЛП-процедуру как подпрограмму. Метод позволяет рассматривать нелинейные функции общего вида. Пусть требуется минимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + g_0(y)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + g_i(y) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где x_j — линейные переменные, $\mathbf{y}$ — m-мерный вектор нелинейных переменных, а g_i — нелинейные функции. На все переменные могут быть наложены ограничения сверху и снизу.

Предположим, что задан некоторый исходный базисный вектор $\mathbf{y}_0$. Линеаризуем каждую функцию g_i в точке y_0

$$g_i(\mathbf{y}) \triangleq g_i(\mathbf{y}_0) + \nabla g_i^T(\mathbf{y}_0)\, \Delta \mathbf{y}; \tag{41}$$

здесь $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ и ∇g_i — вектор градиента g_i. Исходную задачу можно свести к задаче линейного программирования, если заменить все g_i их линейной аппроксимацией (41). Очевидно, что аппроксимирующие функции хорошо описывают поведение только тех $\mathbf{y}$, которые находятся в непосредственной близости к $\mathbf{y}_0$; поэтому следует наложить на вектор $\Delta\mathbf{y}$ ограничения сверху и снизу: $-\varepsilon \leqslant \Delta y_i \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Ограничения совместно с линеаризованными функциями g_i порождают промежуточную задачу линейного программирования. Затем находится $\Delta\mathbf{y}^*$ — оптимальное решение задачи ЛП, вычисляется новый базисный вектор $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}^*$, в базисной точке $\mathbf{y}_1$ определяются новые вектор-градиенты ∇g_i. В случае необходимости величина ε может быть уменьшена, после чего алгоритм повторяется. Данная процедура напоминает алгоритм BOXSTEP (разд. 5.7).

С геометрической точки зрения этот алгоритм означает, что нелинейную задачу можно в некоторой малой окрестности базисной точки заменить линейным приближением. Линеаризованная задача решается при условии, что вектор $\mathbf{y}$ лежит внутри гиперкуба со стороной 2ε и центром, расположенным в базисной точке. В ряде случаев полученное решение может оказаться недопустимым, если ε выбрано слишком большим. Величину ε можно уменьшить сразу же при вычислении очередного базисного вектора.

Однако эту операцию можно отложить на конец вычислительной процедуры. На заключительной фазе текущие решения колеблются в непосредственной близости от оптимального. Такие колебания можно погасить, уменьшая ε до тех пор, пока разность решений на двух соседних итерациях не достигнет заданной величины погрешности.

В настоящее время существует немного действующих программ, которые используют метод касательных. Однако некоторые исследователи создают свои собственные программы [6]. Каждый, кто имеет доступ к ЛП-программам, может составить программу по методу касательных, для чего необходимо сформировать соответствующие матрицы ЛП на основе промежуточных результатов, указать способ регулировки величины ε, а затем создать единую логическую схему использования всех процедур. В результате получится программа, позволяющая решать задачи очень большой размерности, поскольку ее возможности ограничены только ЛП-подпрограммой. Если же задача в основном линейна, то можно надеяться решить ее эффективно.

При реализации метода основные трудности связаны с выбором величины ε. Важно определить приемлемое начальное значение ε, а также способ уменьшения ε, который влияет на скорость сходимости метода. Реализация метода может потребовать достаточно сложной логической схемы, создание которой позволит успешно решать разнообразные задачи. Конечно, найденное оптимальное решение может оказаться локальным оптимумом, что возможно при любом методе решения.

В работе [6] приведены результаты вычислений на ЭВМ методом касательных. Было решено последовательно несколько задач ЛП. Оказалось, что при решении первой задачи ЛП может потребоваться много итераций симплекс-метода; для последующих задач ЛП число таких итераций намного меньше, причем оно уменьшается по мере приближения к оптимуму. Это происходит, вероятно, потому, что основная масса линейных переменных на первой же итерации достигает своих оптимальных значений или близка к ним, а на последующих итерациях малая доля нелинейных членов вносит лишь небольшие поправки в исходное решение. После работы [6] появился ряд статей, в которых предлагаются различные приемы ускорения сходимости метода касательных. Подробнее эти вопросы изложены в работе [4].

7. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

Обзор современного состояния и новых направлений исследований позволяет утверждать, что методы решения задач большой размерности будут развиваться. Будет продолжаться работа по дальнейшему усовершенствованию программ для решения задач

линейного программирования и задач смешанного целочисленного программирования (СЦП); необходимо уменьшить время счета, научиться решать задачи еще большей размерности, повысить показатели использования памяти. Некоторые улучшения будут получены благодаря дальнейшему развитию принципов использования сверхразреженности матриц и метода LU-разложения, обсуждавшихся выше. Прогрессу будут способствовать разработка более совершенных процедур метода ветвей и границ для задач СЦП, а также улучшение характеристик самих ЭВМ и систем программного обеспечения. Интересно отметить, что в работе [48] предсказывается дальнейшее развитие управляющих языков и процедур обработки данных в системах ЛП-программ. Предполагается, что скоро появится возможность использования системы ЛП многократно внутри некоторого цикла, как в методе касательных (разд. 6), и что решение задач будет происходить в интерактивном (человеко-машинном) режиме с помощью терминалов. Это имеет место в системе, разработанной недавно Орчард-Хейсом и другими учеными в Computer Research Center of the National Bureau of Economic Research, Cambridge, Massachusetts. В целях широкого использования следует создавать системы, которые на основе имеющейся базы данных позволяли бы строить ЛП-матрицу, решать задачу и выдавали бы решение в удобном виде. Все исходные данные и результаты вычислений должны быть понятны пользователю системы.

В работе [18] приводится один из последних наиболее удачных примеров использования процедур ЛП и СЦП, а именно для решения сетевых задач большой размерности. Это исследование показало, что задачи с сотнями тысяч узлов и (или) дуг можно решать с помощью симплекс-метода, если воспользоваться древовидной структурой базисной матрицы ЛП. Оказалось, что при этом решение получается быстрее, чем с помощью самых эффективных сетевых алгоритмов. Программы с такими возможностями были созданы на основе анализа ЭВМ (например, при выборе структуры данных и процедур обработки списков), а также путем выбора подходящего алгоритма и его эффективного использования, как, например, симплекс-метода в описанном примере. Дальнейшие успехи в области программирования задач большой размерности будут возможны только при учете факторов, которые явились основой последних достижений в данной области.

Практическое использование моделей НЛП и СЦП должно возрасти. В работе [14] описано интересное применение целочисленного программирования для анализа и синтеза систем распределения ресурсов. При решении учитывалась специальная структура условий задачи и использовался метод декомпозиции Бендерса. По сравнению с универсальными программами целочисленного программирования предложенная процедура позволяет ре-

шать задачи значительно большей размерности. Следует отметить, что в последние годы возможности универсальных программ СЦП заметно возросли, и такая тенденция сохранится в обозримом будущем. В настоящее время почти все фирмы, производящие ЭВМ, предлагают программы СЦП, что способствует применению моделей СЦП. В работе [1] показано, что, применяя соответствующим образом метод обобщенных градиентов, можно решить самые разнообразные задачи НЛП значительных размеров. Возможности использования этого и других алгоритмов для решения задач большой размерности рассмотрены в работе [41]. Предполагается, что широкое использование программ, позволяющих решать разнообразные задачи НЛП большой размерности, начнется в ближайшие 2—3 года.

В заключение следует отметить, что для дальнейшего прогресса в таких областях, как СЦП и НЛП, необходимо проводить проверку и сравнение многих предлагаемых методов, поскольку не существует единственного идеального алгоритма. С этой целью, а также для разработки алгоритмов и соответствующего программного обеспечения Данциг [9] предложил создать лаборатории оптимизации систем и стал организатором первой из них в Стэнфордском университете. Такие лаборатории будут проводить сбор тестовых задач и программ реализации алгоритмов, формулирование критериев использования программ и публикацию проверенных результатов. Создание и практическая реализация алгоритмов немыслимы без дальнейших теоретических и практических разработок. Проверка таких алгоритмов является важной экспериментальной задачей. Работа лабораторий оптимизации систем должна способствовать развитию искусства математического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abadie J., Application of the GRG Algorithm to Optimal Control Problems, 191—211, in Nonlinear and Integer Programming, J. Abadie, Ed., North-Holland, Amsterdam, 1974.
2. Balinski M. L., Integer Programming, Methods, Uses, Computation, *Management Sci.*, 12, 253—313 (1965).
3. Bartels R. H., Golub G. H., The Simplex Method of Linear Programming using LU Decomposition, *Communications ACM*, 12, 266—268, 275—278 (1969).
4. Beale E. M. L., A Conjugate Gradient Method of Approximation Programming, in Optimization Methods, R. W. Cottle and J. Krarup, Eds., English Universities Press, London, 1974.
5. Beale E. M. L., Hughes P. A. B., Small R. E., Experiences in using a Decomposition Program, *Computer J.*, 8, 13—18 (1965).
6. Busby B., Techniques and Experience Solving Really Big Non-Linear Programs, in Optimization Methods, R. W. Cottle and J. Krarup, Eds., English Universities Press, London, 1974.

7. Dantzig G. B., Linear Programming and Extensions, Chaps. 22, 24, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963. [Имеется перевод: Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его обобщение и применение.— М.: Прогресс, 1966.]
8. Dantzig G. B., Van Slyke R. M., Generalized Upper Bounding Techniques, *J. Computer System Sci.*, 1, 213—226 (1967).
9. Dantzig G. B., On the Need for a Systems Optimization Laboratory, in Optimization Methods for Resources Allocation, R. W. Cottle and J. Krarup, Eds., English Universities Press, London, 1974.
10. Dzielinski B. P., Gomory R. E., Optimal Programming of Lot Sizes, Inventory and Labor Allocations, *Management Sci.*, 11, 874—890 (1965).
11. Forrest J. J. H., Tomlin J. A., Updated Triangular Factors of the Basis to Maintain Sparsity in the Product Form Simplex Method, *Math. Prog.*, 2, 263—278 (1972).
12. Forrest J. J. H. et al., Practical Solution of Large Mixed Integer Programming Problems with Umpire, *Management Sci.*, 20, 736—774 (1974).
13. Geoffrion A., Elements of Large-Scale Mathematical Programming, *Management Sci.*, 16, 652—691 (1970).
14. Geoffrion A., Graves G. W., Multicommodity Distribution Center Design by Benders Decomposition, *Management Sci.*, 20, 822—845 (1974).
15. Gilmore P. C., Gomory R. E., A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, *Operations Res.*, 9, 849—859 (1961).
16. Gilmore P. C., Gomory R. E., A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem-Part II, *Operations Res.*, 11, 863—887 (1963).
17. Gilmore P. C., Gomory R. E., Multistage Cutting Stock Problems of Two or More Dimensions, *Operations Res.*, 13, 94—120 (1965).
18. Glover F., Karney D., Klingman D., Implementation and Computational Study on Start Procedures and Basis Change Criteria for a Primal Network Code, *Networks*, 20, 191—212 (1974).
19. Griffith R. E., Stewart R. A., A Nonlinear Programming Technique for the Optimization of Continuous Processing Systems, *Management Sci.*, 7, 379—392 (1961).
20. Grigoriadis M. D., Unified Pivoting Procedures for Large Structured Systems and Programs, in Decomposition of Large Scale Problems, D. Himmelblau (Ed.), North-Holland/American Elsevier, 1973.
21. Hadley G., Nonlinear and Dynamic Programming, Chapter 4, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964. [Имеется перевод: Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование.— М.: Мир, 1967.]
22. Hall W. A., Dracup J. A., Water Resources Systems Engineering, Chapter 7, McGraw-Hill, New York, 1970.
23. Hartman J., Lasdon L. S., A Generalized Upper Bounding Method for Doubly Coupled Linear Programs, *Nav. Res. Log. Quart.*, 17, 411—429 (1970).
24. Hellerman E., Rarick D., Reinversion with the Preassigned Pivot Procedure, *Math. Prog.*, 1, 195—216 (1971).
25. Hirshfeld D., Mathematical Programming Development at Management Science System, Inc., Presented at SHARE 38, March 1972.
26. Jennergen P., A Note on the Interpretation of the Extremal Problem of the Dantzig-Wolfe Decomposition Algorithm in a Particular Case, *Zeitsehrift für Operations Res.*, 17, 69—73 (1973).
27. Kalan J., Aspects of Large-Scale In-Core Linear Programming, ACM Proceedings of Annual Conference, 304—313 (1971).
28. Lasdon L. S., Waren A. D., Jain A., Ratner M., Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Optimization, Tech. Memo. No. 353, Operations Research Department, Case Western Reserve University, 1975.

29. Lasdon L. S., Optimization Theory for Large Systems, Sec. 6.2, Macmillan, New York, 1970.
30. Lasdon L. S., там же, Sec. 6.4.
31. Lasdon L. S., там же, p. 173.
32. Lasdon L. S., там же, Sec. 6.5.
33. Lasdon L. S., там же, Chap. 5.
34. Lasdon L. S., там же, Sec. 2.5.
35. Lasdon L. S., там же, Chap. 3.
36. Lasdon L. S., там же, Sec. 4.1.
37. Lasdon L. S., там же, Sec. 4.4.2.
38. Lasdon L. S., там же, Sec. 4.4.
39. Lasdon L. S., Terjung R., An Efficient Algorithm for Multi-Item Scheduling, *Operations Res.*, 19, 946—969 (1971).
40. Lasdon L. S., Decomposition of a Ship-Routing Problem, in Decomposition of Large Scale Problems, D. Himmelblau (Ed.), North-Holland/American Elsevier, 1973.
41. Lasdon L. S., Generalized Upper Bounding Methods in Production Scheduling and Distribution, in Optimization Methods for Resource Allocation, R. W. Cottle, J. Krarup, Eds., English Universities Press, London, 1974.
42. Manne A. S., Programming of Economic Lot Sizes, *Management Sci.*, 14, 115—135 (1958).
43. Marsten R. E., Hogan W. W., Blankenship J. W., The BOXSTEP Method for Large Scale Optimization, Working Paper No. 660—73, Alfred P. Sloan School of Management, Massachusetts, 1973.
44. Mesarovic M. D., Macko D., Takahara Y., Theory of Multi-Level Hierarchical Systems, Academic Press, New York, 1970.
45. Orchard-Hays, Wm., On the Proper Use of a Powerful MPS, in Optimization Methods for Resource Allocation, R. W. Cottle and J. Krarup, Eds., English Universities Press, London, 1974.
46. Prabhakar T., Large Scale Mathematical Programming, A Case Study, ORSA-TIMS Joint National Meeting, Boston, Massachusetts, April 22—24, 1974.
47. Tomlin J., Minimum-Cost Multicommodity Network Flows, *Operations Res.*, 14, 45—51 (1966).
48. White W., A Status Report on Computing Algorithms for Mathematical Programming, *Computing Surveys*, 5, 135—166 (1973).

II-8. Оптимальное управление

Г. Саган[1)]

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории оптимального управления (ОУ) в общем случае рассматриваются системы, на поведение которых можно воздействовать (которыми можно управлять) путем изменения параметров управления. Последние выбираются с учетом определенных ограничений. Целью теории оптимального управления является разработка метода такого выбора параметров управления, при котором достигается оптимум некоторого функционала, например минимум времени, минимальный расход топлива, минимальные потери, максимум полезности и т. д.

Задачи такого типа возникают не только при изучении современной технологии, где отдельные процессы чрезвычайно сложные и детально разработаны, но и при исследовании вопросов, связанных с процессами производства: проблемы экономического роста, производственное планирование, ценообразование, анализ производственных ресурсов, управление запасами [1, 3, 8, 19, 22, 32].

В этой главе будут рассматриваться только объекты, состояние которых $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ в момент t может быть описано системой из n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t)), \tag{1}$$

где $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$ — вектор параметров управления в момент t, вектор-функция $\mathbf{f}$ имеет компоненты $\phi_1, \phi_2, \ldots$ $\ldots, \phi_n$. Как известно из практики, в общем случае величины параметров управления нельзя выбирать произвольно, а только в соответствии с некоторым ограничением:

$$\mathbf{u}(t) \in U \text{ при всех } t, \tag{2}$$

где $U \subset R^m$. В дальнейшем будем называть подмножество U *областью управления*.

Задача состоит в том, чтобы выбрать вектор параметров управления $\mathbf{u}$, удовлетворяющий ограничению (2) и такой, что соответствующее решение уравнения (1) $\mathbf{x}(t)$ (траектория процесса) из заданного *начального состояния*

$$\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\theta} \tag{3}$$

[1)] **Hans Sagan, North Carolina State University.**

попало бы в заданное *конечное состояние*

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^T \tag{4}$$

в некоторый, не обязательно фиксированный момент $T > 0$, а при этом функционал

$$\int_0^T \phi_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt \tag{5}$$

достиг бы своего наименьшего (или наибольшего) возможного значения. [Заметим, что специальный выбор начального состояния не приводит к потери общности, так как преобразованием координат можно всегда получить уравнение (3).]

Управление, при котором функционал (5) достигает своего наименьшего (наибольшего) значения, называется *оптимальным управлением*, а соответствующая траектория $\mathbf{x}$ — *оптимальной траекторией*.

В следующих разделах рассмотрены различные необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять вектор оптимального управления для задачи (1) — (5) и связанных с ней задач. На $\mathbf{u}$ наложены определенные условия регулярности. Предполагается, что функция $\mathbf{u}$ либо кусочно-непрерывна на интервале, где она используется, либо же ограничена и измерима. Управление является *допустимым*, если $\mathbf{u}(t) \in U$ при всех $t \in [0, T]$ и, кроме того, $\mathbf{u}$ либо кусочно-непрерывна, либо ограничена и измерима. Будем говорить, что система (1) *управляема*, если существует вектор допустимого управления, который переводит систему из начального состояния θ в конечное состояние $\mathbf{x}^T$. Для управляемой системы траектория от θ до $\mathbf{x}^T$ кусочно-гладкая, если $\mathbf{u}$ либо кусочно-непрерывна и абсолютно непрерывна (и почти всюду дифференцируема), либо ограничена и измерима. Предполагается, что в первом случае уравнение (1) справедливо везде, за исключением точек, в которых $\mathbf{u}$ имеет разрыв (кусочно-непрерывная функция может иметь разрыв в нескольких точках), а во втором случае уравнение (1) выполняется почти всюду.

Во избежание чрезмерных сложностей везде предполагается, что ϕ_0 и $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ (компоненты вектора $\mathbf{f}$) имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным.

Если U совпадает со всем пространством R^m или является открытым подмножеством R^m, то задачу (1) — (5) можно сформулировать в виде задачи Лагранжа (см. разд. 2.2).

Задача (1) — (5) является так называемой *неавтономной задачей оптимального управления с незакрепленным временем*. Двумя наиболее известными случаями задачи (1) — (5) являются

задача об оптимальном быстродействии и неавтономная задача с закрепленным временем. В задаче о быстродействии $\phi_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1$ и функционал (5) имеет вид $T = \int_0^T dt$, т. е. необходимо минимизировать продолжительность процесса. Если функции $\phi_1, \ldots, \phi_n$ не зависят явным образом от времени, то возникает автономная задача о быстродействии.

Пример 1. (Одномерная задача о мягкой посадке.) Материальная точка единичной массы движется вдоль прямой под воздействием только внешней силы (управления) u; координату и скорость (состояние) точки обозначим как $(x(t), x'(t))$. Уравнение движения имеет вид

$$x'' = u(t).$$

При ограничении $|u(t)| \leqslant 1$ необходимо найти кусочно-непрерывную функцию управления u, при которой за минимальное время материальную точку можно перевести из состояния x^0, x'^0 в состояние покоя в начале координат, т. е. в состояние (0, 0). Положив $x = x_1$, $x' = x_2$, сформулируем задачу в следующем виде:

дано: $x_1' = x_2$, $x_2' = u$,

$$x_1(0) = x^0, \quad x_2(0) = x'^0, \quad x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0.$$

Требуется минимизировать функционал $T = \int_0^T dt$. Это автономная задача о быстродействии.

Неавтономная задача ОУ *с закрепленным временем* T_0 может быть сведена к автономной задаче с незакрепленным временем. Для обозначения времени t введем новую переменную состояния x_{n+1}:

$$x_{n+1}' = 1, \; x_{n+1}(0) = 0, \; x_{n+1}(T) = T_0.$$

Сделав соответствующую замену переменных, получим следующую автономную задачу с $(n+1)$ переменной состояния:

дано: $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(x_{n+1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t))$, $x_{n+1}' = 1$,

$$\mathbf{x}(0) = \theta, \quad x_{n+1}(0) = 0, \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^T, \quad x_{n+1}(T) = T_0;$$

требуется минимизировать функционал $\int_0^T \phi_0(x_{n+1}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\,dt$. С формальной точки зрения время окончания процесса не задано. На самом деле оно, конечно, определено и равно T_0, поскольку $x_{n+1}(0) = 0$, $x_{n+1}(T) = T_0$, $x_{n+1}' = 1$.

Пример 2. Найти кусочно-непрерывную функцию управления u, принимающую значения $u(t) \in (-\infty, \infty)$, такую, что

$$x_1' = u(t), \quad x_2' = tu(t),$$

и при которой можно перевести объект из начального состояния $(0, 0)$ в конечное состояние $x_1(1) = 0$, $x_2(1) = 1$, так чтобы $\int_0^1 u^2(t)\,dt$ принял наименьшее возможное значение. Поставленная задача является неавтономной задачей ОУ с закрепленным временем. Положив $x_3' = 1$, $x_3(0) = 0$, $x_3(T) = 1$, получим автономную задачу ОУ с незакрепленным временем:

дано: $x_1' = u(t)$, $x_2' = x_3 u(t)$, $x_3' = 1$,

начальное состояние $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, конечное состояние $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 1$, $x_3(T) = 1$; требуется минимизировать функционал $\int_0^T u^2(t)\,dt$. Неавтономные задачи с незакрепленным временем можно преобразовать в автономные задачи с подвижной конечной точкой. Этот вопрос будет рассмотрен в разд. 2.3.

В следующих разделах описываются необходимые и достаточные условия оптимальности вектора параметров управления $\mathbf{u}$. Мы не будем, однако, рассматривать прямые или программные методы. Несколько таких методов изложено в других разделах этой книги (см. гл. 1, 5—7 части II, гл. 9 части III и разд. 5 данной главы).

2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ

2.1. Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим автономную задачу оптимального управления с незакрепленным временем:

дано: $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t))$, (6)

$$\mathbf{x}(0) = \theta, \ \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^T; \tag{7}$$

требуется минимизировать функционал $\int_0^T \phi_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\,dt$ путем выбора вектора допустимого управления

$$\mathbf{u}(t), \text{ причем } \mathbf{u}(t) \in U \subseteq R^m.$$

Чтобы эффективно и сжато сформулировать необходимые условия оптимальности вектора параметров управления, рассмотрим следующую (сопряженную) систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для дополнительных

переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$p_i' = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, p_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

и гамильтониан задачи ОУ

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = p_0\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{n} p_j\phi_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Используя эти переменные, можно сформулировать необходимые условия оптимальности, известные как принцип максимума Понтрягина [4, 10, 17, 29], который состоит в следующем.

Чтобы вектор параметров управления $\mathbf{u}$ *и соответствующая траектория* $\mathbf{x}$, *описываемая формулами* (6) *и* (7), *были оптимальными, необходимо, чтобы существовали решение* $\mathbf{p} = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$ *сопряженной системы* (8) *и константа* $p_0 \leqslant 0$, *такие, что* $(p_0, p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)) \neq 0$ *и*

$$H(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{v}) \leqslant H(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = 0 \tag{9}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in U$ *в «каждой точке»* $\mathbf{x}(t)$ *оптимальной траектории* $\mathbf{x}$, *где* $\mathbf{u}(t)$ — *вектор параметров управления.* В этой формулировке слова «в каждой точке» нужно понимать следующим образом: если функция $\mathbf{u}$ кусочно-непрерывна, то условие (9) справедливо в каждой точке, в которой $\mathbf{u}$ непрерывна. Если же $\mathbf{u}$ ограничена и измерима, то условие (9) должно быть справедливо почти всюду. В первом случае функция $\mathbf{p}$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывные производные, которые претерпевают разрыв (по крайней мере по одной из компонент) там, где нарушается условие непрерывности $\mathbf{u}$. Во втором случае $\mathbf{p}$ абсолютно непрерывна (и почти всюду дифференцируема).

Пример 3. (Одномерная задача о мягкой посадке.) Сопряженная система (8) для задачи из примера 1 будет иметь вид

$$p_1' = 0, \; p_2' = -p_1.$$

Решения системы: $p_1 = a$, $p_2 = -at + b$.
Гамильтониан системы:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, u) = p_0 + ax_2 + (b - at)\,u.$$

Поскольку $U = [-1, 1]$, то из принципа максимума Понтрягина получаем

$$u = 1, \text{ если } b - at > 0,$$
$$u = -1, \text{ если } b - at < 0.$$

Как легко видеть из предыдущего примера, переменную p_0 можно исключить из задач об оптимальном быстродействии.

Заменим (9) следующим условием: существует нетривиальное (невырожденное) решение $\mathbf{p}$ системы

$$p_i' = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} (\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t))\, p_j, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

такое, что при $p_0 \leqslant 0$ неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \phi_j (\mathbf{x}(t),\ \mathbf{v}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_j \phi_j (\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)) = -p_0 \tag{10}$$

имеет место для всех $\mathbf{v} \in U$ «в каждой точке» оптимальной траектории $\mathbf{x}$.

Для неавтономных задач с закрепленным временем непосредственно из принципа максимума следует, что должно существовать $\mathbf{p}$ — решение системы (8), такое, что для некоторой константы $p_0 \leqslant 0$, $(p_0,\ p_1(t),\ \ldots,\ p_n(t)) \neq (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\, \phi_j(t,\ \mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)) \geqslant \sum_{j=0}^{n} p_j(t)\, \phi_j(t,\ \mathbf{x}(t),\ \mathbf{v})$$

при всех $\mathbf{v} \in U$ в каждой точке оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$. (p_{n+1} появляется благодаря введению новой переменной состояния $t = x_{n+1}$.)

Пример 4. Для задачи из примера 2 получаем $p_1' = p_2' = 0$, и, следовательно, p_1, p_2 — постоянные. Таким образом,

$$\sum_{j=0}^{2} p_j \phi_j (t,\ \mathbf{x},\ u) = p_0 u^2 + (p_1 + p_2 t)\, u,$$

где $p_0 \leqslant 0$. Данная функция достигает максимума при $u = -\frac{1}{2p_0}(p_1 + p_2 t)$. При $p_0 = -\frac{1}{2}$, $p_1 = -6$, $p_2 = 12$ получаем следующую траекторию $\mathbf{x}$: $x_1(t) = -6t + 6t^2$, $x_2(t) = -3t^2 + 4t^3$. Функционал $\int_0^1 u^2(t)\, dt = 12$. В разд. 4.2 будет показано, что полученное значение функционала действительно наименьшее.

2.2. Уравнения Майера и условие Вейерштрасса

Задачу оптимального управления из разд. 1 можно рассматривать как задачу Лагранжа, если значения вектора оптимального управления $\mathbf{u}$ либо лежат внутри U, либо же U является открытым подмножеством R^m (или даже совпадает со всем пространством R^m). Так как любой участок оптимального управления является также оптимальным управлением, приведенные рассуж-

дения справедливы для тех участков $\mathbf{u}$, которые находятся внутри U.

Сформулируем задачу Лагранжа следующим образом: найти вектор-функцию $\mathbf{y}\,(y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_\mu(t))$, которая удовлетворяет недоопределенной системе из $n < \mu$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{F}\,(t,\ \mathbf{y},\ \mathbf{y}') = 0, \tag{11}$$

где $\mathbf{F}$ имеет компоненты $(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_n)$, с начальными условиями

$$\mathbf{y}\,(0) = \theta \tag{12}$$

и конечными условиями

$$\psi\,(T,\ y\,(T)) = 0 \tag{13}$$

в некоторый момент $T > 0$. Здесь компоненты ψ равны $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_k$. Функционал

$$\int_0^T \Phi_0\,(t,\ \mathbf{y}\,(t),\ \mathbf{y}'\,(t))\,dt \tag{14}$$

должен иметь минимально возможную величину, когда вектор $\mathbf{y}$ удовлетворяет условиям (11) — (13).

Предположим, что Φ_0, компоненты $\mathbf{F}$ и компоненты ψ имеют непрерывные частные производные по всем переменным. Кроме того, пусть

$$\text{Ранг}\ \left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y_i}\right) = k.$$

Тогда $\psi\,(t,\ \mathbf{y}) = 0$ определяет $(\mu + 1 - k)$-мерное многообразие в пространстве $(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_\mu)$. В частности, если уравнение (13) имеет специальный вид $y_i\,(T) = y_i^T$, где y_i^T заданы заранее $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \mu)$, то формула (13) описывает одномерное многообразие в пространстве $(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_\mu)$. (Конечная точка фиксирована, а время не закреплено.) Если задано также T, то формула (13) описывает 0-мерное многообразие (точку).

Введем в задаче ОУ (1), (3) — (5) (без ограничения $\mathbf{u}\,(t) \in U$) переменные

$$x_i = y_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ u_j = y_{j+n},\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ \mu - n = m;$$
$$\mathbf{f} - \mathbf{y}' = \mathbf{F},\ y\,(T) - \mathbf{y}^T = \psi\,(T,\ \mathbf{y}\,(T)),\ \ k = \mu. \tag{15}$$

Тогда получим задачу:

минимизировать функционал $\int_0^T \phi_0\,(t.\ \mathbf{y}\,(t),\ y'_{n+1}\,(t),\ \ldots$

$\ldots,\ y'_\mu\,(t))\,dt$

при условиях

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', y'_{n+1}, \ldots, y'_{\mu}) = 0,$$

$$\mathbf{y}(0) = 0, \quad \psi(T, \mathbf{y}(T)) = 0.$$

На самом деле это задача Лагранжа, если добавить начальные условия $y_{n+1}(0) = \ldots = y_{\mu}(0) = 0$. (Эти условия можно добавить без всякого ущерба, поскольку интерес представляют только $u_j(t) = y'_{j+n}(t)$.)

Следующие условия являются необходимыми для того, чтобы вектор $\mathbf{y}$ был решением задачи Лагранжа [5, 23, 29].

Если ранг $\partial\phi_j(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t))/\partial y_i = n$ *для всех точек оптимальной траектории* $\mathbf{y}(t)$, то существуют *константа* λ_0 *и векторная функция* $\lambda = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$, *не равные тождественно нулю* $(\lambda_0, \lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, *такие, что при*

$$h(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \Phi_j(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$$

уравнения Майера

$$\frac{d}{dt} h_{\mathbf{y}'}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \lambda(t)) = h_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \lambda(t)) \tag{16}$$

справедливы и существует вектор

$$(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n),$$

$$(\lambda_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) \neq (0, 0, 0, \ldots, 0),$$

такой, что условия трансверсальности

$$\sum_{j=1}^{k} \nu_j \psi_{jt}(T, \mathbf{y}(T)) = \lambda_0 \phi_0(T, \mathbf{y}(T), \mathbf{y}'(T)) - \\ - \sum_{j=1}^{\mu} h_{y'_j}(T, \mathbf{y}(T), \mathbf{y}'(T), \lambda(T)) y'_j(T) \tag{17}$$

и

$$\sum_{j=1}^{k} \nu_j \psi_{jy_i}(T, \mathbf{y}(T)) = h_{y'_i}(T, \mathbf{y}(T), \mathbf{y}'(T)), \quad i = 1, 2, \ldots, \mu, \tag{18}$$

удовлетворяются в конечный момент времени T. (Аналогичные условия должны выполняться и в том случае, когда начальное состояние принадлежит некоторому начальному многообразию.)

Если функция $\mathbf{y}$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывные производные, то функция λ кусочно-непрерывна и уравнение (16) справедливо везде, где $\mathbf{y}'$ непрерывна. Будем называть «изломом» траектории точку $(t_0, \mathbf{y}(t_0))$, в которой происходит «скачок» производной $\mathbf{y}'$, т. е. нарушается условие непрерывности производной. В каждой такой точке должны выполняться следующие

условия [5]:

$$h_{y'}(t_0,\ y(t_0),\ y'(t_0-0),\ \lambda(t_0-0)) = \\ = h_{y'}(t_0,\ y(t_0),\ y'(t_0+0),\ \lambda(t_0+0)), \tag{19}$$

$$\left(h - \sum_{i=1}^{\mu} y_i' h_{y_i'}\right)(t_0-0) = \left(h - \sum_{i=1}^{\mu} y_i' h_{y_i'}\right)(t_0+0).$$

Если y' ограничена и измерима, то функция y абсолютно непрерывна, а λ ограничена, измерима и непрерывна везде, где производная y' непрерывна.

Помимо соотношений (16) — (19) должно выполняться условие Вейерштрасса

$$\lambda_0(\Phi_0(t, y, \xi) - \Phi_0(t, y, y')) - \sum_{i=1}^{\mu} (\xi_i - y_i') h_{y_i'}(t,\ y,\ y',\ \lambda) \geqslant 0 \tag{20}$$

при $\lambda_0 \geqslant 0$ для каждого линейного элемента (t, y, y') оптимальной траектории, где y' непрерывна для всех линейных элементов $(t,\ y,\ \xi)$, для которых $\mathbf{F}(t,\ y,\ \xi) = 0$ [23].

Пример 5. В примере 2 областью управления U является вся действительная ось. Следовательно, задачу примера 2 можно сформулировать как задачу Лагранжа. Положив $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $u = y_3'$, получим систему уравнений

$$y_1' - y_3' = 0,$$
$$y_2' - ty_3' = 0;$$

граничные условия будут иметь вид $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$, $y_1(1) = 0$, $y_2(1) = 1$, $y_3(1)$ не задано. Требуется минимизировать $\int_0^1 y_3'^2(t)\,dt$.

При условии

$$h(t,\ y,\ y',\ \lambda) = \lambda_0 y_3'^2 + \lambda_1(y_1' - y_3') + \lambda_2(y_2' - ty_3')$$

будем иметь $h_{y_1} = h_{y_2} = h_{y_3} = 0$, $h_{y_1'} = \lambda_1$, $h_{y_2'} = \lambda_2$, $h_{y_3'} = 2\lambda_0 y_3' - \lambda_1 - t\lambda_2$, а из уравнения Майера (16) получим

$$\lambda_1 = \text{const},\quad \lambda_2 = \text{const},\quad 2\lambda_0 y_3' - \lambda_1 - t\lambda_2 = \text{const}.$$

Из уравнения (18) имеем $\nu_1 = \lambda_1$, $\nu_2 = \lambda_2$, $2\lambda_0 y_3'(1) - \lambda_1 - \lambda_3 = 0$; следовательно, $h_{y_3'} = 2\lambda_0 y_3' - \lambda_1 - t\lambda_2 = 0$ при всех $t \in [0, 1]$. Поэтому $y_3' = \frac{1}{2\lambda_0}(\lambda_1 + t\lambda_2)$. При $\lambda_0 = 1$ из уравнений задачи и граничных условий следует $\lambda_1 = -12$, $\lambda_2 = 24$. Так же как и в примере 4, получаем траекторию $y_1(t) = -6t + 6t^2$, $y_2(t) = -3t^2 + 4t^3$. Условие Вейерштрасса (20) имеет вид $(\xi_3 - y_3')^2 \geqslant 0$ и, очевидно, удовлетворяется при любом $\xi_3 \in (-\infty, \infty)$.

Для задачи оптимального управления (1) — (5) с открытой

областью управления уравнения Майера (16) и условие Вейерштрасса (20) могут быть получены из принципа максимума Понтрягина, сформулированного в разд. 2.1 [27, 29]. И наоборот, произведя подстановку (15) для задачи (1) — (5) с открытой областью управления, из уравнений (16) — (18), (20) можно получить условия (8), (9), и, кроме того, окажется, что вдоль оптимальной траектории должны выполняться равенства

$$H_{uj}(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

2.3. Задача оптимального управления с подвижной конечной точкой

Для формулировки задачи ОУ (6), (7) с подвижной конечной точкой потребуется новое граничное условие. Предварительно введем понятие многообразия конечных состояний $S(\mathbf{x})$ («терминального» многообразия), которое определяется уравнением

$$\psi(\mathbf{x}) = 0, \tag{21}$$

где ψ имеет компоненты $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$, $k < n$, частные производные функций ψ_j непрерывны, ранг $\partial\psi_j/\partial x_j = k$. В условиях (7) заменим равенство $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^T$ на $\mathbf{x}(T) \in S(\mathbf{x})$, т. е. будем искать вектор допустимого управления, который переводит фазовую точку $\mathbf{x}$ в некоторую точку $\tilde{\mathbf{x}}$ многообразия $S(\mathbf{x})$ ($\tilde{\mathbf{x}} \in S(\mathbf{x})$).

Для поставленной задачи к условиям, перечисленным в разд. 2.1, добавляется условие трансверсальности: *вектор* $(p_1(T), \ldots, p_n(T))$ *должен быть ортогонален многообразию* $S(\mathbf{x})$ (21) *в той точке* $\tilde{\mathbf{x}}$, *где фазовая точка* $\mathbf{x}(t)$ *достигает многообразия* $S(\mathbf{x})$ [27]. Неавтономную задачу ОУ с незакрепленным временем можно рассматривать как автономную задачу ОУ с подвижной конечной точкой, положив $t = x_{n+1}$. Тогда $x'_{n+1} = 1$, $x_{n+1}(0) = 0$ и получаем

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t)), \qquad x'_{n+1} = 1$$

при начальных условиях $\mathbf{x}(0) = 0$, $x_{n+1}(0) = 0$ и граничном условии, состоящем в том, что конец траектории лежит в многообразии $\mathbf{x} = \mathbf{x}^T$, которое является одномерным многообразием в пространстве $(x_1, x_2, \ldots x_{n+1})$ и имеет касательный вектор $(0, 0, \ldots, 0, 1) \in R^{n+1}$. При $f_{n+1}(x_{n+1}, x, u) = 1$ из принципа максимума находим, что многочлен

$$p_0\phi_0(x_{n+1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \ldots + p_n\phi_n(x_{n+1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + p_{n+1}$$

как функция $\mathbf{u}$ должен принимать максимальное значение, равное нулю, во всех точках оптимальной траектории. Из условия трансверсальности $(p_1(T), p_2(T), \ldots, p_n(T), p_{n+1}(T)) \cdot (0, 0, \ldots, 0, 1) = 0$ вытекает, что $p_{n+1}(T) = 0$. Следовательно, для

исходной постановки неавтономной задачи должно выполняться равенство

$$p_0(T)\,\phi_0(T, \mathbf{x}(T), \mathbf{u}(T)) + \ldots + p_n(T)\,\phi_n(T, \mathbf{x}(T), \mathbf{u}(T)) = 0.$$

3. СИНТЕЗ

Фактическое вычисление параметров управления, удовлетворяющих необходимым условиям, сформулированным в разд. 2, представляет собой сложную задачу. Рассмотрим две специальные задачи: 1) простую, хорошо изученную линейную задачу оптимального управления, областью управления которой является компактный выпуклый многогранник, и 2) некоторую нелинейную задачу ОУ с компактной выпуклой областью управления. Последнюю задачу можно записать как задачу Лагранжа, а затем свести задачу синтеза к решению некоторой краевой задачи для дифференциальных уравнений.

3.1. Линейная задача оптимального управления

Пусть U — компактный выпуклый многогранник в R^m; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно. Требуется найти вектор параметров управления $(u_1(t), \ldots, u_m(t)) = \mathbf{u} \in U$, такой, что

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = 0, \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^T \tag{22}$$

и функционал $T = \int_0^T dt$ (пример 1) принимает минимально возможное значение. Если $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, U таковы, что для каждого вектора $\mathbf{e}$, определяющего направление ребра U, n векторов $\mathbf{Be}$, $\mathbf{ABe}$, . . ., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{Be}$ линейно независимы, то уравнения (8) принимают вид

$$\mathbf{p}' = -\mathbf{A}^t\mathbf{p}$$

(t — знак транспонирования). Эти уравнения имеют нетривиальные решения, ни одна из компонент которых не равна нулю на некотором интервале. Условие максимума (10) определяет для каждого такого решения единственный вектор управления $\mathbf{u}$. Найденные функции управления кусочно-постоянны, а их значения в точках разрыва задаются вершинами многогранника U. Последнее утверждение является следствием теоремы о числе переключений, доказанной в книге [27]. Каждую точку разрыва функции оптимального управления будем называть точкой переключения.

Если U — правильный параллелепипед, а все собственные значения $\mathbf{A}$ — действительные числа, то переключение с одного постоянного вектора управления на другой происходит не более $(n-1)$ раз [27, 29].

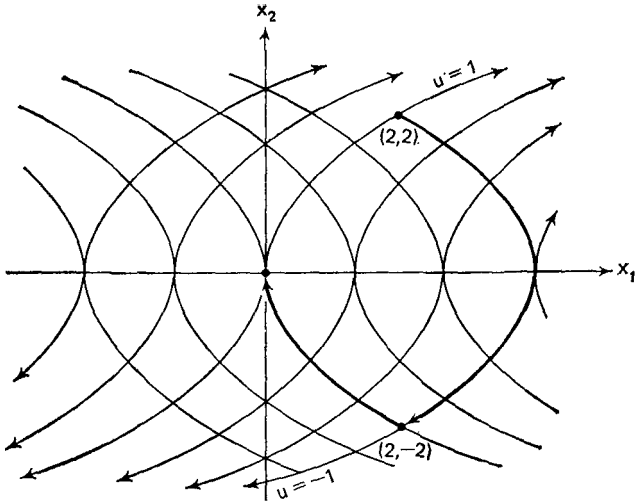


Рис. 1.

Пример 6. В примере 1 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U = [-1, 1]$. Следовательно, $\mathbf{e} = (1)$ и $\mathbf{Be} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{ABe} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ линейно независимы. Собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ — действительные числа. Вершинами U являются точки -1 и 1. Из формулы (10) получаем значения функции управления $u = 1$, $u = -1$, и, таким образом, может произойти не более $n - 1 = 1$ переключений.

Из начальной точки $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 2$ следует начать двигаться при $u = -1$ вдоль траектории $x_1 = -\frac{t^2}{2} + 2t + 2$, $x_2 = -t + 2$ до точки $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Достигнув точки $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, управление нужно переключить, положив $u = 1$; в результате, описав траекторию $x_1 = \frac{t^2}{2} - 6t + 18$, $x_2 = t - 6$, управляемая материальная точка попадет в начало координат $(0, 0)$. Затраченное суммарное время T равно 6 (рис. 1).

3.2. Нелинейная задача оптимального управления с выпуклой, компактной многогранной областью управления

Рассмотрим задачу оптимального управления (1) — (5), областью управления в которой является компактный выпуклый многогранник $U \subset R^m$ с вершинами $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$. Такая задача может быть представлена как эквивалентная задача Ла-

гранжа с помощью следующего преобразования:

$$\mathbf{u} = \psi(z') \equiv \begin{cases} \mathbf{w}_0 + \dfrac{\sin^2(\pi/2)\sqrt{z_1'^2 + \ldots + z_k'^2}}{z_1'^2 + \ldots + z_k'^2} \sum\limits_{j=1}^{k} (z_i'^2)(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_0) \\ \quad \text{при} \quad \mathbf{z}' \neq 0, \\ \mathbf{0} \ \text{при} \quad \mathbf{z}' = \theta. \end{cases} \tag{23}$$

Непрерывное преобразование (23) отображает R^k в U, а также замкнутую единичную сферу из R^k (с центром в точке θ). Из леммы Филиппова [9] следует, что для каждой ограниченной, измеримой функции $\mathbf{u}$, заданной на отрезке $[0, T]$, существует замкнутая, измеримая функция $\mathbf{z}'$ на $[0, T]$, такая, что $\mathbf{u}(t) = \psi(\mathbf{z}'(t))$. Поскольку функция ψ непрерывна и ограничена, то для каждого ограниченного измеримого $\mathbf{z}'$ на отрезке $[0, T]$ существует ограниченная измеримая функция $\mathbf{u}$ на $[0, T]$, такая, что $\mathbf{u}(t) = \psi(\mathbf{z}'(t))$. Таким образом, задаче оптимального управления (1) — (5) эквивалентна следующая задача Лагранжа [25, 29]: найти функции $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{z}' \in R^k$, такие, что

$$\begin{gathered} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \psi(\mathbf{z}')) - \mathbf{x}' = 0, \\ \mathbf{x}_0(0) = \theta, \ \mathbf{z}(0) = \theta, \ \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^T \end{gathered} \tag{24}$$

и

$$\int_0^T \phi_0(t, \mathbf{x}(t), \psi(\mathbf{z}'(t)))\, dt$$

принимает наименьшее возможное значение. Имеем

$$h(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{z}'\lambda) = \lambda_0 \phi_0(t, \mathbf{x}, \psi(\mathbf{z}')) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\phi_i(t, \mathbf{x}, \phi(\mathbf{z}')) - x_i'),$$

а из уравнения Майера (16) получаем

$$\begin{gathered} \lambda_i'(t) = -h_{x_i}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), \mathbf{z}'(t), \lambda(t)), \ i = 1, 2, \ldots, n, \\ \frac{d}{dt} h_{z_l'}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), \mathbf{z}'(t), \lambda(t)) = \\ = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \phi_{iu_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial z_l'}\right) = 0, \ l = 1, 2, \ldots, k. \end{gathered} \tag{25}$$

Поскольку T и $\mathbf{z}'(T)$ не закреплены, из условий трансверсальности (18) следует, что

$$h_{z_l'}(T, \mathbf{x}(T), \mathbf{x}'(T), \mathbf{z}'(T), \lambda(T)) = 0,$$

и с учетом формулы (25) получаем

$$h_{z_l'}(t,\ \mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}'(t),\ \mathbf{z}'(t),\ \lambda(t)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \phi_{iu_j}(t,\ \mathbf{x}(t),\ \psi(\mathbf{z}'(t))) \frac{\partial \psi_j}{\partial z_l'}(\mathbf{z}'(t)) = 0 \qquad (26)$$

для каждого $t \in [0,\ T]$, а из формулы (17) находим

$$\lambda_0 \phi_0(T,\ \mathbf{x}(T),\ \psi(\mathbf{z}'(T)) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(T)\, x_j'(T) = 0. \qquad (27)$$

Используя равенства (25), можно записать условие Вейерштрасса (20) в следующем виде:

$$\lambda_0 (\phi_0(t,\ \mathbf{x}(t),\ \psi(\zeta)) - \phi_0(t,\ \mathbf{x}(t),\ \psi(\mathbf{z}'(t))) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (\xi_i - x_i'(t))\, \lambda_i(t) \geqslant 0 \qquad (28)$$

для всех линейных элементов $(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ \mathbf{z}')$ оптимальной траектории, для всех ζ и всех $\xi = \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x},\ \psi(\zeta))$.

Следовательно, задача нахождения набора таких векторов управления, к которому принадлежит оптимальный вектор, свелась к решению краевой задачи (24), (25) при условиях (27), (28).

Пример 7. В примере 1 областью управления является компактный выпуклый многогранник $[-1,\ 1]$ в R^1 с вершинами $w_0 = -1$, $w_1 = 1$. При $u = 1$ формула (23) принимает вид

$$u = \psi(z') = -1 + \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} z'\right)(2z') = -\cos \pi z'.$$

Следовательно, задачу примера 1 можно записать как следующую задачу Лагранжа:

дано: $\qquad x_1' = x_2,\ \ x_2' = -\cos \pi z',$

$x_1(0) = x^0,\ x_2(0) = x'^0,\ z(0) = 0,\ x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0;$

требуется минимизировать T. При

$$h = \lambda_0 + \lambda_1 (x_2 - x_1') - \lambda_2 (\cos \pi z' + x_2')$$

из (25) получаем $\qquad \lambda_1' = 0,\ \lambda_2' = \lambda_1, \qquad$ а из (26) находим

$$h_{z'} = \lambda_2 \pi \sin \pi z' = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = at + b,\ (at + b)\, \pi \sin \pi z' = 0.$$

Из уравнения (17)

$$\lambda_0 + \lambda_1(T)\, x_1'(T) + \lambda_2(T)\, x_2'(T) = 0.$$

Отсюда следует, что либо $a = b = 0$, но тогда $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, что недопустимо, либо $\sin \pi z' = 0$, т. е. $z' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В результате $u = \pm 1$; в примере 6 были получены траектории $x_1 = -\frac{t^2}{2} + 2t + 2$, $x_2 = -t + 2$ на $[0, 4]$ и $x_1 = \frac{t^2}{2} - 6t + 18$, $x_2 = t - 6$ на $[4, 6]$. При $t = 4$, когда z' переключается с 0 на 1, должны выполняться условия «излома» (19): λ_1, λ_2, $\lambda_0 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 \cos \pi z'$ должны оставаться непрерывными, когда t изменяется от $4-0$ до $4+0$. Поскольку λ_0, λ_1 — постоянные, а траектория x_2 остается непрерывной, $\lambda_2(4) = 0$, т. е. $4a + b = 0$.
Из равенства (17) при $\lambda_0 = 1$ имеем

$$1 + (6a + b) = 0.$$

Следовательно, $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, и получаем $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{t}{2} + 2$.
Условие Вейерштрасса (28) принимает вид

$$\left(-\frac{t}{2} + 2\right)(-\cos \pi\xi_3 + \cos \pi z') \geqslant 0$$

для всех ξ_3. Это условие выполняется, потому что на отрезке $[0, 4]$ $z' = 0$ и $-\cos \pi\xi_3 + 1 \geqslant 0$, $-\frac{t}{2} + 2 \geqslant 0$, а на отрезке $[4, 6]$ $z' = 1$, и, следовательно, $-\cos \pi\xi_3 - 1 \leqslant 0$, $-\frac{t}{2} + 2 \leqslant 0$.

Вышеизложенный метод применим не только для области управления, заданной в виде компактного выпуклого многогранника. Если область управления U компактна и существует непрерывная функция ψ, отображающая декартово пространство R^l в U, такая, что компактное подмножество R^l также отображается в U, то лемма Филиппова справедлива и задача оптимального управления может быть преобразована в задачу Лагранжа с помощью функции ψ [25].

4. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В последнее десятилетие были получены различные достаточные условия оптимальности векторов управления [6, 18, 21]. Большинство из них чрезвычайно сложные. Мы рассмотрим только три случая на примере трех задач: линейной задачи, задачи с закрепленным временем, линейной по переменным состояния и задачи Лагранжа с закрепленным временем.

4.1. Линейная задача оптимального управления

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:
дано: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^T$;
требуется минимизировать время T (разд. 3.1). Здесь $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

При $U = \{\mathbf{u} \in E^m \mid |u_j| \leqslant 1\}$ справедливо следующее простое достаточное условие.

Если осуществляется управление с переключениями, при котором за время T объект из начального состояния $\mathbf{0}$ *переходит в состояние* $\mathbf{x}^T$ и если

$$\text{Ранг}\,(\mathbf{B},\ \mathbf{AB},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n,$$

то вектор управления $\mathbf{u}$ оптимальный. Обобщение этого условия на случай матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, зависящих от времени, можно найти в работе [11].

Пример 8. При решении задачи примера 6 была получена функция управления с переключениями для задачи из примера 1. В примере 6 было показано, что ранг $(\mathbf{B},\ \mathbf{AB}) = 2$. Следовательно, приведенное достаточное условие применимо, и найденная в примере 6 функция управления действительно является оптимальной.

4.2. Задачи оптимального управления, линейные по переменным состояния

Рассмотрим задачу ОУ (1) — (5) при следующих условиях: T фиксировано, функции ϕ_0, $\mathbf{f}$ имеют специальную структуру: $\phi_0(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}) = a_{01}(t)\,x_1 + \ldots + a_{0n}(t)\,x_n + \psi_0(t,\ u)$; $\mathbf{f} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \boldsymbol{\psi}(t,\ \mathbf{u})$, где $\mathbf{A}(t)$ — матрица размерности $n \times n$, зависящая от времени. Предполагается, что функции ψ_0 и $\boldsymbol{\psi}$ непрерывны по t и $\mathbf{u}$. В результате возникает задача: найти вектор управления $\mathbf{u}$ из множества $\mathbf{u}(t) \in U \subseteq R^m$, такой, что

$$\begin{gathered}\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \boldsymbol{\psi}(t,\ \mathbf{u}(t)),\\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\theta},\ \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^T,\end{gathered} \tag{29}$$

где $T > 0$ фиксировано, а функционал

$$\int_0^T (a_{01}(t)\,x_1(t) + \ldots + a_{0n}(t)\,x_n(t) + \psi_0(t,\ \mathbf{u}(t)))\,dt$$

принимает минимально возможное значение.

Несколько видоизменив принцип максимума, можно получить следующее достаточное условие оптимальности управления:

Если для вектора управления $\mathbf{u}$ *и соответствующей траектории* $\mathbf{x}$ *справедливы уравнения* (6) — (8) *и соответствующее условие принципа максимума выполняется при* $p_0 = -1$ *для всех* $\mathbf{v} \in U$, *то* $\mathbf{u}$ — *вектор оптимального управления*, а $\mathbf{x}$ — *оптимальная траектория* [29]. В данном частном случае уравнение (8) имеет вид

$$\mathbf{p}' = -\mathbf{A}^t\mathbf{p}, \tag{30}$$

а при $p_0 = -1$

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\sum_{i=1}^{n} a_{0i}x_i - \psi_0(t, \mathbf{u}) + \mathbf{Axp} + \psi(t, \mathbf{u})\mathbf{p}. \quad (31)$$

Теперь вышеприведенное условие можно сформулировать следующим образом: *если* $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ *удовлетворяют уравнениям* (29), (30) *и соотношение*

$$-\psi_0(t, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t, \mathbf{u})\, p_j \geqslant -\psi_0(t, \mathbf{v}) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t, \mathbf{v})\, p_j$$

справедливо для всех $\mathbf{v} \in U$ *в каждой точке траектории, то* $\mathbf{u}$ *является вектором оптимального управления.*

Пример 9. Задача примера 2 линейная по переменным состояния; на самом деле переменные состояния даже не входят в явном виде в уравнения задачи и в интегральные выражения. Следовательно, функция управления, полученная в примере 4, является оптимальной.

4.3. Теория погружения

Вернемся к задаче Лагранжа (разд. 2.2) с закрепленным временем и фиксированной конечной точкой. Сформулируем некоторые достаточные условия оптимальности траектории. Полученные условия будут применимы к тем задачам оптимального управления, которые могут быть сформулированы или преобразованы в соответствующие задачи Лагранжа.

Рассмотрим следующую задачу Лагранжа:

дано: $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{y}(T) = \mathbf{y}^T$, (32)

где $T > 0$ фиксировано; требуется минимизировать

$$\int_0^T \Phi_0(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t))\, dt. \quad (33)$$

Предположим, что $\mathbf{y}$ — решение задачи (32), (33) — имеет непрерывные производные, удовлетворяет уравнениям Майера и условию Вейерштрасса.

Будем говорить, что вектор $\mathbf{y}$ погружен в область, если в некотором открытом множестве Ω в пространстве $(t, \mathbf{y})$, содержащем траекторию $\{(t, \mathbf{y}(t)) \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}$, существует функция $\chi = \{\chi_i(t, y),\ i = 1, 2, \ldots, \mu\}$, имеющая непрерывные частные производные, такая, что

$$\mathbf{y}'(t) = \chi(t, \mathbf{y}(t)), \quad (34)$$

и, кроме того, существует непрерывная функция $\lambda = \{\lambda_j(t, \mathbf{y}),\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, такая, что решения $\mathbf{y}' = \chi(t, \mathbf{y})$ удовлетворяют

условию

$$\frac{d}{dt} g_{y'}(t, \mathbf{y}(t), \chi(t, \mathbf{y}(t)), \lambda(t, \mathbf{y}(t))) =$$
$$= g_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}(t), \chi(t, \mathbf{y}(t)), \lambda(t, \mathbf{y}(t))), \quad \text{где} \tag{35}$$
$$g(t, \mathbf{y}, \chi, \lambda) = \Phi_0(t, \mathbf{y}, \chi) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t, \mathbf{y}) \Phi_j(t, \mathbf{y}, \chi).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y_i} g_{y'_k}(t, \mathbf{y}, \chi(t, \mathbf{y}), \lambda(t, \mathbf{y})) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y_k} g_{y'_i}(t, \mathbf{y}, \chi(t, \mathbf{y}), \lambda(t, \mathbf{y})) \tag{36}$$

и $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \chi(t, \mathbf{y})) = 0$ для всех $(t, \mathbf{y}) \in \Omega$ [29].

Если некоторые конечные значения $\mathbf{y}$, например $y_{k_1}, \ldots, y_{k_l}$, не заданы, то должны выполняться также условия трансверсальности

$$g_{y'_{k_j}}(T, y(T), \chi(T, \mathbf{y}(T)), \lambda(T, \mathbf{y}(T))) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, l, \tag{37}$$

в конечный момент T.

Пример 10. В примере 5 задача из примера 2 сформулирована как задача Лагранжа с закрепленным временем и одной свободной координатой.

Дано:
$$y'_1 - y'_3 = 0,$$
$$y'_2 - ty'_3 = 0,$$
$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0; \quad y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1;$$

требуется минимизировать функционал $\int_0^1 y'^2_3 \, dt$. В примере 5 получена траектория $y_1 = y_3 = -6t + 6t^2$, $y_2 = -3t^2 + 4t^3$. Трехпараметрическое семейство траекторий $y_1 = -6t + 6t^2 + a$; $y_2 = -3t^2 + 4t^3 + b$; $y_3 = -6t + 6t^2 + c$ также удовлетворяет уравнениям Майера, исходным уравнениям задачи и покрывает $(t, \mathbf{y})$-пространство, т. е. a, b, c выражаются единственным образом через (t, y_1, y_2, y_3). Таким образом, с каждой точкой в пространстве $(t, \mathbf{y})$ связан единственный касательный вектор к траектории, которая проходит через данную точку: $\chi_1(t, \mathbf{y}) = -6 + 12t$, $\chi_2(t, y) = -6t + 12t^2$, $\chi_3(t, y) = -6 + 12t$.

Следуя примеру 5, положим $\lambda_1 = -12$, $\lambda_2 = 24$. Траектория находится из решения уравнения (34), а именно

$$y'_1 = -6 + 12t, \; y'_2 = -6t + 12t^2, \; y'_3 = -6 + 12t.$$

При $g = y_3'^2 + \lambda_1 (y_1' - y_3') + \lambda_2 (y_2' - ty_3')$ получаем $g_{y_1'} = \lambda_1$, $g_{y_2'} = \lambda_2$, $g_{y_3'} = 2y_3' - \lambda_1 - \lambda_2 t$, $g_{y_1} = g_{y_2} = g_{y_3} = 0$, и, следовательно, уравнение (35) примет вид

$$\frac{d}{dt}(\lambda_1) = 0, \quad \frac{d}{dt}(\lambda_2) = 0, \quad \frac{d}{dt}(\chi_3 - \lambda_1 - \lambda_2 t) = 0.$$

Полученные уравнения, очевидно, выполняются при λ и χ, выбранных ранее. Уравнения (36) и (37), очевидно, справедливы при $k_j = 3$. Следовательно, траектория погружена в некоторую область, а множество Ω совпадает со всем пространством $(t, \mathbf{y})$. Достаточное условие оптимальности [29]:

если траектория $\mathbf{y}$ *погружена в некоторую область и*

$$g(t, \mathbf{y}, \xi, \lambda(t, y)) - g(t, \mathbf{y}, \chi(t, \mathbf{y}), \lambda(t, \mathbf{y})) + \\ + \sum_{i=1}^{n} (\chi_i(t, \mathbf{y}) - \xi_i)\, g_{y_i'}(t, \mathbf{y}, \chi(t, \mathbf{y}), \lambda(t, \mathbf{y})) \geqslant 0 \qquad (38)$$

для всех $(t, \mathbf{y}) \in \Omega$ *и всех векторов* ξ, *для которых* $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \xi) = 0$, *то* $\mathbf{y}$ — *решение задачи Лагранжа* (32), (33) *относительно всех других траекторий, удовлетворяющих граничным условиям и лежащих в* Ω.

Пример 11. В примере 10 показано, что траектория задачи из примера 2 погружена в некоторую область. Следуя примеру 5, получаем для (38) условие

$$(\xi_3 - \chi_3(t, y))^2 \geqslant 0,$$

которое, очевидно, выполняется при всех ξ_3. Поэтому можно утверждать, что при решении задачи примера 5 была получена траектория, действительно являющаяся решением поставленной там задачи.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Задача оптимального управления в наиболее общей форме формулируется следующим образом: дано (функциональное) пространство X, функция F: $X \to R$, некоторое подмножество $Y \subset X$; требуется найти такой элемент $\mathbf{x}_0 \in Y$, для которого $F(\mathbf{x}_0) \leqslant F(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in Y$. Например, в задаче оптимального управления (1) — (5) X — пространство всех (кусочно-гладких или абсолютно непрерывных) функций, отображающих R в R^n; F — интеграл в (5); Y — пространство решений системы уравнений (1), (3), (4) при ограничениях (2).

В приведенной выше формулировке задачи ОУ фигурируют X, Y, F, которые необходимо задавать, чтобы иметь возможность получать содержательные необходимые и достаточные условия, строить алгоритмы решения задачи, применять для анализа зада-

чи методы математического анализа, доказывать существование решений задачи (последнее наиболее важно с математической точки зрения). Здесь возможны различные подходы; в данной главе проиллюстрирован один из них.

После того как некоторые необходимые и (или) достаточные условия сформулированы в аналитической форме, возникает задача синтеза, т. е. поиска векторов управления, которые удовлетворяют полученным условиям. За небольшим исключением, аналитическое решение (в замкнутой форме) удается получить либо для простых задач, которые редко отражают действительность с достаточной степенью точности, либо для искусственно созданных задач. Для более сложных задач необходимы численные методы решения. Например, они требуются для решения двухточечной краевой задачи, получающейся в результате использования необходимых условий в задаче Лагранжа, или при решении задач оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина. (Последняя задача сложнее, поскольку в ее условия входит ограниченный вектор управления $\mathbf{u}$.) Разработанные численные методы можно применять при решении краевых задач, не рассматривая при этом модели, явившиеся их источником [2, 7, 25]. Существует большая группа так называемых «прямых методов», которые широко используются для создания численных алгоритмов решения. Наиболее типичными «прямыми» методами являются методы «спуска», в которых необходимые (и достаточные) условия практически не используются. В методах «спуска» на каждой итерации значение целевой функции уменьшается, в результате чего процесс решения сходится к ее минимальному значению. Например [20], пусть F — квадратичная функция

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, Q\mathbf{x}) - 2(\mathbf{b}, \mathbf{x})$$

в гильбертовом пространстве X, где Q — самосопряженный положительно определенный оператор в X; $\mathbf{b}$ — фиксированный элемент X; $(.\,,.)$ — скалярное произведение в X. Алгоритм решения данной задачи начинается с некоторого $\mathbf{x}_1 \in X$; на каждой итерации вычисляется

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\|\mathbf{b} - Q\mathbf{x}_n\|^2}{(\mathbf{b} - Q\mathbf{x}_n,\ Q\mathbf{b} - Q^2\mathbf{x}_n)};$$

получающаяся последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ сходится по норме к элементу $\mathbf{x}_0 \in X$, при котором функция F достигает минимального значения [12, 13, 14, 16, 19, 24, 26, 28, 31, 33, 34]. Различные методы математического программирования, используемые для решения задач оптимального управления, рассматриваются в гл. 1, 5, 6, 7 части II и гл. 9 части III.

С точки зрения математика основной проблемой в задачах ОУ являются получение достаточных условий оптимальности

и доказательство существования решений. Для приложений наиболее важно уметь решать задачу синтеза. Здесь прямые методы могут оказать большую помощь. Кроме того, во многих случаях при использовании прямых методов проводится конструктивное доказательство существования решения, что необходимо для обоснования алгоритмов, опирающихся на использование ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adiri I., Ben-Israel A., An Extension and Solution of Arrow-Karlin Type Production Models by the Pontryagin Maximum Principle, *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle*, 8, 147—158 (1966).
2. Armstrong E. S., An Algorithm for the Iterative Solution of a Class of Two-Point Boundary Value Problems Occuring in Optimal Control Theory, Ph. D. Dissertation, North Carolina State University, 1967.
3. Arrow K. J., Applications of Control Theory to Economic Growth, Math. of the Dec. Sci., Part II, Amer. Math. Soc., 85—119 (1968).
4. Athans M., Falb P. L., Optimal Control, McGraw-Hill, New York, 1965.
5. Bliss G. A., Lectures on the Calculus of Variations, The University of Chicago Press, Chicago, 1946. [Имеется перевод: Блисс Дж. А. Лекции по вариационному исчислению.— М.: ИЛ, 1950].
6. Болтянский В. Г. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования.— Изв. АН СССР, 1964, сер. мат., № 3, с. 481—514.
7. Canon M. D., Clifton D. Cullum, Jr., Polak E., Theory of Optimal Control and Mathematical Programming, McGraw-Hill, New York, 1970.
8. Eppen C. D., Gould F. J., A Lagrangian Application to Production Models. *Operations Res.*, 16, 819--829 (1968).
9. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования.— Вестник МГУ, 1959, сер. мат. № 2, с. 25—32.
10. Halkin H., Mathematical Foundations of System Optimization, Academic Press, New York, 1967.
11. Hermes H., LaSalle J. P., Functional Analysis and Time Optimal Control, Academic Press, New York, 1969.
12. Hestenes M. R., Multiplier and Gradient Methods, *J. Optimization Theory and Applic.*, 4, 303—320 (1969).
13. Horwitz L. B., Sarachik P. E., Davidon's Method in Hilbert Space, *SIAM J. Appl. Math.*, 16, 676—695 (1968).
14. Horwitz L. B., Sarachik P. E., A Survey of Two Recent Iterative Techniques for Computing Optimal Control Signals, Proc. of the 10th Joint Automatic Control Conference, Boulder, Colorado, 1969, p. 50.
15. Kirk D. E., Optimal Control Theory, An Introduction, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
16. Lasdon L. S., Miller S. K., Waren A. D., The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems, *IEEE Trans. Auto. Control.* AC-12 (3), 132—138 (1967).
17. Lee E. B., Markus L., Foundations of Optimal Control Theory, Wiley, New York, 1967. [Имеется перевод: Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.— М.: Наука, 1972.]
18. Lee E. B., A Sufficient Condition in the Theory of Optimal Control, *SIAM J. Control*, 1, 241—245 (1963).
19. Lee E. S., Sheikh M. A., Optimal Production Planning by a Gradient Technique, *Management Sci.*, 16, 109—117 (1969).

20. Luenberger D. G., Optimization by Vector Space Methods, Wiley, New York, 1969.
21. Mangasarian O. L., Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems, *SIAM J. Control*, 4, 139—152 (1966).
22. McMasters A. W., Optimal Control in Determining Inventory Models, Nav. Postgrad, School, Document No. 55MGOO31A, March 1970.
23. McShane E. J., Necessary Conditions in Generalized Curve Problems of the Calculus of Variations, *Duke J. Math.*, 7, 1—27 (1940).
24. Nashed M. Z., Steepest Descent for Singular Linear Operator Equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 7, 358—363 (1970).
25. Park S. K., On the Equivalence of Optimal Control Problems and the Transformation of Optimal Control Problems into Lagrange Problems, Ph. D. Dissertation, North Carolina State University, 1970.
26. Powell M. J. D., A Survey of Numerical Methods for Nonconstrained Optimization, *SIAM Rev.*, 12, 79—97 (1970).
27. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Физматгиз, 1961.
28. Rosen J. B., The Gradient Projector Method for Nonlinear Programming, II, Nonlinear Constraints, *SIAM J. Appl. Math.*, 9, 514—532 (1961).
29. Sagan H., Introduction to the Calculus of Variations, McGraw-Hill, New York, 1969.
30. Sagan H., Calculus of Variations and Optimal Control Theory, *J. Franklin Institute*, 291, 305—313 (1971).
31. Sinnot J. F., Jr., Luenberger D. G., Solutions of Optimal Control Problems by the Method of Conjugate Gradients, 1967 Joint Automatic Control Conference, pp. 566—573.
32. Sprzeuzkouski Y., A Problem in Optimal Stock Management, *J. Optimization Theory and Applic.*, 1, 232—241 (1967).
33. Straeter T. S., On the Extension of the Davidon-Broyden Class of Rank One, Quasi-Newton Minimization Methods to an Infinite Dimensional Hilbert Space with Applications to Optimal Control Problems, Ph. D. Dissertation, North Carolina State University, 1971.
34. Tokumaru H., Adachi N., Goto K., Davidon's Method for Minimization Problems in Hilbert Space with an Application to Control Problems, *SIAM J. Control*, 8, 163—179 (1970).

Часть III
Методы исследования операций (стохастические модели)

III-1. Стохастические процессы

В. Смит[1]

1. ВВЕДЕНИЕ

В самом общем виде *стохастический*, или *случайный*, процесс определяется просто как некоторая упорядоченная совокупность случайных величин. Такое определение может вполне удовлетворить «чистых» математиков, которым свойствен сугубо абстрактный подход к предмету; в данной же книге, предназначенной для читателей, которым важно использовать теоретические результаты для решения практических задач, разумеется, желателен совершенно иной подход. Большинство стохастических процессов, которые достаточно подробно исследованы и для которых получены полезные результаты, представлены в виде соответствующих математических моделей. С рассмотрения некоторых таких моделей мы и начнем данную главу.

Пример 1. Простое случайное блуждание. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots$ — бесконечная последовательность случайных величин, которые будем считать взаимно независимыми и характеризующимися одинаковыми распределениями вероятностей следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}\Pr\{X_j=-1\}=q>0,\\ \Pr\{X_j=+1\}=p>0,\end{aligned}\right\}\ (j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где p и q — константы, удовлетворяющие условию $p+q=1$. Такая последовательность случайных величин может возникнуть, например, следующим образом. Два индивидуума A и B принимают участие в игре, каждая партия которой характеризуется случайным исходом. Проигравший выплачивает своему партнеру один доллар. Вероятность того, что партия будет выигра-

[1]) W. L. Smith, University of North Carolina.

на игроком B, равняется p, а вероятность того, что партию выиграет игрок A, равняется q. Игроки A и B играют одну за другой n независимых партий. Обозначив через S_n денежную сумму, на которую изменится капитал игрока B после n партий игры, можно записать

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n. \tag{1}$$

Последовательность $S_0 = 0$, S_1, S_2, ... называется *простым случайным блужданием*; прилагательное «простой» просто подчеркивает, что «шаги» блуждания (т. е. величины X_j) могут принимать лишь значения ± 1. При всей своей простоте случайное блуждание с единичным шагом долгое время оставалось объектом многочисленных исследований, в результате которых было получено немало глубоких и неожиданных результатов. Случайное блуждание можно рассматривать (с различной степенью правдоподобия) упрощенной «моделью» целого ряда реальных процессов. Модель простого случайного блуждания используется, в частности, для описания движения «дырок» в молекулярных структурах кристаллов.

Пример 2. Рекуррентные события. Представим себе, что мы наблюдаем описанное выше простое случайное блуждание; предположим, что каждый раз, когда величина S_n обращается в нуль (т. е. когда чистый выигрыш игрока B оказывается нулевым), происходит некоторое событие ε. Интуитивно ясно, что каждый раз, когда наступает событие ε, происходит возврат к той же самой ситуации, которая имела место в начале процесса. Распределения вероятностей для временны́х интервалов между любыми двумя смежными событиями совпадают с распределением вероятностей для длины временно́го интервала от начала игры до того момента времени, когда событие ε происходит впервые. Описанный выше процесс реализации *рекуррентного события* ε является типичным представителем целого класса стохастических процессов, играющих исключительно важную роль при анализе весьма сложных явлений, с которыми сталкиваются в теории массового обслуживания, при решении задач замены оборудования и ряда других задач исследования операций.

Пример 3. Цепи Маркова. Представим себе малогабаритный автобус (мини-автобус), в котором 6 сидячих мест и нет мест для проезда стоя. Автобус следует по круговому маршруту в небольшом населенном пункте. Если автобус прибывает на одну из остановок с r $(0 \leqslant r \leqslant 6)$ пассажирами, то имеется некоторая вероятность p_{rs} того, что после остановки в нем окажется s пассажиров. Так, например, p_{52} есть вероятность того, что, прибыв на остановку с пятью пассажирами, автобус продолжит дальнейшее следование (до следующей остановки) с двумя пассажирами. Допустим, что последовательно происходящие изменения числа

пассажиров в автобусе являются *независимыми*. При этом мы имеем в виду следующее. Предположим, например, что автобус прибывает на остановку с тремя пассажирами. Тогда, если X — число пассажиров, оказавшихся в автобусе после его отправления (на данной остановке), то X является случайной величиной, для которой $\Pr\{X = j\} = p_{3j}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, 6)$, причем X не зависит от того, сколько пассажиров входило в автобус и выходило из него на предыдущих остановках, и *определяется лишь тем фактом*, что автобус прибыл на остановку с тремя (в нашем примере!) пассажирами. Если X_n — число пассажиров, находящихся в автобусе после n остановок, то тогда последовательность X_1, X_2, . . . называется *цепью Маркова*. В рассмотренном выше примере фактически правильнее было бы говорить о цепи Маркова с числом состояний, равным семи, поскольку X_n может принимать лишь одно из значений 0, 1, 2, . . ., 6. Позднее мы увидим, что существуют цепи Маркова с бесконечным числом состояний. Цепи Маркова возникают при решении многих задач исследования операций, причем бесконечные цепи Маркова играют особо важную роль в теории массового обслуживания.

В тех трех примерах, которые только что были рассмотрены, стохастические процессы являются *дискретными во времени*. Другими словами, мы можем представить себе, что на оси времени сделаны отметки 0, 1, 2, 3, . . . и процесс протекает таким образом, что переходы из одного состояния в другое последовательно происходят именно в эти моменты времени. Так, например, в случае простого случайного блуждания предполагается, что каждый последующий шаг в процессе блуждания совершается на временно́м интервале, кратном некоторому подходящему для каждого конкретного случая единичному интервалу времени. Для адекватного отображения многих реальных процессов требуются, однако, модели, позволяющие описывать процессы, протекающие *во времени непрерывно*. Несколько примеров таких процессов приведено ниже.

Пример 4. Пуассоновский процесс. Так называется модель, в которой некоторое событие A может относиться к любой точке на оси времени; фактически A и представляет собой такое событие, которое специалисты в области исследования операций называют «случайным во времени». Обозначим через $N(a, b]$ число (являющееся случайным) таких событий в интервале времени $(a, b]$. Тот факт, что данный интервал «закрыт» справа, имеет чисто «педагогический» смысл, поскольку, как мы увидим позднее, вероятность появления события A в некоторый заранее фиксированный момент времени b равняется нулю. Пусть величина $\lambda > 0$ — константа, характеризующая *интенсивность* протекания процесса; ясно, что λ имеет размерность [единица времени]$^{-1}$. Пред-

положим далее, что для любой малой величины $h > 0$

(P1) $$\Pr\{N(t,\ t+h] = 1\} = \lambda h + o(h);$$

(P2) $$\Pr\{N(t,\ t+h] \geqslant 2\} = o(h);$$

(P3) Случайная величина $N(t,\ t+h)$ для $h > 0$ не зависит от того, имело ли место событие A в моменты времени, предшествующие t, и даже в момент t.

В другой (более строгой) формулировке условие (P3) означает, что распределение $N(t,\ t+h]$ остается одним и тем же независимо от того, имело ли место событие A в момент времени t. Если условия (P1), (P2) и (P3) выполняются, то нетрудно доказать, что

(P4) $$\Pr\{N(t,\ t+h] = 0\} = 1 - \lambda h + o(h).$$

Позднее мы увидим, что пуассоновское распределение обладает следующими важными свойствами:

(P5) Для любого $T \geqslant 0$ и любого момента времени t величина $N(t,\ t+T)$ имеет пуассоновское распределение со средним значением, равным λT; таким образом, λ есть среднее число событий A, попадающих в единичный интервал времени.

(P6) Временные интервалы, разделяющие моменты появления события A, являются независимыми случайными величинами с экспоненциальным распределением вероятностей вида $\lambda e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$.

Пуассоновский процесс адекватно моделирует случайное поступление заявок на обслуживание в теории массового обслуживания, возникновение аварий на промышленных предприятиях и т. д.

Пример 5. Процессы восстановления. Представим себе, что на некотором промышленном предприятии эксплуатируется оборудование, подверженное поломкам, при возникновении которых его нужно срочно заменять. Простейшим примером может служить простая электрическая лампочка, хотя читателю, в зависимости от его профессионального опыта, могут прийти на ум и многие другие варианты. Обозначим через X_j время жизни единицы оборудования j-го вида и предположим, что X_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — независимые случайные величины, характеризующиеся одинаковой плотностью распределения вероятностей $f(x)$. Разумеется, $f(x) \equiv 0$ при $x < 0$. Примем также в качестве $\Pr\{X_j \leqslant x\}$ выражение $F(x) = \int\limits_0^x f(y)\,dy$ и обозначим через $N(x)$ число замен или актов восстановления на отрезке $(0,\ x]$. В качестве *функции восстановления* $H(x)$ возьмем математическое ожидание для числа актов восстановления в интервале времени $(0,\ x]$, т. е. положим

$H(x) = \mathscr{E}N(x)$. Нетрудно убедиться, что

$$H(x) = F(x) + \int_0^x H(x-z) f(z)\, dz.$$

Данное соотношение представляет собой *интегральное уравнение теории восстановления. Плотность восстановления* равняется $h(x) = H'(x)$ и удовлетворяет следующему уравнению:

$$h(x) = f(x) + \int_0^x h(x-z) f(z)\, dz.$$

Можно показать, что $h(x) \cdot \delta x$ с точностью до бесконечно малой первого порядка есть вероятность того, что акт восстановления (замены) произойдет в интервале $(x, x + \delta x)$ при условии, если функция $h(x)$ в этом интервале непрерывна. Чтобы иметь визуальное представление о том, в каких точках на оси времени с той или иной вероятностью могут иметь место акты восстановления, строится график функции $h(x)$.

Стохастический процесс совершенно отличается от тех процессов, которые приходится анализировать в связи с определением «возраста» единицы оборудования $Y(x)$, находящегося в эксплуатации в момент времени x. Графики $Y(x)$ в реальных условиях имеют «пилообразный» вид с резкими падениями до нуля в точках, соответствующих моментам восстановления (замены), и характеризуются на отрезках от начала эксплуатации до момента восстановления «единичным наклоном» (т. е. возрастанием со скоростью, равной единице). Аналогично вводится в рассмотрение *функция отсрочки* $Z(x)$, определяющая длину временно́го интервала от момента x до момента ближайшего восстановления (ближайшей замены) в будущем.

Читателю, по-видимому, уже ясно, что процессы восстановления являются континуальным аналогом рекуррентных процессов. Необходимость рассмотрения процессов такого рода при решении задач замены оборудования и аналогичных им задач совершенно очевидна; однако следует отметить, что процессы восстановления играют исключительно важную роль и при анализе более сложных явлений.

Пример 6. Броуновское движение (или процесс Винера). Общее понятие о процессе, описанию которого посвящен данный пример, сформировалось в результате эмпирических наблюдений английского ботаника Броуна; однако впервые математически строго этот процесс был рассмотрен Винером. Следует подчеркнуть, что, несмотря на частое и результативное использование понятия «броуновское движение» при решении практических задач, корректное математическое описание данного процесса требует при-

менения весьма сложного математического аппарата, изложение которого в данной главе не представляется возможным. Это, однако, не должно удерживать нас от использования понятия «броуновское движение» в тех случаях, когда оно адекватно тому или иному реальному процессу (например, при изучении биржевых цен). Что же касается «адекватности», то, за исключением случаев, когда мы можем наблюдать броуновское движение под микроскопом (а именно такие наблюдения и привели к данному понятию), при ее обосновании единственным надежным ориентиром является интуиция.

Обозначим через $W(t)$ координату броуновской частицы в момент времени t и для простоты положим $W(0) = 0$. $\mathscr{E}[W(t)] = 0$ для всех t. Рассмотрим последовательность $0 < t_1 < t_2, \ldots < t_n$. Основное свойство процесса состоит в том, что $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ являются независимыми гауссовыми переменными, а величина отклонения $W(t_j) - W(t_{j-1})$ равняется $(t_j - t_{j-1})$. Графики, построенные для данного процесса путем наблюдений за координатами частицы через очень малые равноотстоящие друг от друга моменты времени и соединения полученных точек прямолинейными отрезками, напоминают графики поведения цен акций на бирже или графики, иллюстрирующие колебания уровня влажности воздуха (при дискретном снятии показаний соответствующего измерительного прибора), или же графики, вычерчиваемые сейсмографом (при отсутствии сильных подземных толчков). После надлежащей модификации данной модели величины $W(t)$ можно интерпретировать как величины погрешностей, возникающих в процессе управления с Земли полетом ракеты. Модель броуновского движения можно использовать для описания и многих других процессов аналогичного характера.

Можно доказать, что с вероятностью, равной единице, $W(t)$ есть непрерывная функция параметра t. К сожалению, можно также доказать, что с вероятностью, равной единице, ни на каком отрезке времени не найдется ни одной точки t, в которой функция $W(t)$ была бы дифференцируема. Последнее обстоятельство создает неудобства физикам, пытающимся использовать $W(t)$ для описания процесса диффузии частиц. (Это одно из наиболее распространенных приложений модели броуновского движения.) Действительно, в рассматриваемой нами модели предполагается почти мгновенное изменение импульса частицы, что могло бы иметь место, если бы частицы обладали нулевой массой или если бы действующие на частицы силы были бесконечно большими. Тем не менее, как уже подчеркивалось ранее, если не входить в тонкости поведения $W(t)$, то с ее помощью можно успешно (хотя, как правило, весьма приближенно) моделировать целый ряд реальных процессов, представляющих практический интерес.

В данном разделе преследовалась лишь одна цель — познакомить читателя с некоторыми из наиболее важных стохастических процессов, модели которых можно найти в публикациях по исследованию операций. Остальная часть этой главы посвящена математическому описанию некоторых конкретных процессов; из-за ограниченного объема книги каждая из рассмотренных ниже моделей представлена весьма кратко. Однако, прежде чем перейти к следующему разделу, следует сказать несколько слов по поводу понятия *стационарности*, являющегося одним из важнейших понятий в теории случайных процессов.

Для наглядности ограничимся рассмотрением системы, которая может находиться лишь в одном из двух допустимых «состояний»: A или B. Если система находится в момент времени t в состоянии A, то будем считать, что существует вероятность $\alpha\delta t + o(\delta t)$ того, что на отрезке $(t, t+\delta t)$ она мгновенно перейдет в состояние B независимо от ее поведения в прошлом. Если система находится в состоянии B, то вероятность ее мгновенного перехода в состояние A на отрезке $(t, t+\delta t)$ равна $\beta\delta t + o(\delta t)$. Предположим, что коэффициенты $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ являются константами. Если обозначить через $p_A(t)$ и $p_B(t)$ вероятности пребывания системы соответственно в состоянии A и состоянии B в момент времени t, то можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dp_A}{dt} &= -\alpha p_A(t) + \beta p_B(t), \\ \frac{dp_B}{dt} &= \alpha p_A(t) - \beta p_B(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Эти уравнения с учетом того, что $p_A(t) + p_B(t) = 1$ для любого t, имеют следующее решение:

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left[1 - e^{-(\alpha+\beta)t}\right] + p_A(0)\, e^{-(\alpha+\beta)t}, \\ p_B(t) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[1 - e^{-(\alpha+\beta)t}\right] + p_B(0)\, e^{-(\alpha+\beta)t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Из уравнений (2) вытекают следующие утверждения:

(I) При $t \to \infty$

$$p_A(t) \to \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \pi_A,$$

$$p_B(t) \to \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \pi_B.$$

(II) Если $p_A(0) = \pi_A$ и $p_B(0) = \pi_B$, то $p_A(t) = \pi_A$ и $p_B(t) = \pi_B$ для любого $t > 0$.

(III) Величины $a = 1/\alpha$ и $b = 1/\beta$ представляют собой средние продолжительности пребывания системы в состоянии A и состоянии B соответственно. При этом

$$\pi_A = \frac{a}{a+b}, \quad \pi_B = \frac{b}{a+b}.$$

(IV) Числовые значения π_A и π_B можно получить путем решения системы уравнений, получаемых из соотношений (2) приравниванием нулю производных dp_A/dt и dp_B/dt; кроме того, необходимо учесть условие $\pi_A + \pi_B = 1$. Заметим, что при этом получается система уравнений

$$\begin{aligned} -\alpha\pi_A + \beta\pi_B &= 0, \\ \alpha\pi_A - \beta\pi_B &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

в которой второе уравнение просто дублирует первое.

Распределение (π_A, π_B) называется *стационарным*; смысл, который заложен в это понятие, вытекает из утверждения (III). Из утверждения (I) следует, что независимо от начального (т. е. имеющего место в момент $t = 0$) распределения вероятностей для пребывания системы в том или ином состоянии с течением времени распределение все более и более приближается к стационарному. Таким образом, при моделировании поведения аналогичной реальной системы, которая должна функционировать неопределенное, но достаточно продолжительное время, распределение вероятностей, характеризующее поведение системы, можно считать стационарным. Следует, наконец, отметить, что, основываясь на утверждениях (III) и (IV), нетрудно найти соответствующее стационарное распределение в явном виде. Реализация утверждения (III) зависит от того, поддается ли оценке средняя продолжительность *одного цикла* исследуемого процесса, равная, как легко видеть, величине $a + b$; по этой причине метод, основанный на использовании соотношений п. (III), нередко оказывается трудно применять на практике. Метод, вытекающий из утверждения (IV), по существу, опирается на тот факт, что если та или иная функциональная система характеризуется стационарным распределением, то вероятность изменения состояния системы в интервале $(t, t + \delta t)$ должна стремиться к нулю при $\delta t \to 0$. Эту исходную предпосылку удается реализовать во многих весьма сложных моделях, и нередко при этом задача определения требуемого стационарного распределения решается успешно.

Очевидно, что все рассуждения, которые были приведены выше применительно к простому случаю, когда число возможных состояний системы равняется двум, после совершенно ясных обобщений могут быть использованы при анализе и многих других

(более сложных) процессов, являющихся объектом моделирования для специалистов в области исследования операций.

В заключение обратим внимание на одно обстоятельство, имеющее большое практическое значение. Из закона больших чисел следует, что если процесс, аналогичный процессу, рассмотренному выше, наблюдать к течение достаточно продолжительного времени T, то можно убедиться, что вероятность π_A приблизительно равняется отношению длины отрезка времени, в течение которого система пребывает в состоянии A, к длине суммарного отрезка времени T. Точность аппроксимации непрерывно возрастает с увеличением T. Таким образом, становится ясной «операционная» интерпретация стационарного распределения, которая, как правило, и принимается во внимание исследователями и является исключительно важной с практической точки зрения.

Следует также обратить внимание на то обстоятельство, что информация, даваемая стационарным распределением, оказывается исключительно полезной, поскольку распределение вероятностей для так называемого *неустановившегося* режима даже в случае относительно простого процесса с двумя допустимыми состояниями, когда выполняются уравнения (3), как правило, не удается определить. Во многих случаях, когда нахождение распределения для неустановившегося режима связано с непреодолимыми трудностями, удается получить стационарное распределение или по крайней мере вычислить моменты этого распределения.

Стохастические процессы, представленные в данном и последующих разделах данной главы, описываются соответствующими уравнениями, или, другими словами, «моделью», позволяющей определять «правила», в соответствии с которыми рассматриваемые процессы развиваются во времени. Другой подход, который, за исключением случаев стационарного поведения исследуемых систем, не нашел в области исследования операций широкого применения, заключается в том, что тот или иной процесс описывается с помощью некоторых интегральных характеристик, которые, однако, не дают никакой информации о микроструктуре исследуемого процесса. В заключительном разделе данной главы будет кратко описан важный класс стационарных процессов.

2. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

Пусть $X_1, X_2 \ldots$ — вещественные, одинаково распределенные и взаимно независимые случайные величины; положим $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ при $n = 1, 2, \ldots$ и т. д. Тогда последовательность $\{S_n\}$ есть *случайное блуждание*. Если $\Pr\{X_j = +1\} = p$ и $\Pr\{X_j = -1\} = q$, где $p + q = 1$, то мы имеем *простое случайное блуждание*.

Если математическое ожидание $\mathscr{E}X_1 = \mu_1$ и дисперсия $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2$ являются конечными величинами (что, как правило, и наблюдается в практических приложениях), то распределение S_n является асимптотически нормальным и для вещественных y_1 и y_2, удовлетворяющих условию $y_1 < y_2$,

$$\Pr\{y_1 \leqslant S_n \leqslant y_2\} \approx (2\pi\sigma^2 n)^{-1/2} \int_{y_1}^{y_2} \exp\left(-\frac{(x-n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right) dx.$$

Этот результат вытекает из центральной предельной теоремы. Даже в том случае, когда условие конечности дисперсии не выполняется с вероятностью, равной единице, $n^{-1}S_n \to \mu_1$ при $n \to \infty$. Это и есть «сильный» закон больших чисел. Таким образом, если $\mu_1 > 0$, то можно утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $S_n > (\mu_1 - \varepsilon)\, n$ при *всех* $n > N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ — случайное целое число, распределение вероятностей для которого, разумеется, зависит от вида распределения случайных величин $X_1, X_2 \ldots$ и выбора ε. При этом, безусловно, справедливо утверждение, что $\Pr\{N(\varepsilon) < \infty\} = 1$. Аналогично $S_n < (\mu_1 + \varepsilon)\, n$ при всех достаточно больших n. Если, однако, дисперсия σ^2 конечна, то можно утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu_1\right| > \varepsilon\right\} < \infty. \tag{5}$$

Этот результат, так же как и многие другие аналогичные результаты более общего характера, можно найти в публикациях, посвященных проблеме полной сходимости парциальных (частных) сумм.

Правило останова определяет случайное целое число T с помощью последовательности функций вещественных переменных $\phi_1(x_1)$, $\phi_2(x_1, x_2)$, $\phi_3(x_1, x_2, x_3) \ldots$ и т. д. Представим себе, что реализуется *выборка* X_j ($j = 1, 2, \ldots$) из бесконечной популяции. Если X_1 принимает, например, значение x_1', то это означает, что мы проводим независимое случайное испытание с вероятностью успешного исхода $\phi_1(x_1')$. Если исход данного испытания успешен, мы производим выборку для X_2; в противном случае выборка прекращается и $T = 1$. Если реализуется выборка X_2 и мы получаем, например, $X_2 = x_2'$, то решаем, продолжать ли выборку путем проведения следующего независимого испытания с вероятностью успешного исхода $\phi_2(x_1', x_2')$; если это испытание не имеет успешного исхода, $T = 2$. Логика продолжения этого процесса для читателя должна быть очевидной. В большинстве приложений функции ϕ_j могут принимать лишь одно из двух значений: 0 или 1; на i-м шаге либо принимается решение прекратить выборку, если опыт с блужданием на предыдущих стадиях

обусловливает «останов», либо случайное блуждание продолжается. На практике наиболее распространенным является правило останова, основанное на использовании двух вещественных чисел a и b, когда блуждание прекращается, как только $S_n \leqslant -a$ или $S_n \geqslant +b$. Заметим, что правило останова не может требовать прекращения испытаний на n-м этапе на основе информации о будущих значениях случайных величин; в реальных ситуациях это просто означало бы невозможность предсказания будущего.

К изложенному выше необходимо добавить следующее: для того чтобы правило, предписывающее прекращение случайных испытаний, было *строгим*, должно выполняться условие $\Pr\{T < \infty\} = 1$. Для некоторых задач проверка этого условия может оказаться либо слишком утомительной, либо затруднительной по принципиальным причинам. Однако, если $\sigma^2 < \infty$ и правило останова основано на выполнении условия $S_n \leqslant -a$ или $S_n \geqslant -b$, то оно является строгим *даже* при $\mu_1 = 0$. Этот факт может оказаться исключительно полезным при решении практических задач.

Предположим теперь, что T определяет строгое правило останова. Тогда справедливо так называемое уравнение Вальда, которое в общем случае имеет вид

$$\mathscr{E} S_T = \mu_1 \mathscr{E} T. \tag{6}$$

В ряде случаев можно даже утверждать, что

$$\mathscr{E}(S_T - T\mu_1)^2 = \sigma^2 \mathscr{E} T. \tag{7}$$

Достаточное условие, обеспечивающее выполнение условия (7), заключается в том, чтобы случайные величины X_j ($j = 1, 2, \ldots$) были ограниченными и в качестве T, определяющего момент прекращения случайных испытаний, выбиралось самое первое целое число j, для которого $|S_j|$ превышает некоторую заданную константу.

Уравнение Вальда (6) можно использовать для опровержения различных весьма занимательных, но совершенно неверных доказательств и умозаключений. Рассмотрим следующий пример. Будем полагать $X_j = +1$, когда в некоторой семье рождается девочка, и $X_j = -1$, когда рождается мальчик. Для простоты возможность появления на свет двойни, тройни (или большего числа младенцев) исключим. Пусть $\Pr\{X_j = +1\} = p$, $\Pr\{X_j = -1\} = q$, $p + q = 1$. Тогда из уравнения Вальда (6) следует, что не существует правила останова (каким бы сложным оно ни было), которое могло бы привести к *предельному* значению отношения количества мальчиков к количеству девочек (в рассматриваемой популяции), отличному от отношения q/p. Поэтому утверждение, что семейная стратегия «производить на свет детей до тех пор, пока не появится мальчик», может обеспечить какое-то

другое предельное отношение количества мальчиков и количества девочек, является ошибочным. Аналогичным образом легко видеть, что невозможно придумать такую систему ведения азартной игры, состоящей из последовательности независимых партий, которая могла бы претендовать на лучший результат, нежели любая другая, пусть даже самая наивная, система.

Если независимые величины $X_1, X_2, \ldots$ характеризуются плотностью распределения вероятностей $f(x)$, то во многих случаях существует производящая функция моментов

$$M(\theta) = \mathscr{E}e^{\theta X} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} f(x)\, dx \tag{8}$$

для всех значений θ в некотором вещественном интервале $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. Как правило, $M(\theta) \uparrow \infty$ при $\theta \downarrow \alpha$ и $\theta \uparrow \beta$. Мы видим также, что $M(0) = 1$, $M'(0) = \mu_1$ и что при условии $\mu_1 \neq 0$ существует интервал значений θ, в котором $M(\theta) \geqslant 1$. Если обозначить этот интервал через I, то можно утверждать, что для всех $\theta \in I$

$$\mathscr{E}\left\{\frac{e^{\theta S_T}}{|M(\theta)|^T}\right\} = 1. \tag{9}$$

Соотношение (9) называют фундаментальным тождеством Вальда. Хотя из данного тождества и трудно получить какую-либо конструктивную информацию строго логическим путем, оно оказывается иногда полезным при интуитивной оценке ожидаемых результатов и в связи с построением различных методов аппроксимаций. Так, например, уравнения (6) и (7) можно получить из уравнения (9), если его дважды продифференцировать по θ и затем положить $\theta = 0$.

Рассмотрим еще один пример практического применения соотношения (9). Допустим, что правило останова основано на выполнении условия $S_n \leqslant -a$ или $S_n \geqslant b$; это обычно интерпретируют как останов в тот момент, когда траектория блуждания пересекает некоторый экран. Пусть P_a — вероятность того, что блуждание прекратится в силу условия $S_n \leqslant -a$, а P_b — вероятность прекращения блуждания по причине выполнения условия $S_n \geqslant b$. Предположим далее, что X_j ($j = 1, 2, \ldots$) могут принимать значения, малые по сравнению с a и b. Тогда, если $S_T \leqslant -a$, с не очень большой погрешностью можно положить $S_T = -a$. Аналогично (без риска допустить большую погрешность) можно положить $S_T = b$ (вместо неравенства $S_T \geqslant b$). Обозначим далее через θ^* то единственное (отличное от нуля) значение θ, для которого $M(\theta^*) = 1$ (такое значение θ^*, как правило, существует). Тогда из соотношения (9) получаем

$$P_a e^{-a\theta^*} + P_b e^{b\theta^*} \approx 1.$$

Поскольку должно выполняться условие $P_a + P_b = 1$, то мы, в частности, получаем

$$P_a \approx \frac{1-e^{b\theta^*}}{e^{-a\theta^*}-e^{b\theta^*}}. \tag{10}$$

Можно показать, что $\theta^* > 0$, если $\mu_1 < 0$, и $\theta^* < 0$, если $\mu_1 > 0$. С помощью процедуры предельного перехода нередко удается найти решение и в том случае, когда $\mu_1 = 0$.

За последние двадцать лет при исследовании процессов случайного блуждания был получен ряд других важных соотношений типа тождеств; эти результаты связаны с именами Шпитцера, Спарра и Андерсона. В области исследования операций они нашли пока лишь ограниченное применение. Приведем здесь всего лишь один пример, рассмотренный Шпитцером. Пусть $M_n = \max(0, S_1, S_2, \ldots, S_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ и $M_0 = 0$. Пусть $\psi_n(\theta) = e^{i\theta M_n}$ — характеристическая функция M_n. Введем в рассмотрение величину S_n^+, такую, что $S_n^+ = S_n$, если $S_n \geqslant 0$, и $S_n^+ = 0$, если $S_n < 0$, и обозначим через $\chi_n(\theta)$ характеристическую функцию S_n^+. Тогда для любого ρ, такого, что $0 < \rho < 1$,

$$\exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} \chi_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \psi_n(\theta), \tag{11}$$

$$\exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} \Pr\{S_n \leqslant 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \Pr\{M_n = 0\}.$$

3. ПРОСТОЕ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ

Этот частный случай стохастического блуждания настолько важен, что следует обсудить его отдельно.

Два поглощающих экрана. Напомним, что $S_0 = 0$. Предположим, что целые числа $a > 0$ и $b > 0$ заданы и блуждание прекращается, как только либо $S_n = -a$, либо $S_n = b$. Пусть $P(b, -a)$ — вероятность того, что блуждание прекратится возле правого экрана, т. е. когда $S_T = b$. Совершенно очевидно, что

$$P(b, -a) = pP(b-1, -(a+1)) + qP(b+1, -(a-1)).$$

Действительно, если j есть некоторое целое число, удовлетворяющее неравенству $-a < j < b$, то

$$P(b-j, -(a+j)) = pP(b-j-1, -(a+j+1)) + \\ + qP(b-j+1, -(a+j-1)).$$

Положив $u_j = P(b-j, -(a+j))$, придем к системе рекуррентных уравнений

$$u_j = pu_{j+1} + qu_{j-1} \quad (-a < j < b)$$

с граничными условиями $u_{-a} = 0, u_b = 1$. Искомое решение существенно зависит от того, равны между собой или различны p и q. Сначала предположим, что $p \neq q$. Заметим, что $u_0 = P(b, -a)$. Следовательно, получаем

$$P(b, a) = \frac{(q/p)^a - 1}{(q/p)^{a+b} - 1}. \tag{12}$$

С другой стороны, если $q = p = \frac{1}{2}$, то нетрудно убедиться, что

$$P(b, a) = \frac{a}{b+a}. \tag{13}$$

Последний из полученных результатов, в частности, означает, что если индивидуумы A и B, располагающие соответственно денежными суммами a и b, играют одну за другой ряд независимых партий *справедливой* ($p = q$) игры до тех пор, пока один из игроков не обанкротится, то шанс каждого из них на конечный успех пропорционален капиталу, которым он располагает, т. е.

$$\frac{\Pr\{\text{обанкротится } A\}}{\Pr\{\text{обанкротится } B\}} = \frac{b}{a}.$$

Можно также вывести формулу для ожидаемого числа $d(b, a)$ партий (не обязательно справедливой игры), которые должны быть сыграны до того, как один из игроков обанкротится, т. е. для ожидаемого числа шагов блуждания до момента пересечения траектории блуждания с экраном. Можно показать, что в случае, когда $p \neq q$,

$$d(b, a) = \frac{a + b - b(p/q)^a - a(q/p)^b}{(q-p)\{(p/q)^a - (q/p)^b\}}. \tag{14}$$

Если же $p = q = \frac{1}{2}$, то имеет место следующая простая формула:

$$d(b, a) = ab. \tag{15}$$

Один поглощающий экран. Снова имеем $S_0 = 0$; однако теперь блуждание прекращается, если $S_n = b$ (> 0). Ниже будет показано, что данное правило останова может оказаться нестрогим. Пусть $P(b)$ есть вероятность того, что блуждание при пересечении его траектории с экраном ($S_n = b$) действительно прекращается. Тогда с помощью простых рассуждений можно прийти к заключению, что для любого целого $b \geqslant 1$

$$P(b) = \{P(1)\}^b. \tag{16}$$

$$\text{Но } P(b) = pP(b-1) + qP(b+1) \text{ для } b \geqslant 1.$$

Таким образом, с помощью выражения (16) получаем

$$P(1) = q\{P(1)\}^2 + p.$$

Данное уравнение второй степени относительно $P(1)$ можно записать в следующем виде:

$$[qP(1) - p][P(1) - 1] = 0.$$

При $p = q = \frac{1}{2}$ имеем единственное решение $P(1) = 1$, так что в данном случае $P(b) = 1$ для любого b. В случае когда $p > q$, можем исключить вероятность $P(1) = p/q$, поскольку $p/q > 1$. Таким образом, в этом случае имеем также $P(b) = 1$ для любого b. При $p < q$ мы оказываемся в затруднительном положении, поскольку как p/q, так и 1 являются допустимыми значениями вероятности. Однако в этом случае мы обращаем внимание на то обстоятельство, что, согласно закону больших чисел, $n^{-1}S_n \to p - q < 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, если число b достаточно велико, то, безусловно, существует положительная (не равная нулю) вероятность того, что S_n никогда не примет значения, равного b. Следовательно, $P(1) = p/q < 1$ и $P(b) = (p/q)^b$, т. е. $P(b)$ убывает до нуля при $b \to \infty$. Итак, когда $p < q$, мы имеем *нестрогое* правило останова, тогда как при $p > q$ правило останова является *строгим*.

Предположим, что $p \geqslant q$, и обозначим через $d(b)$ ожидаемое число остановок до момента останова при пересечении экрана $(S_n = b)$. Должно быть очевидным, что $d(b) = bd(1)$ для всех $b \geqslant 1$. Далее, для $b \geqslant 1$

$$d(b) = 1 + pd(b-1) + qd(b+1)$$

при граничном условии $d(0) = 0$. Таким образом, приходим к уравнению

$$bd(1) = 1 + \{b - p + q\}\, d(1),$$

из которого следует, что $(p - q)\, d(1) = 1$. При $p > q$ получаем $d(1) = 1/(p - q)$.

Если $p = q = \frac{1}{2}$, то возможно лишь одно решение $d(1) = \infty$. Оно, несомненно, является правильным, хотя вряд ли мы можем здесь его строго обосновать. Правильность этого результата, однако, строго доказана в теории рекуррентных событий.

4. РЕКУРРЕНТНЫЕ СОБЫТИЯ (ПРОЦЕССЫ)

Важность и полезность рассмотрения стохастических процессов рекуррентного типа впервые были отмечены Феллером, который и заложил основы соответствующей теории. Представим себе, что некоторое событие A происходит в моменты времени S_0, S_1, S_2, . . ., где $S_n = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Предположим, что X_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — независимые случайные

величины, принимающие значения, кратные некоторому фиксированному периоду $\omega > 0$. Для простоты (и в то же время без потери общности рассуждений) обычно полагают $\omega = 1$. Важное допущение состоит в том, что величины X_j ($j = 1, 2, \ldots$) предполагаются одинаково распределенными. Положим

$$f_j = \Pr\{X_n = j\},\ j = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Большая часть теории рекуррентных процессов строится для случая $X_0 = 0$, т. е. когда событие A обязательно происходит в начале отсчета времени. Именно этот частный случай и имеют всегда в виду, когда говорят о *рекуррентном процессе* или *процессе реализации рекуррентных событий*. Процессы более общего вида, в которых X_0 имеет некоторое произвольное распределение, называют *рекуррентными процессами с задержкой*. *В данном разделе мы ограничимся рассмотрением обычных рекуррентных процессов* (*т. е. процессов, для которых выполняется условие* $X_0 = 0$).

Пусть u_n — вероятность того, что событие A будет иметь место в момент времени n, а N_n — число появлений события A в интервале $[0, n]$. Следовательно, $u_n = \Pr\{N_n > N_{n-1}\}$. Учитывая, что $u_0 = 1$, легко убедиться, например, что

$$\mathscr{E}N_n = 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \tag{18}$$

Сумму $1 + \sum_{i=1}^{n} u_i$ обозначим через U_n. Нетрудно также показать, что если $\mu_1 = \mathscr{E}X_j < \infty$, то

$$\mathscr{E}N_n \sim \frac{n}{\mu_1} \text{ при } n \to \infty. \tag{19}$$

Величина μ_1 называется *средним временем возвращения* события A, а если $\mu_1 = \infty$, то говорят, что событие A является *невозвратным*.

Если X_j ($j = 1, 2, \ldots$) с вероятностью, равной единице, оказываются кратными некоторому целому числу, превышающему единицу, то соответствующий рекуррентный процесс называют *периодическим*; в противном случае говорят, что процесс является *апериодическим*. Нетрудно догадаться, что путем изменения масштаба на оси времени (т. е. путем перехода от одной временно́й шкалы к другой) можно превратить любой периодический процесс в апериодический. Таким образом, во всех последующих рассуждениях будем (без потери общности) предполагать, что рассматриваемый процесс является апериодическим. В этом случае приходим к исключительно важному утверждению, что

$$u_n \to \frac{1}{\mu_1} \text{ при } n \to \infty. \tag{20}$$

Этот предел существует даже при $\mu_1 \to \infty$, т. е. в этом случае $u_n \to 0$ (величину μ_1^{-1} при $\mu_1 = \infty$ иногда просто считают равной

нулю). С точки зрения приложений теории рекуррентных процессов в области операционных исследований весьма полезным следствием приведенного выше результата является утверждение, что для любой последовательности вещественных постоянных $\{a_n\}$, таких, что $\sum_0^\infty |a_n| < \infty$,

$$\sum_{j=0}^{n} u_j a_{n-j} \to \frac{1}{\mu_1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{ при } n \to \infty.$$

Здесь также при $\mu_1 = \infty$ необходимо положить $\mu_1^{-1} = 0$.

Рассмотрим, например, производящие функции фиктивной переменной ζ, $0 < \zeta < 1$, определяемые соотношениями

$$F(\zeta) = \sum_1^\infty f_n \zeta^n, \quad U(\zeta) = \sum_0^\infty u_n \zeta^n.$$

Легко доказать, что

$$u_n = f_n + f_{n-1} u_1 + \ldots + f_1 u_{n-1} \; (n = 1, 2, \ldots) \tag{21}$$

и, следовательно,

$$F(\zeta) = \frac{U(\zeta) - 1}{U(\zeta)}, \tag{22}$$

$$U(\zeta) = \frac{1}{1 - F(\zeta)}. \tag{23}$$

Положим $f = \sum_1^\infty f_n$. Для некоторых (представляющих практический интерес) рекуррентных событий $f < 1$. Такие события называются *невозвратными*; в противном случае (т. е. когда $f = 1$) говорят, что имеют место *возвратные* события. С помощью соотношения (22) можно доказать, что событие A является невозвратным, если $\sum_0^\infty u_n < \infty$, и что в этом случае

$$f = 1 - \frac{1}{\sum_0^\infty u_n}. \tag{24}$$

Это соотношение эффективно использовалось при исследовании многих весьма сложных процессов с целью выяснения их принадлежности к категории установившихся или неустановившихся процессов.

Если $\mu_2 = \mathscr{E} X_n^2 < \infty$, то, положив $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$, получим

$$\operatorname{Var} N_n \sim \frac{\sigma^2}{\mu_1^3} n \text{ при } n \to \infty. \tag{25}$$

$$\text{В частности, } \frac{N_n - n/\mu_1}{\sigma n^{1/2} \mu_1^{-3/2}} = \widetilde{N}_n \tag{26}$$

имеет асимптотически (т. е. при $n \to \infty$) нормированное нормальное распределение

$$\Pr\{\tilde{N}_n \leqslant x\} \to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2y^2}\, dy \text{ при } n \to \infty \tag{27}$$

для каждого фиксированного x. Соотношение (27) составляет содержание так называемой центральной предельной теоремы для рекуррентных событий, имеющей большое прикладное значение.

В тех случаях, когда $\mu_2 < \infty$, относительно u_n удается сформулировать более «тонкие» утверждения. В качестве примеров приведем следующие результаты, полученные в предположении, что $\mu_2 < \infty$:

$$\sum_{0}^{\infty} \left| u_n - \frac{1}{\mu_1} \right| < \infty, \tag{28}$$

$$U_n = \frac{n+1}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1) \text{ при } n \to \infty. \tag{29}$$

Вывод формул (28) и (29), так же как и соотношения (25), оказывается далеко не простым. Тем, кто интересуется строгим доказательством упомянутых выше формул, а также желающим подробнее познакомиться с рекуррентными процессами, следует обратиться к специальной литературе, посвященной этим вопросам.

5. ЦЕПИ МАРКОВА

Предположим, что исследуемая система в каждый данный момент времени может находиться в одном и только одном *состоянии* из некоторой последовательности возможных состояний $\mathscr{S}_0, \mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots$. Число возможных состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным. Допустим, что на каждом единичном отрезке времени рассматриваемая система может мгновенно переходить из одного состояния в другое. Далее предположим, что если система находится в состоянии $\mathscr{S}_i$, то вероятность ее перехода в состояние $\mathscr{S}_j$ равняется p_{ij}, причем выбор системой последующего состояния не зависит от ее поведения в прошлом и определяется лишь тем фактом, что в рассматриваемый момент времени система находится в состоянии $\mathscr{S}_i$. Таким образом, поведение системы полностью определяется *переходной матрицей* $[p_{ij}]$, обладающей следующими свойствами:

$$p_{ij} \geqslant 0 \text{ при любых } i \text{ и } j, \tag{30}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \leqslant 1 \text{ при любом } i. \tag{31}$$

Процесс называют *нестандартным*, когда имеет место строгое неравенство $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} < 1$, и *стандартным* в противном случае, т. е. когда $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$. Хотя в области исследования операций цепи Маркова возникают очень часто, нестандартные цепи Маркова появляются здесь чрезвычайно редко. Поэтому в данном разделе будем рассматривать лишь *стандартные* процессы.

Пусть $p_{ij}(n)$ — вероятность того, что система, находящаяся в начальный момент времени в состоянии $\mathscr{S}_i$, в момент времени n окажется в состоянии $\mathscr{S}_j$. Во многих приложениях желательно знать числовые значения различных переходных вероятностей $p_{ij}(n)$. Когда число допустимых состояний системы является конечным, вычисление $p_{ij}(n)$, за исключением случаев, когда число возможных состояний очень велико, особой трудности не представляет. Обозначив матрицу $[p_{ij}]$ через $\mathbf{P}$, можно записать

$$[p_{ij}(n)] = \mathbf{P}^n. \tag{32}$$

Если удается найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\mathbf{P}$, выражение (32) принимает еще более простой вид. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ (где N — число возможных состояний системы) — собственные значения матрицы $\mathbf{P}$ (имеющей в этом случае размерность $N \times N$). Отметим, что собственные значения матрицы $\mathbf{P}$, к сожалению, нередко принимают комплексные значения. Для простоты предположим, что все λ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ различны. Обозначим через $\underset{\sim}{\mathbf{y}}_j$ $(1 \times N)$-мерную вектор строку, ассоциированную с λ_j:

$$\underset{\sim}{\mathbf{y}}_j\mathbf{P} = \lambda_j\underset{\sim}{\mathbf{y}}_j. \tag{33}$$

Вектор-строку $\underset{\sim}{\mathbf{y}}_j$ можно нормировать путем деления каждого из ее элементов на число, равное значению наибольшего элемента данной строки. В результате получим вектор-строку, в которой по крайней мере один элемент равен единице, а остальные по модулю не превышают единицы. Введем в рассмотрение $(1 \times N)$-мерную вектор-строку $\underset{\sim}{\eta}_j$, в которой все элементы, за исключением j-го, равны нулю, а j-й элемент равен единице. Тогда можно подобрать постоянные числа $c_1, c_2, \ldots, c_N$, такие, что

$$\underset{\sim}{\eta}_i = c_1\underset{\sim}{\mathbf{y}}_1 + c_2\underset{\sim}{\mathbf{y}}_2 + \ldots + c_N\underset{\sim}{\mathbf{y}}_N. \tag{34}$$

Обозначим через $\underset{\sim}{\mathbf{p}}_i(n)$ вектор-строку $\{p_{i1}(n), \ldots, p_{iN}(n)\}$. Тогда с помощью соотношений (33) и (34) легко показать, что

$$\underset{\sim}{\mathbf{p}}_i(n) = c_1\lambda_1^n\underset{\sim}{\mathbf{y}}_1 + c_2\lambda_2^n\underset{\sim}{\mathbf{y}}_2 + \ldots + c_N\lambda_N^n\underset{\sim}{\mathbf{y}}_N. \tag{35}$$

В некоторых случаях с вычислительной точки зрения формула (35) оказывается более удобной, чем формула (32).

Множество состояний (обозначим его через $\hat{s}$) называется *замкнутым*, если не существует $\mathcal{S}_i$ внутри $\hat{s}$ и $\mathcal{S}_j$ вне $\hat{s}$, таких, что $p_{ij} > 0$. Таким образом, если система попадает в состояние, принадлежащее замкнутому множеству $\hat{s}$, то она никогда не выйдет за пределы этого множества. Если $\hat{s}$ состоит лишь из одного состояния, то это состояние называется *поглощающим*.

Состояние $\mathcal{S}_i$ называется *возвратным*, если однажды побывав в данном состоянии, система с вероятностью, равной единице, за конечное время вернется в это состояние. Таким образом, если $\mathcal{S}_i$ — возвратное состояние, то *с вероятностью, равной единице*, это состояние либо не реализуется вообще, либо реализуется бесконечное число раз.

Состояние $\mathcal{S}_j$ называется *достижимым* для состояния $\mathcal{S}_i$, если существует целое число n, такое, что $p_{ij}(n) > 0$. Будем называть состояния $\mathcal{S}_i$ и $\mathcal{S}_j$ *сообщающимися*, если $\mathcal{S}_j$ достижимо для $\mathcal{S}_i$, а $\mathcal{S}_i$ — для $\mathcal{S}_j$. Если $\hat{s}$ есть замкнутое множество состояний и притом такое, что любые два состояния этого множества оказываются сообщающимися, то будем говорить, что множество $\hat{s}$ является *неприводимым*. Пусть $\hat{s}(\mathcal{S}_i)$ — множество состояний, достижимых для $\mathcal{S}_i$. Тогда, если $\mathcal{S}_i$ — *возвратное* состояние, то $\hat{s}(\mathcal{S}_i)$ представляет собой неприводимое замкнутое множество возвратных состояний. Если $\mathcal{S}_j$ принадлежит $\hat{s}(\mathcal{S}_i)$, то $\hat{s}(\mathcal{S}_j)$ и $\hat{s}(\mathcal{S}_i)$ совпадают.

Можно связать с состоянием, скажем $\mathcal{S}_j$, некоторое рекуррентное событие A_j. Каждый раз, когда система будет попадать в состояние $\mathcal{S}_j$, будем говорить, что произошло событие A_j; нетрудно убедиться в том, что временные интервалы, разделяющие моменты попадания системы в состояние A_j, представляют собой независимые и одинаково распределенные случайные величины. Ясно, что состояние $\mathcal{S}_j$ возвратно, если возвратно A_j. Если A_j является возвратным и $\mu_1^{(j)}$ — среднее время возвращения события A_j, то величину $\mu_1^{(j)}$ называют также средним временем возвращения состояния $\mathcal{S}_j$. Событие $\mathcal{S}_j$ называют *положительным*, если $\mu_1^{(j)} < \infty$, и *нулевым* (или *нереализуемым*), если $\mu_1(j) = \infty$. Если A_j — *невозвратное* событие, то $\mathcal{S}_j$ также называют *невозвратным*. Каждое состояние цепи Маркова является либо положительным, либо нулевым, а также либо возвратным, либо невозвратным.

Нередко приходится решать задачи, в которых интервалы отсчета на временной оси кратны некоторому единичному интервалу и никакое изменение масштаба (если не считать искусственно построенных шкал, в которых единица измерения теряет смысл обычного времени) не может устранить свойства периодичности наблюдений. В таких случаях состояние $\mathcal{S}_j$, ассоциированное

с событием A_j, также называется периодически наблюдаемым.

Одной из наиболее замечательных теорем является утверждение о том, что если состояние $\mathscr{S}_j$ возвратно, то все состояния в $\hat{s}(\mathscr{S}_j)$ однотипны и реализуются с одним и тем же периодом. Таким образом, множество допустимых состояний любой цепи Маркова можно разбить на подмножества возвратных и невозвратных состояний, причем каждое из возвратных состояний можно однозначно отнести к вполне определенному неприводимому замкнутому множеству возвратных состояний одного и того же типа одинаковой периодичности наблюдений.

Можно выделить широкий класс задач, в которых рассматриваются системы, начальные состояния которых $\mathscr{S}_t$ являются невозвратными. Возникает вопрос: какова вероятность того, что система когда-нибудь «застрянет» в одном из неприводимых замкнутых множеств возвратных состояний (если по крайней мере одно такое множество действительно существует)? Обозначив через g_t упомянутую выше вероятность, можно записать

$$g_t = \sum_{s \in T} p_{ts} g_s + \sum_{s \in P} p_{ts}. \tag{36}$$

В первом слагаемом правой части соотношения (36) суммирование проводится по всем s, для которых $\mathscr{S}_s$ является невозвратным, тогда как во втором слагаемом суммирование проводится по таким s, которые соответствуют возвратным состояниям $\mathscr{S}_s$. Следовательно, придавая индексу t значения, соответствующие невозвратным состояниям $\mathscr{S}_t$, мы превращаем (36) в систему линейных уравнений относительно неизвестных g_t, g_s и т. д. Однако можно показать, что в случае, когда цепь является конечной (т. е. содержит конечное число состояний), система с вероятностью, равной единице, достигнет возвратного состояния. Таким образом, в этом случае каждая вероятность $g_t = 1$. Следует вместе с тем заметить, что для некоторых бесконечных цепей может существовать отличная от нуля вероятность того, что соответствующая система никогда не выйдет за пределы подмножества невозвратных состояний.

При решении практических задач методами исследования операций, как правило, можно ограничиться рассмотрением поведения системы в цепи, которая сама является неприводимым замкнутым множеством и кратко называется *неприводимой цепью*. Чтобы определить тип и периодичность наблюдения всех состояний в цепи, достаточно рассмотреть какое-нибудь одно из возможных состояний системы.

Предположим теперь, что цепь является неприводимой и апериодической (когда ни одно из состояний не является периодическим). Тогда при $n \to \infty$ для каждой фиксированной пары (i, j)

$$p_{ij}(n) \to \frac{1}{\mu_1^{(j)}} = u_j. \tag{37}$$

Заметим, что если одно из состояний, скажем $\mathscr{S}_j$, является нулевым, то оказываются нулевыми все состояния и $u_j = 0$ для всех j. Чтобы вычислить $\{u_j\}$ и определить, являются состояния системы нулевыми или положительными, обычно обращаются к так называемым уравнениям стационарности

$$y_j = \sum_{i=0}^{N-1} y_i p_{ij}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{38}$$

Если число возможных состояний системы равняется бесконечности, в соотношениях (38) полагаем $(N-1) = \infty$. Если удается найти ненулевые значения y_j, удовлетворяющие уравнениям (38) и такие, что $\sum_0^{N-1} |y_j| < \infty$, то делают вывод, что все возможные состояния системы положительны и

$$u_j = \frac{y_j}{\sum_0^{N-1} y_j}. \tag{39}$$

Известно, что если все возможные состояния системы положительны, должно выполняться условие $\sum_0^{N-1} u_j = 1$; именно в силу этого требования должно иметь место соотношение (39). Таким образом, числа $\{u_j\}$ задают распределение вероятностей над множеством допустимых состояний системы. С другой стороны, если удается доказать, что каждое решение уравнений (38) является либо нулевым ($y_j = 0$; $j = 0, 1, 2, \ldots$), либо таким, что $\sum_0^{N-1} |y_j| = \infty$, то делают заключение, что все состояния цепи нулевые.

Соотношения (39) имеют место как для неприводимых цепей, так и в тех случаях, когда условия неприводимости не выполняются. Здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда условия неприводимости выполняются. Следовательно, можно утверждать, что если период цепи равен ω (целое число!), то существует ровно ω собственных значений на окружности единичного радиуса, которые определяются выражениями

$$\exp \frac{2k\pi i}{\omega}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \omega - 1.$$

Все другие собственные значения (если они существуют) лежат внутри единичного круга.

Таким образом, для конечной *апериодической* неприводимой цепи можно положить $\lambda_1 = 1$ и считать, что $|\lambda_j| < 1$ при $j = 2, 3, \ldots, N$. Тогда из соотношения (35) следует

$$\underset{\sim}{\mathbf{p}}_i(n) \to c_1 \underset{\sim}{\mathbf{y}}_1 \text{ при } n \to \infty, \tag{40}$$

причем эта сходимость геометрически быстрая. Следовательно, для конечной апериодической цепи имеем еще одно доказательство сходимости к стационарному распределению (более информативное с точки зрения оценки быстроты сходимости).

Совершенно очевидно, что результаты, полученные в теории рекуррентных процессов, можно применить к цепям Маркова. Так, например, можно показать, что при надлежащих условиях число возвращений в некоторое состояние $\mathscr{S}_j$ имеет (асимптотически) нормальное распределение. Следует, однако, подчеркнуть, что в ряде случаев вычислительные процедуры, связанные с реализацией этого утверждения, оказываются чрезвычайно громоздкими.

6. МАРТИНГАЛЫ

Хотя *мартингалы* и не нашли широкого применения в работах по исследованию операций, связанные с ними теоретические проблемы усиленно разрабатываются, что отражено в литературе по теории вероятностей. Если учесть, что мартингалы являются весьма мощным инструментом теоретического анализа, можно ожидать, что они найдут в будущем широкое применение в области исследования операций.

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ — бесконечная последовательность случайных величин, таких, что $\mathscr{E} \mid Y_j \mid < \infty$ для любого значения j. Данная последовательность называется мартингалом, если

$$\mathscr{E} \{Y_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} = Y_n \tag{41}$$

для любого значения n. Условие (41) носит весьма общий характер. Действительно, оно просто означает, что математическое ожидание случайной величины Y_{n+1}, при условии если значения случайных величин Y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ известны, должно равняться Y_n. При этом не обязательно, чтобы одинаково распределенные случайные величины были взаимно независимыми.

Простой пример мартингала ассоциируется с игроком, удачно играющим по вечерам в различные азартные игры. Здесь мы просто делаем предположение, что все эти игры заканчиваются удачно в том смысле, что если игрок приходит в тот или иной вечер играть, располагая Y_n долларами, то он ожидает закончить игру с той же самой суммой. Ясно, что лишь немногие игроки удачливы в указанном смысле.

Важным результатом, имеющим отношение к мартингалам, является *критерий останова*. Пусть задан мартингал $Y_1, Y_2, \ldots$. Попытаемся использовать его для определения *рубежа*, на котором следует сделать *останов*. Допустим, что мы можем получить бесконечную последовательность измеримых функций вещественных переменных $\phi_1(y_1)$, $\phi_2(y_1, y_2)$, $\phi_3(y_1, y_2, y_3)$, ..., таких,

что

$$0 \leqslant \phi_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqslant 1$$

для всех значений n, $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Описываемый здесь подход весьма похож на тот, о котором шла речь в разделе, посвященном процессу случайного блуждания. Мы наблюдаем Y_1 и затем проводим случайное испытание, не зависящее от всех других испытаний и характеризующееся вероятностью успешного исхода $\phi_1(Y_1)$. Если это испытание не приводит к успеху, то $N = 1$. Если же испытание заканчивается успешно, то наблюдаем Y_2 и проводим следующее независимое случайное испытание, вероятность успешного исхода которого равняется $\phi_2(Y_1, Y_2)$. Если данное испытание не приводит к успеху, полагаем $N = 2$. Далее действуем аналогичным же образом. Таким образом, следуя правилу

$$Z_n = \begin{cases} Z_N, & \text{если } n \geqslant N, \\ Y_N, & \text{если } n < N, \end{cases}$$

сформируем новую последовательность $Z_1, Z_2, \ldots$ и т. д. Можно доказать, что Z-последовательность также является мартингалом; он был получен из Y-мартингала с использованием *критерия останова*.

Приведенный выше результат нередко оказывается полезным при решении весьма сложных задач. В качестве очень простой иллюстрации рассмотрим частицу, совершающую случайное блуждание. Обозначим координату данной частицы после n шагов через $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ $(S_0 = 0)$, где величины X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются независимыми и одинаково распределенными: $P\{X_j = +1\} = p$, $P\{X_j = -1\} = q$, $p + q = 1$. Если теперь положить $Y_n = (q/p)^{S_n}$, то нетрудно убедиться в том, что Y_n есть мартингал. Пусть правило останова таково, что для любого j

$$\phi(y_1, y_2, \ldots, y_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } y_j = -a \text{ или } +b, \\ 1 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Это правило совпадает с критерием, рассмотренным в разд. 3 согласно этому критерию, блуждание прекращается, как только оказывается достигнутым экран ($-a$ или $+b$). Теперь ясно, что Z_n равняется либо $(q/p)^{-a}$ (с некоторой вероятностью α), либо $(q/p)^b$ [с вероятностью $(1 - \alpha)$]. Следовательно,

$$\mathscr{E} Z_n \to \alpha (q/p)^{-a} + (1 - \alpha)(q/p)^b.$$

Но $\mathscr{E} Z_n = \mathscr{E} Z_0 = 1$ при всех n. Таким образом, приходим к уравнению, из которого легко определить α (заметим, что полученные результаты согласуются с результатами, приведенными в разд. 3).

Теория мартингалов позволяет также реализовать процедуру поиска *произвольной выборки*. Рассмотрим очень простой случай. Предположим, что рубеж останова N определяется так же, как это сделано выше, но $\Pr\{N < \infty\} = 1$. Тогда случайную величину Y_N получаем из мартингала $\{Y_n\}$ путем оптимальной выборки и при весьма общих условиях $\mathscr{E}Y_N = \mathscr{E}Y_0$.

Это можно использовать для получения других интересных результатов, относящихся к случайным процессам. Пусть, например, $X_1, X_2, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, характеризующиеся порождающей момент функцией $\phi(\theta) = \mathscr{E}e^{\theta X_j}$, где θ — некоторое вещественное число, а $\phi(\theta) < \infty$ в интервале $-\alpha < \theta < \beta$ (α и β — неотрицательные константы). Как обычно, положим $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ и примем в качестве правила останова N критерий, описание которого дано в разд. 2. Тогда $Y_n = e^{\theta S_n}\{\phi(\theta)\}^{-n}$ есть мартингал, причем $\mathscr{E}Y_n = 1$ при всех n. Следовательно, в соответствии с критерием оптимального останова $\mathscr{E}e^{\theta S_n}\{\phi(\theta)\}^{-N} = 1$. Таким образом, приходим к фундаментальному тождеству Вальда [формула (9)]. К сожалению, проверка «технических» условий, при которых можно использовать как представленные выше, так и другие результаты для случайной выборки, нередко связана со значительными трудностями.

Если для мартингала выполняется условие

$$\mathscr{E}\,|\,Y_n\,| < C < \infty \quad (C \text{ — константа})$$

при всех n, то, как показал Дуб, существует случайная величина Y, такая, что с вероятностью, равной единице, $Y_n \to Y$ при $n \to \infty$. Более того, $\mathscr{E}Y_n = \mathscr{E}Y$ для всех значений n. Это одна из формулировок *теоремы сходимости мартингалов*. Данная теорема эффективно применяется в теоретических исследованиях. К сожалению, мы не имеем возможности продемонстрировать это здесь на конкретных примерах.

7. ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Как уже отмечалось во введении к данной главе, процессы восстановления являются континуальным аналогом дискретных во времени процессов с рекуррентными событиями. Мы исходим из предположения, что имеется некоторая бесконечная последовательность независимых и одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{X_n\}$, характеризующихся функцией распределения $F(x) = \Pr\{X_n \leqslant x\}$ и моментами $\mu_1 = \mathscr{E}X_j$, $\mu_2 = \mathscr{E}X_j^2$ и т. д. Допустим, что событие, которое мы назовем *актом восстановления*, происходит в моменты времени $0, S_1, S_2, S_3, \ldots$

..., S_n и т. д., где

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим далее через $N(x)$ число актов восстановления в интервале времени $(0, x]$. Тогда $H(x) = N(x)$ (т. е. ожидаемое число актов восстановления к моменту времени x) называют *функцией восстановления*. Известно, что $H(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$H(x) = F(x) + \int_0^x H(x-z)\,F(dz), \tag{42}$$

к рассмотрению которого приходится прибегать при решении многих задач исследования операций.

В целях упрощения здесь будем предполагать, что функция $F(x)$ абсолютно непрерывна. Функция распределения определяется соотношением

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy. \tag{43}$$

Тем, кто интересуется более сложными структурами функции $F(x)$, рекомендуем обратиться к специальной литературе.

В элементарной формулировке так называемая *теорема восстановления* сводится к утверждению, что

$$H(x) \sim \frac{x}{\mu_1} \quad \text{при } x \to \infty. \tag{44}$$

Значительно более глубокая *теорема Блэкуэлла* формулируется следующим образом: для каждого фиксированного числа $c > 0$

$$H(x+c) - H(x) \to \frac{c}{\mu_1} \quad \text{при } x \to \infty \tag{45}$$

[в соотношении (45) величина μ_1^{-1} считается равной нулю, если $\mu_1 = \infty$].

Другой теоремой, по существу эквивалентной теореме (45), но более удобной для практического применения, является так называемая *ключевая теорема восстановления*, которая формулируется следующим образом: для абсолютно интегрируемых функций $k(x)$ при $x \to \infty$

$$\int_0^x k(x-z)\,H(dz) \to \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty k(z)\,dz. \tag{46}$$

Не так просто очертить класс функций $k(x)$, для которых выполняется условие (46). Однако, предположив здесь, что функция $F(x)$ является абсолютно непрерывной, мы должны руководст-

воваться следующими дополнительными требованиями: функция $k(x)$ должна быть ограничена сверху, стремиться к нулю при $x \to \infty$ и должно выполняться условие $\int_0^\infty |k(x)|\,dx < \infty$.

В тех случаях, когда моменты $\mu_n = \mathscr{E}X_j^n$ при больших значениях n являются конечными, можно сделать ряд важных заключений относительно кумулянтов функции $N(x)$. Если $n\ (\geqslant 1)$ и $p\ (\geqslant 0)$ принимают целочисленные значения и $\mu_{n+p+1} < \infty$, то существуют числа a_n и b_n, такие, что $k_n(x)$, т. е. n-й кумулянт функции $N(x)$, можно представить в виде

$$k_n(x) = a_n x + b_n + \frac{\lambda(x)}{(1+x)^p}. \tag{47}$$

В этом выражении a_n — функция моментов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, а b_n — функция $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$; $\lambda(x)$ — ограниченная функция, стремящаяся к нулю при $x \to \infty$. Если выполняется лишь условие $\mu_n < \infty$, то оказывается справедливым утверждение, что

$$k_n(x) \sim a_n x \text{ при } x \to \infty. \tag{48}$$

Весьма важными частными случаями полученных выше результатов (в каждом из которых необходимо выполнение условия $\mu_2 < \infty$) являются следующие соотношения:

$$H(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - 1 + o(1), \quad x \to \infty, \tag{49}$$

$$\operatorname{Var} N(x) \sim \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1^3}\, x, \quad x \to \infty. \tag{50}$$

Соотношение (49) иногда называют *второй теоремой восстановления*. При $\mu_2 < \infty$ приходим к результату, аналогичному тому, который был получен для рекуррентных событий, а именно: мы можем утверждать, что

$$\frac{N(x) - x/\mu_1}{\sigma x^{1/2} \mu_1^{-3/2}}$$

асимптотически (при $x \to \infty$) стремится к $N(0, 1)$. В приведенном выше выражении, как обычно, $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$.

Если для $f(x)$ записать преобразование Лапласа

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx,$$

где s — положительная вещественная величина, то нетрудно убедиться, что $\phi(s) \to 0$ при $s \to \infty$. Теперь представляется совершенно очевидным, что $\mathscr{E}e^{-sS_n} = \{\phi(s)\}^n$, так что для любого $x > 0$ имеем $e^{-sx} \Pr\{S_n \leqslant x\} \leqslant \{\phi(s)\}^n$. Однако $S_n \leqslant x$, если $N(x) \geqslant n$.

Таким образом, $\Pr\{N(x) \geqslant n\} \leqslant e^{sx}\{\phi(s)\}^n$ и тем более $P\{N(x) = n\} \leqslant e^{sx}\{\phi(s)\}^n$. Поскольку функция $\phi(s)$ может быть сделана сколь угодно малой (путем увеличения s), хвост распределения вероятностей $N(x)$ стремится к нулю быстрее, чем любой геометрический ряд. Следовательно, $\mathscr{E} e^{\theta N(x)} < \infty$ для любого значения $\theta < 0$ и, в частности, все моменты функции $N(x)$ конечны.

О процессах восстановления, и в частности о поведении функции $H(x)$, мы располагаем весьма подробными и глубокими сведениями. Многие результаты были получены в связи с поисками простых аппроксимаций и ограничений для $H(x)$; эти результаты, как правило, удавалось получить с помощью интегрального уравнения теории восстановления. Простой пример, предложенный Феллером, сводится к следующему. Если $B(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $B(x) \geqslant F(x)$, и если $A(x)$ — решение интегрального уравнения

$$A(x) = B(x) + \int_0^x A(x-z)\,F(dz), \tag{51}$$

то $A(x) \geqslant H(x)$. Аналогично условие $B(x) \leqslant F(x)$ приводит к неравенству $A(x) \leqslant H(x)$. Феллер предложил полагать $A(x) = \mu_1^{-1}x + C$ и искать минимальное значение C. В результате получаем $B(t) \geqslant F(t)$.

Следует отметить, что уравнения (51) и (42) имеют единственные решения, ограниченные на каждом конечном интервале [при условии, что в уравнении (51) функция $B(x)$ всюду ограничена].

8. КУМУЛЯТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В теории стохастических процессов получен целый ряд фундаментальных результатов для так называемых *кумулятивных* процессов, играющих важную роль в исследовании операций. Прежде чем перейти к изложению этих результатов, необходимо пояснить, что понимается под *процессом восстановления* (не следует смешивать его с процессом гораздо более общего характера, введенным в рассмотрение Дж. Ф. Кингманом под тем же названием). Пусть мы интересуемся стохастическим процессом, который, будучи функцией времени t, описывается случайной переменной $X(t)$. Заметим, что величина $X(t)$ может быть как вещественным скаляром, так и вещественным вектором. Обозначим через $\mathscr{X}$ пространство допустимых значений $X(t)$. Назовем «туром» $\mathscr{T}$ упорядоченную пару $\mathscr{T} = \{X, x(t)\}$, в которой X есть вещественное неотрицательное число, интерпретируемое как продолжительность тура, а $x(t)$ — функция, определенная на интервале $0 \leqslant t < X$ и принимающая в пространстве $\mathscr{X}$ вещественные значения. Пусть $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ — бесконечная последовательность независимых

и одинаково распределенных туров. Каждому должно быть ясно, что при решении практических задач необходимо быть уверенным в том, что в соответствующем пространстве $\mathscr{X}$ можно задать некоторую меру вероятности. Эту проблему здесь мы, естественно, не обсуждаем. Для нас важно лишь, что последовательность $X_1, X_2, X_3, \ldots$ описывает процесс восстановления. В уже знакомых читателю обозначениях можно определить стохастический процесс $X(t)$ для всех $t \geqslant 0$, записав

$$X(t) = x_{N(t)+1}(t + S_{N(t)}) \tag{52}$$

и положив $S_0 = 0$. Это означает, что мы выбираем тур, например $\mathscr{T}_1$. Таким образом, на отрезке времени $(0, X_1)$ имеем $X(t) = x_1(t)$. Как только на оси времени достигаем точки $t = X_1$, выбираем новый тур, скажем $\mathscr{T}_2 = \{X_2, x_2(t)\}$. Следовательно, на временно́м интервале $(X_1, X_1 + X_2)$ полагаем $X(t) = x_2(t - X_1)$. Продолжение этой процедуры совершенно очевидно. Практика показала, что весьма многие процессы, с которыми сталкиваются при исследовании операций, относятся к разряду процессов восстановления. При этом встает лишь проблема определения моментов времени, в которые начинаются новые туры; эти точки на оси времени называют точками восстановления. Как только эти точки пройдены, они уже не могут влиять на дальнейшее развитие процесса.

При самых общих условиях мгновенное (т. е. рассматриваемое в некоторый фиксированный момент времени) распределение вероятностей процесса типа процесса восстановления при $t \to \infty$ стремится к некоторому (в каждом случае конкретному) предельному распределению.

Частным, но исключительно важным примером процесса восстановления является *полумарковский* процесс, исследованию которого посвящено огромное количество публикаций. Процесс характеризуется последовательностью (возможно, конечной) состояний $\mathscr{S}_0, \mathscr{S}_1, \ldots$ и переходной матрицей $[\mathbf{p}_{ij}]$, аналогичной уже рассмотренной в связи с описанием цепей Маркова. Однако в данном случае вводится в рассмотрение еще одна матрица — так называемая матрица собственных функций распределения $[\Omega_{ij}]$. Процесс представляет собой серию последовательных переходов от состояния к состоянию, как в цепи Маркова, но, вместо того чтобы каждый раз оставаться в том или ином состоянии всего лишь в течение единицы времени, система задерживается в каждом из состояний на неопределенный (случайно выбранный) период, называемый периодом *ожидания*. Если система находится в состоянии $\mathscr{S}_i$, а следующим является состояние $\mathscr{S}_j$, то система задерживается в состоянии $\mathscr{S}_i$ в течение периода, имеющего функцию распределения $[\Omega_{ij}]$; эта задержка не должна зависеть от всех других обстоятельств протекания процесса. Если матрица $[\mathrm{p}_{ij}]$

соответствует неприводимой цепи и не все плотности вероятностей, соответствующие матрице $[\Omega_{ij}]$, равны нулю, полумарковский процесс развивается «разумным» образом с конечным числом переходов в единицу времени (с вероятностью, равной единице) и имеет *предельное* распределение вероятностей для допустимых состояний при $t \to \infty$.

Предположим теперь, что $X(t)$ есть процесс восстановления в том смысле, в каком мы его здесь понимаем, а $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, ассоциированных с данным процессом [т. е. X_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — продолжительности последовательных туров]. Пусть, как обычно, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Рассмотрим теперь процесс $W(t)$, обладающий следующими свойствами:

(C1) $W(S_1) - W(0), W(S_2) - W(S_1), W(S_3) - W(S_2), W(S_4) - W(S_3), \ldots$ представляет собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин;

(C2) $W(t)$ с вероятностью, равной единице, изменяется в конечных пределах на любом конечном интервале времени;

(C3) если в качестве *вариационного* процесса взять

$$\widetilde{W}(t) = \int_0^t |W(dt)|, \tag{53}$$

то, как нетрудно убедиться, $\widetilde{W}(t)$ также удовлетворяет (C1).

Процессы, описываемые функцией $\widetilde{W}(t)$, встречаются весьма часто. Обычно функция $\widetilde{W}(t)$ является неубывающей и выполнение условий (C1) и (C2) легко проверяется (в рассматриваемом случае $\widetilde{W} \equiv W$).

Предположим для простоты, что $W(0) = 0$. Рассмотрим теперь величину $\varkappa_r = \mathscr{E}\{W(S_1)\}^r$. Если существует момент $\widetilde{\varkappa}_r = \mathscr{E}\{\widetilde{W}(S_1)\}^r$, то легко можно убедиться, что из условия $\widetilde{\varkappa}_r < \infty$ вытекает $\varkappa_r < \infty$. Пусть, как обычно, $\mu_r = \mathscr{E}X_j^r$. Тогда, если $\mu_1 < \infty$ и $\widetilde{\varkappa}_1 < \infty$, то с вероятностью, равной единице, $W(t)/t \to \varkappa_1/\mu_1$ при $t \to \infty$. При тех же условиях $\mathscr{E}W(t)/t \to \varkappa_1/\mu_1$. Если при $\mu_2 < \infty$, $\widetilde{\varkappa}_2 < \infty$ ввести в рассмотрение величины $\sigma_1^2 = \mu_2 - \mu_1^2$, $\sigma_2^2 = \varkappa_2 - \varkappa_1^2$ и обозначить через ρ коэффициент корреляции между X_1 и $W(S_1)$, то будем иметь

$$\operatorname{Var} W(t) \sim \mu_1^{-1}\, t\,\{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(\varkappa_1/\mu_1) + \sigma_1^2(\varkappa_1/\mu_1)^2\},\ t \to \infty.$$

Кроме того, справедливо следующее утверждение: если $\widetilde{\varkappa}_2 < \infty$ и $\mu_1 < \infty$, то выражение

$$\frac{W(t) - \varkappa_1 N(t)}{\sigma_2 (t/\mu_1)^{1/2}} \tag{54}$$

при $t \to \infty$ асимптотически стремится к $N(0, 1)$. Если, однако, $\mu_2 < \infty$, то приходим к следующему, более удобному для использования в приложениях результату:

$$\frac{W(t) - \varkappa_1 t \mu_1^{-1}}{(\gamma t/\mu_1)^{1/2}}, \text{ где} \tag{55}$$

$$\gamma^2 = \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 (\varkappa_1/\mu_1) + \sigma_1^2 (\varkappa_1/\mu_1)^2$$

при $t \to \infty$ асимптотически стремится к $N(0, 1)$.

9. ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

Ветвящиеся процессы существенно отличаются от всех тех процессов, которые до сих пор здесь обсуждались. Рассмотрим сначала производящую функцию $\phi(s)$, соответствующую распределению вероятностей случайной величины, принимающей лишь целочисленные значения:

$$\phi(s) = \sum_0^\infty p_n s^n \quad (0 \leqslant s < 1),$$

где $p_j \geqslant 0$ для любого j, а $\sum_0^\infty p_j = 1$. Предположим, что в нулевом «поколении» g_0 имеется Z_0 объектов, которые будем называть частицами. Пусть каждая частица в первом поколении g_1 порождает случайное число частиц, т. е. в первом поколении вместо одной частицы будем иметь группу из n частиц, где n — случайная величина. Пусть эта случайная величина имеет распределение, задаваемое функцией $\phi(s)$, и предположим, что количества частиц в группах, порождаемых различными исходными частицами, являются независимыми случайными величинами. Таким образом, общий объем популяции в первом поколении g_1 равен Z_1 и характеризуется производящей функцией $\{\phi(s)\}^{Z_0}$. Аналогичным образом вместо Z_1 частиц поколения g_1 во втором поколении g_2 появляется Z_1 групп; при этом количество частиц в каждой группе представляет собой независимую случайную величину, определяемую производящей функцией $\phi(s)$. Таким образом, для численности второго поколения Z_2 производящая функция записывается в виде $\{\phi[\phi(s)]\}^{Z_0}$. Дальнейшее протекание процесса представляется совершенно очевидным. Описанная выше модель использовалась для анализа многих реальных явлений, таких, как ядерные реакции, процессы распространения мутаций, эпидемии и даже некоторые процессы социального характера. Ветвящимся процессам посвящено большое число публикаций. Здесь мы ограничились очень кратким описанием этих процессов и привели лишь некоторые (самые элементарные) сведения о их модельном представлении.

Самая первая (можно сказать классическая) проблема, возникшая в связи с исследованием ветвящихся процессов, заключалась в том, чтобы определить, наступит ли вырождение процесса, т. е. его полное угасание. Решающим параметром при ответе на этот вопрос является μ_1, среднее число частиц, порождаемых каждой частицей предшествующего поколения. Этот параметр задается следующей формулой: $\mu_1 = \sum_1^\infty np_n$. Если $\mu_1 \leqslant 1$, то с вероятностью, равной единице, ветвящийся процесс полностью угаснет. Если, однако, $\mu > 1$, то процесс угаснет с вероятностью ζ^{z_0}, где вещественная величина ζ удовлетворяет условиям $0 < \zeta < 1$ и $\zeta = \phi(\zeta)$.

10. ОБОБЩЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Процессы рождения и гибели являются частными случаями цепей Маркова, непрерывных во времени (в разд. 5 были рассмотрены цепи Маркова, дискретные во времени, поскольку там предполагалось, что переходы системы из одного состояния в другое происходят в каждую единицу времени). Кроме того, следует отметить, что процессы рождения и гибели имеют нечто общее с ветвящимися процессами.

Пусть заданы две последовательности неотрицательных констант $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$. Предположим, что в произвольно выбранный момент времени t процесс имеет амплитуду $X(t)$. Можно представить себе, что мы имеем дело с популяцией частиц и $X(t)$ есть размер этой популяции в момент времени t. Если $X(t) = n$, где n есть целое число, то будем предполагать, что на бесконечно малом интервале $(t, t + \delta t)$ возможны лишь следующие изменения величины $X(t)$:

$$X(t) \to n + 1 \text{ с вероятностью } \alpha_n \delta t + o(\delta t),$$
$$X(t) \to n - 1 \text{ с вероятностью } \beta_n \delta t + o(\delta t).$$

Если $n = 0$, второй из указанных переходов становится запрещенным, поскольку число частиц в популяции не может быть отрицательным. Далее предположим, что изменение $X(t)$ в интервале $(t, t + \delta t)$ не зависит от характера протекания процесса в прошлом (т. е. до момента времени t) и определяется лишь тем фактом, что $X(t) = n$. Последнее предположение есть так называемое марковское свойство процесса.

Если $p_n(t) = \Pr\{X(t) = n\}$, то нетрудно убедиться, что при $n \geqslant 1$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \alpha_{n-1} p_{n-1}(t) - (\alpha_n + \beta_n) p_n(t) + \beta_{n+1} p_{n+1}(t), \tag{56}$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\alpha_0 p_0(t) + \beta_1 p_1(t). \tag{57}$$

Получить решение данной бесконечной системы уравнений в общем виде невозможно. Однако в различных представляющих практический интерес частных случаях можно добиться желаемого успеха. Приведем несколько примеров.

а) *Рождение — гибель.* В этом случае имеем $\alpha_n = n\alpha$ и $\beta_n = n\beta$, где α и β — положительные константы. Можно ввести в рассмотрение производящую функцию

$$\prod(s, t) = \sum_0^\infty s^n p_n(t) \quad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$

и свести систему уравнений (56) и (57) к единственному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \prod}{\partial t} = (\alpha s - \beta)(s - 1)\frac{\partial \prod}{\partial s}. \tag{58}$$

Это уравнение является частным случаем дифференциальных уравнений Лагранжа в частных производных. Подобные уравнения при исследовании процессов рождения и гибели встречаются весьма часто. Имеются стандартные методы решения таких уравнений. Эти методы подробно изложены во многих учебных пособиях по дифференциальным уравнениям; однако, к сожалению, они не всегда оказываются эффективными. Наш пример является исключением. Если в начальный момент времени $t = 0$ популяция содержит m частиц и $\alpha \neq \beta$, то

$$\prod(s, t) = \left(\frac{e^{-(\alpha-\beta)t}(\alpha s - \beta) - \beta(s-1)}{e^{-(\alpha-\beta)t}(\alpha s - \beta) - \alpha(s-1)}\right)^m. \tag{59}$$

Из этого уравнения можно извлечь весьма важную информацию. Так, например, если $\alpha > \beta$, то $\Pi(s, t) \to (\beta/\alpha)^m$ при $t \to \infty$. Это означает, что в случае, когда $\alpha > \beta$, имеется вероятность $(\beta/\alpha)^m$ того, что популяция выродится и погибнет [так как $(\beta/\alpha)^m$ есть коэффициент при s^0 в предельном выражении производящей функции]. Поскольку в предельном выражении производящей функции других членов нет (и, следовательно, нет членов, содержащих s в той или иной положительной степени), приходим к заключению, что при $t \to \infty$ вероятность неограниченного увеличения популяции равняется $1 - (\beta/\alpha)^m$.

При $\alpha = \beta$ имеем частный случай, когда

$$\prod(s, t) = \left(\frac{s + \alpha t(1-s)}{1 + \alpha t(1-s)}\right)^m. \tag{60}$$

Заметим, что $\Pi(s, t) \to 1$ при $t \to \infty$. Таким образом, в случае когда $\alpha = \beta$, с вероятностью, равной единице, популяция непременно погибнет (размер популяции обратится в нуль). С помощью уравнения (59) можно показать, что то же самое произойдет при $\alpha < \beta$.

б) *Иммиграция — гибель.* В этом случае имеем (для констант $\alpha > 0$ и $\beta > 0$): $\alpha_n = \alpha$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\beta_n = n\beta$ при всех значениях n ($n = 1, 2, \ldots$). Уравнение (58) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \alpha (s-1) \Pi - \beta (s-1) \frac{\partial \Pi}{\partial s}. \tag{61}$$

Если снова предположить, что $\Pi(s, 0) = s^m$, то получим

$$\Pi(s, t) = [1 + e^{-\beta t}(s-1)]^m e^{(\alpha/\beta)(s-1)(1-e^{-\beta t})}. \tag{62}$$

Отсюда следует, что $\Pi(s, t) \to e^{(\alpha/\beta)(s-1)}$ при $t \to \infty$, т. е. получаем производящую функцию хорошо известного пуассоновского распределения со средним значением (α/β). Таким образом, если рассматривать процесс «иммиграция — гибель» в моменты времени, достаточно «удаленные» от начального момента времени, то распределение вероятностей для размера популяции в этом процессе окажется близким к пуассоновскому.

в) *Иммиграция — эмиграция.* В этом случае имеем $\alpha_n = \alpha$ ($n = 0, 1, \ldots$); $\beta_n = \beta$ ($n = 1, 2, \ldots$) и приходим к уравнению

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} \left[\alpha (s-1) + \beta \left(\frac{1}{s} - 1\right)\right] \Pi - \beta \left(\frac{1}{s} - 1\right) p_0(t). \tag{63}$$

Неизвестная вероятность $p_0(t)$ фигурирует в правой части уравнения (63); это новый тип уравнения, который в классических учебных пособиях, содержащих сведения по уравнениям Лагранжа, не рассматривается. Для решения уравнения (63) предлагались разные методы, которые из-за их специфичности здесь не приводятся. Поскольку уравнение (63) описывает неустановившиеся процессы, соответствующие очередям простейшего типа, оно рассматривается и решается в теории массового обслуживания. Случай (в) рассмотрен нами для того, чтобы показать, что даже при весьма простых предположениях относительно $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ могут возникнуть серьезные математические проблемы.

Следует, однако, заметить, что даже в тех случаях, когда та или иная обобщенная задача рождения и гибели оказывается неразрешимой, всегда можно найти соответствующее *предельное* (*стационарное*) распределение (если оно существует), положив $t \to \infty$. Прежде всего найдем числа

$$r_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_0}, \quad r_2 = \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_0\alpha_1}, \quad r_3 = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \quad \text{и т. д.} \tag{64}$$

Если ряд $S = 1 + \sum_1^\infty r_n$ расходится, стационарного распределения не существует. В случае, когда указанный ряд сходится, стационарное распределение задается стационарными вероятно-

стями π_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) наличия в популяции n частиц

$$\pi_0 = \frac{1}{s}; \quad \pi_n = \frac{r_n}{s}, \; n = 1, 2, \ldots. \tag{65}$$

11. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Теория стационарных процессов является в настоящее время чрезвычайно актуальным и исключительно важным направлением статистических исследований. Результаты этой теории нашли многочисленные приложения в области операционных исследований. Однако есть основания считать, что идея и методы теории стационарных процессов и временных рядов в области исследования операций используются недостаточно широко. В противоположность тем стохастическим процессам, которые выше рассматривались с помощью математической модели, содержащей последовательность случайных величин, исследование стационарного процесса, как правило, начинается с формулировки некоторых глобальных предположений.

Стационарный процесс в случае *непрерывного времени* ($-\infty < t < \infty$) будем обозначать через $\{X(t)\}$, а в случае *дискретного времени* — как $\{X_n\}$, где n принимает лишь целочисленные значения ($-\infty < n < \infty$). В большей части публикаций стационарный процесс в дискретном времени называют *временным рядом*. Для простоты ограничимся здесь обсуждением лишь временных рядов. Аналоги некоторых из результатов, полученных для временных рядов, имеются в теории стационарных процессов, непрерывных во времени; следует, однако, отметить, что в некоторых случаях анализ непрерывных во времени процессов сопряжен с необходимостью применения более сложного математического аппарата.

Последовательность $\{X_n\}$ является *стационарной в строгом смысле* этого слова, если выполняются следующие условия:

(S1) Для каждого конечного целочисленного $k > 0$, каждого набора k целых чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ и каждого набора k вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ вероятность

$$P\{X_{n_1+l} \leqslant x_1, X_{n_2+l} \leqslant x_2, \ldots, X_{n_k+l} \leqslant x_k\}$$

не зависит от l, где l — некоторое целое число, принадлежащее интервалу $(-\infty, +\infty)$.

Хотя многие процессы, с которыми сталкиваются специалисты по исследованию операций, с полным основанием можно рассматривать как стационарные в строгом смысле, тем не менее они образуют более широкий класс процессов, ставших предметом тщательного изучения в научных публикациях и являющихся мощным средством в операционных исследованиях. Это так называемые

стационарные процессы *второго порядка*, удовлетворяющие следующему условию [более слабому, чем условие (S1)]:

(S2) (а) $\mathscr{E}U_n$ и $\mathscr{E}(X_n)^2$ существуют для всех n и не зависят от n;
(б) Если $\mu = \mathscr{E}X_n$, среднее значение произведения $X_{n_1} - \mu$ и $X_{n_2} - \mu$, т. е.

$$\mathscr{E}(X_{n_1} - \mu)(X_{n_2} - \mu),$$

есть функция только $|n_1 - n_2|$.

При исследовании процессов такого рода удобно так выбрать шкалу отсчета, чтобы можно было положить $\mu = 0$ и $\mathscr{E}(X_n)^2 = 1$. Тогда будем иметь $\mathscr{E}X_{n_1}X_{n_2} = \rho(n_1 - n_2)$, где $\rho(\cdot)$ есть так называемая функция *автокорреляции*. Совершенно очевидно, что $\rho(0) = 1$ и $\rho(-h) = \rho(h)$.

Известно (или предполагается!), что каждая конечная совокупность $\{X_n\}$ имеет многомерное гауссово распределение; поэтому процесс $\{X_n\}$ будем называть *гауссовым*. Поскольку только что упомянутые многомерные распределения полностью определяются средними значениями $\{X_n\}$ и соответствующими ковариационными матрицами, должно быть очевидным, что стационарные гауссовы процессы являются фактически строго стационарными.

Предположим теперь, что $\{X_n\}$ — стационарный процесс второго порядка с вещественными значениями X_n. Важным результатом в теории стационарных процессов является так называемая теорема Винера — Хинчина. Согласно этой теореме, в интервале $[0, \pi)$ существует такая функция распределения $F(\cdot)$, что

$$\rho(n) = \int_0^\pi (\cos n\lambda)\, F(d\lambda) \tag{66}$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Таким образом, значения функции автокорреляции представляют собой не что иное, как коэффициенты Фурье в *спектральном распределении* $F(\cdot)$. Обратным по отношению к данному является следующее утверждение: если $F(\cdot)$ — некоторая функция распределения на интервале $[0, \pi]$, то существует стационарный процесс второго порядка [с вещественными $X(t)$], функция автокорреляции которого задается выражением (66).

В точке λ, в которой функция $F(\cdot)$ непрерывна, имеем

$$F(\lambda) = \frac{2\lambda}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \rho(n) \frac{\sin n\lambda}{n}. \tag{67}$$

Во многих задачах $F(\lambda) = \int_0^\lambda f(w)\, dw$, и производящая функция $f(w)$ называется *спектральной плотностью*. Из соотноше-

ния (67) чисто формально получаем

$$f(w) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \rho(n) \cos nw; \tag{68}$$

однако бесконечный ряд в соотношении (68) может оказаться расходящимся.

Чтобы понять, какое значение имеет спектральное распределение, нам потребовалось бы ввести в рассмотрение ряд понятий, строгая формулировка которых, вообще говоря, требует использования весьма сложного математического аппарата. Однако и эвристическое обсуждение этих понятий может оказаться полезным.

Предположим, что $Y(\lambda)$ — стохастический процесс [возможно, с комплексными значениями $Y(\lambda)$], зависящий от «временнóго» параметра λ, изменяющегося в интервале $(-\pi, \pi)$. Допустим также, что для любого выбора λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4, удовлетворяющих неравенствам $-\pi \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 < \lambda_4 \leqslant \pi$, величины $Y(\lambda_4) - Y(\lambda_3)$ и $Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1)$ не коррелированы, имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии. Поскольку не исключено, что эти величины примут комплексные значения, следует сформулировать подходящие для данного случая определения дисперсии и момента произведения. Если Z — комплексная случайная величина с нулевым математическим ожиданием, будем понимать под ее дисперсией число $\mathscr{E}\,|Z|^2$. Аналогичным образом, если Z_1 и Z_2 — комплексные случайные величины, то можно говорить о двух различных моментах, каждый из которых соответствует произведению одной величины на комплексно-сопряженное значение другой: $\langle Z_1, Z_2\rangle = \mathscr{E} Z_1 \overline{Z}_2$ и $\langle Z_2, Z_1\rangle = \mathscr{E} \overline{Z}_1 Z_2$. Утверждение, что Z_1 и Z_2 не коррелированы, эквивалентно утверждению, что $\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_2, Z_1\rangle = 0$. Если эти условия выполняются, процесс $Y(\lambda)$ называют процессом с *ортогональными приращениями*. Если $\varphi(\lambda)$ — некоторая непрерывная функция λ в интервале $[-\pi, \pi]$, то с помощью соответствующего предельного перехода, аппроксимирующего сумму, можно определить интеграл

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\lambda)\, dY(\lambda).$$

Тогда, если $\{X_n\}$ есть стационарный процесс второго порядка, то можно доказать, что существует процесс $Y(\lambda)$ с ортогональными приращениями, такой, что

$$X_n = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda}\, dY(\lambda) \tag{69}$$

для всех целочисленных значений n. Более того, если рассмотреть $G(\lambda) = \mathrm{Var}\{Y(\lambda) - Y(0)\}$, то будем иметь $G(\lambda) + G(-\lambda) = F(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant \pi)$, где $F(\cdot)$ — спектральная функция распределения данного процесса.

Предположим, что $F(\lambda)$ имеет скачкообразный разрыв, например в точке λ^*. Тогда

$$\mathscr{E}\,|Y(\lambda^* + 0) - Y(\lambda^* - 0)|^2 + \mathscr{E}\,|Y(-\lambda^* + 0) - \\ - Y(-\lambda^* - 0)|^2 > 0,$$

откуда следует, что $Y(\lambda)$ с ненулевой вероятностью также имеет скачкообразный разрыв в точках $-\lambda^*$ и $+\lambda^*$. В силу этого обстоятельства в интеграле (69) появляется член

$$e^{\pm in\lambda^*}\{Y(\pm\lambda^* + 0) - Y(\pm\lambda^* - 0)\},$$

представляющий чисто синусоидальные колебания с частотой $\lambda^*/2n$. Таким образом, если $F(\lambda)$ имеет скачок в точке λ^*, то с отличной от нуля вероятностью $\{X_n\}$ содержит чистую синусоидальную осцилляцию с частотой $\lambda^*/2\pi$. Аналогичным образом можно убедиться, что даже в том случае, когда возрастающая функция $F(\lambda)$ не имеет скачкообразного разрыва ни при каком значении λ, композиция $\{X_n\}$ со значительными (в среднем) весами содержит осцилляционные элементы $e^{\pm in\lambda}$. Когда спектральная функция распределения существует, функция $F(\lambda)$ быстрее всего возрастает в окрестности своих пиковых значений.

Один из способов, с помощью которого пытаются выявить «скрытые» частоты при анализе данных о временных рядах, заключается в предварительном получении оценок для $F(\lambda)$, что нередко достигается с помощью *анализа периодограмм*. Однако было обнаружено, что традиционный («классический») подход к проблеме имеет серьезные недостатки; поэтому была разработана специальная (причем весьма сложная) теория, в которой используется, в частности, понятие «спектральные окна». Обсуждение принципиальных положений этой теории в данной главе не предусматривается.

Авторегрессионные процессы

Класс стационарных процессов, известных под названием *авторегрессионных*, играет настолько важную роль при решении практических задач, что вполне заслуживает хотя бы краткого, но специального рассмотрения. В противоположность тому, что утверждалось в начале данного раздела, авторегрессионные процессы можно последовательно генерировать с помощью математической модели. Авторегрессионная схема k-го порядка основана

на использовании рекуррентного соотношения

$$X_n = a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \ldots + a_k X_{n-k} + Z_n, \tag{70}$$

где величины Z_n при любом n не зависят от X_{n-1}, X_{n-2}, ... и т. д. В соотношении (70) величины a_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) — константы, которые при решении практических задач можно считать вещественными. Однако, если мы потребуем, чтобы для того или иного стационарного процесса было справедливо уравнение (70), то увидим, что эти константы должны удовлетворять вполне конкретным ограничениям.

Обозначим корни уравнения

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x - 1 \tag{71}$$

через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и для простоты предположим, что все они различны. Тогда должно иметь место неравенство $|\lambda_j| > 1$ ($j = 1, 2, \ldots, k$), и можно записать

$$X_n = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j P'(\lambda_j)} \left\{ Z_n + \frac{Z_{n-1}}{\lambda_j} + \frac{Z_{n-2}}{\lambda_j^2} + \ldots \right\}. \tag{72}$$

Таким образом, X_n есть бесконечная линейная комбинация Z_n, Z_{n-1}, Z_{n-2}, ... и т. д.

Будем, как обычно, предполагать, что $\mathscr{E} Z_n = 0$, откуда следует, что $\mathscr{E} X_n = 0$ для всех значений n. Если, кроме того, допустить, что $\sigma^2 = \mathscr{E}(Z_n)^2 < \infty$, то с помощью соотношения (72) можно вычислить дисперсию X_n. Следует, однако, подчеркнуть, что в общем случае выражение для дисперсии X_n выглядит очень громоздко. Не так легко оказывается также получить из условия $|\lambda_j| > 1$ ($j = 1, 2, \ldots$), при котором генерируемый процесс стационарен, удобные для использования ограничения на константы $\{a_j\}$, за исключением частных случаев $k = 1$ (тривиальный случай!) и $k = 2$. Даже случай $k = 2$ оказывается весьма непростым. Поэтому мы отсылаем читателей, желающих ознакомиться с данным вопросом подробнее, к любопытной схеме, приведенной в хорошо известной монографии Бокса и Дженкинса [1]), которая посвящена стохастическим процессам.

В частном случае, когда $\{X_n\}$ является авторегрессионным процессом первого порядка, легко показать, что $\lambda_1 = 1/a_1$, так что должно выполняться условие $|a_1| < 1$. В этом случае получаем

$$\operatorname{Var} X_n = \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2} \tag{73}$$

---

[1]) Бокс Дж., Дженкинс Т. Анализ временных рядов. Прогноз и управление.— М.: Мир, 1974.— *Прим. ред.*

и для функции автокорреляции $\mathscr{E}X_nX_{n-m}/\mathrm{Var}\,X_n$ приходим к следующей формуле:

$$\rho(m) = (a_1)^m. \tag{74}$$

Авторегрессионная модель второго порядка нашла широкое прикладное применение, и с ее помощью удалось адекватно описать целый ряд явлений. Можно показать, что

$$\mathrm{Var}\,X_n = \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2(1+\lambda_1\lambda_2)\sigma^2}{(\lambda_1\lambda_2-1)(\lambda_1^2-1)(\lambda_2^2-1)} \tag{75}$$

и функция автокорреляции имеет следующий вид:

$$\rho(m) = \frac{1}{(\lambda_1\lambda_2+1)(\lambda_2-\lambda_1)}\left\{\frac{\lambda_2^2-1}{\lambda_1^{m+1}} - \frac{\lambda_1^2-1}{\lambda_2^{m+1}}\right\}. \tag{76}$$

Таким образом, если λ_1 и λ_2 вещественные, функция автокорреляции представляет собой линейную комбинацию двух геометрических рядов. Если же λ_1 и λ_2 являются комплексно-сопряженными, то, положив $\lambda_1 = re^{i\gamma}$, $\lambda_2 = re^{-i\gamma}$ ($r > 0$ и $0 < \gamma < \pi$), с помощью формулы (75) получим

$$\mathrm{Var}\,X_n = \frac{r^4(1+r^2)}{(r^2-1)(r^4-2r^2\cos\gamma+1)}. \tag{77}$$

При этом

$$\rho(m) = \frac{1}{r^m}\,\frac{\sin(k\gamma+\beta)}{\sin\beta}, \tag{78}$$

где

$$\mathrm{tg}\,\beta = \left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)\mathrm{tg}\,\gamma.$$

Модель скользящего среднего

Пусть снова $\{Z_n\}$ есть бесконечная последовательность ($-\infty < n < +\infty$) случайных величин, средние значения которых равны нулю, а дисперсии конечны и одинаковы для всех Z_n. Обозначим дисперсию каждой случайной величины из последовательности $\{Z_n\}$ через σ^2. Пусть $b_0, b_1, \ldots, b_k$ — конечные вещественные константы. Определим теперь величину X_n с помощью соотношения

$$X_n = b_0Z_n + b_1Z_{n-1} + \ldots + b_kZ_{n-k}. \tag{79}$$

Соотношение (79) порождает последовательность $\{X_n\}$ как скользящее среднее порядка $k+1$. Эта последовательность независимо от того, какие значения принимают коэффициенты b_j ($j = 0, 1, \ldots, x$), представляет собой стационарный процесс. Легко

убедиться, что

$$\operatorname{Var} X_n = \sigma^2 (b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_k^2) \tag{80}$$

и для m, удовлетворяющих условию $0 \leqslant m \leqslant k$,

$$\rho(m) = \frac{b_0 b_m + b_1 b_{m+1} + \ldots + b_{k-m} b_k}{b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_k^2}. \tag{81}$$

Ясно также, что $\rho(m) = 0$ при $m > k$. Отсюда следует, что модель скользящего среднего не пригодна в тех случаях, когда система в каждый заданный момент времени обладает эффектом последействия, сохраняющегося в течение большого промежутка времени.

Общие замечания

В данном разделе, посвященном стационарным процессам, была сделана попытка изложить идеи, на основе которых в теории стохастических процессов сформировалось целое направление. В результате изучения стационарных процессов получены важные конструктивные результаты, имеющие отношение к оценке спектральных распределений как в случае дискретных, так и непрерывных во времени процессов. Разработаны также методы формирования и проверки гипотез, относящихся к авторегрессионным и другим моделям. Весьма разветвленным направлением исследований является направление, связанное с разработкой методов экстраполяции и интерполяции стационарных процессов. Желающим ознакомиться с результатами этих исследований следует обратиться к специальной литературе.

ЛИТЕРАТУРА

Ниже приводится перечень книг, представляющих непосредственный интерес главным образом для тех, кто больше интересуется прикладными аспектами исследования операций, нежели чисто математическими обобщениями и деталями. Для повышения общеобразовательного уровня мы предлагаем следующие книги, в которых либо отдельные главы, либо весь материал имеют отношение к проблематике, затронутой в данной главе.

1. Bartlett M. S., An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge University Press, London, 1955.
2. Cox D. R., Miller H., The Theory of Stochastic Processes, Wiley, New York, 1965.
3. Feller W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1, 2nd. ed., Wiley, New York, 1975.
4. Parzen E., Stochastic Processes, Holden-Day, San Francisco, 1962.
5. Ross S. M., Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisco, 1970.
6. Takacs L., Stochastic Processes, Problems and Solutions, Methuen, London, 1960.

Небольшая книга Л. Такача в основном представляет собой сборник имеющих практическую значимость задач и их решений. Но вместе с тем

в ней содержится краткое изложение теоретических положений, имеющих отношение к рассматриваемым задачам. Более специализированный материал в достаточно простом изложении можно найти в следующих книгах:

7. Cox D. R., Renewal Theory, Methuen, London, 1962.
8. Cox D. R., Smith W. L., Queues, Methuen, London, 1961.
9. Kemeny J. G., Snell J. L., Finite Markov Chains, Van Nostrand Reinhold, New York, 1960.

Для получения более подробных сведений по теории и практическим приложениям временных рядов и стационарных процессов читатель может обратиться к следующим монографиям:

10. Box G. E. P., Jenkins G. M., Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco, 1970.
11. Whittle P., Prediction and Regulation, English Universities Press, London, 1963.

Тем, кто намерен более основательно познакомиться с теорией случайного блуждания, и в частности с тождествами типа тождества Шпитцера — Спарра — Андерсона, лучше всего начать с прекрасно написанной книги Шпитцера, посвященной основам теории случайного блуждания:

12. Spitzer F., Principles of the Random Walk, Van Nostrand Reinhold, New York, 1964.

III-2. Теория массового обслуживания

Ю. Бхат[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории массового обслуживания одним из основных является понятие очереди. Под очередью подразумевают линейную цепочку выстроившихся один за другим объектов, нуждающихся в том или ином виде обслуживания. Будем называть подлежащие обслуживанию объекты и обслуживающие «единицы» соответственно заявками на обслуживание (или требованиями) и обслуживающими приборами. Вероятно, каждому ясно, что́ понимается под заявками на обслуживание и обслуживающим прибором, если речь идет, например,

а) о поступлении на ремонтную базу требующих технического обслуживания транспортных средств, когда в зависимости от численности технического персонала ремонтная база может одновременно обслуживать одно или несколько транспортных средств;

б) о прибытии пациентов на прием к врачу, когда даже при наличии определенной системы предварительной записи по целому ряду причин число ожидающих может флуктуировать и, таким образом, возможно образование очереди;

в) о попытках дозвониться по телефону, когда набирающие телефонные номера индивидуумы нуждаются в обслуживании в виде телефонных разговоров;

г) о возникновении очереди у железнодорожной кассы.

Ситуации, когда в ожидании обслуживания образуются очереди, встречаются чрезвычайно часто. Как видно даже из приведенных выше примеров, реальные системы массового обслуживания в некоторых деталях отличаются друг от друга. Однако нетрудно заметить, что все они обладают определенными общими чертами: во всех системах массового обслуживания имеют место следующие основные элементы.

(а) *Входной поток* (поток поступающих требований, или заявок на обслуживание). Если акты поступления требований на обслуживание и процедуры обслуживания реализуются строго по графику, то очереди можно избежать. Но на практике все происходит иначе, и в большинстве случаев поступление требований зависит от внешних обстоятельств. Следовательно, лучшее, что можно сделать,— это описать процесс поступления требований через случайные величины. К числу основных показателей, необ-

[1)] U. Narayan Bhat, Southern Methodist University.

ходимых для описания входного потока, относятся характеристики источника требований, тип требований и длина интервалов времени между поступлениями требований.

(б) *Механизм обслуживания.* Системы массового обслуживания различаются числом обслуживающих приборов, количеством одновременно обслуживаемых требований, продолжительностью и типом обслуживания. Например, в задачах, возникающих при рассмотрении потоков в сетях, и в задачах составления графиков работы ремонтных предприятий приходится иметь дело с несколькими обслуживающими приборами, функционирующими последовательно и (или) параллельно. Указанные выше характеристики процесса обслуживания также описываются с помощью случайных величин.

(в) *Дисциплина очереди.* Все другие факторы, ассоциированные с правилами поведения очереди, можно включить в этот пункт. К их числу относятся прежде всего правила, в соответствии с которыми обслуживающий механизм принимает поступившую заявку к обслуживанию. В контексте данной главы такие правила, как «первым пришел — первым обслуживаешься» (ПЕРПО), «последним пришел — первым обслуживаешься» (ПОСПО) и «случайный отбор заявок» (СОЗ), однозначно расшифровываются своими названиями. Во многих ситуациях с целью придания описанию исследуемого процесса большего реализма приходится прибегать к понятию «приоритет». Ряд других факторов, которые также можно отнести к данному пункту, отражают особенности индивидуального поведения клиентов (уклонение от обслуживания, переход из одной очереди в другую, обманные действия и т. п.).

В теории массового обслуживания рассматриваются системы, обладающие указанными выше характеристиками; эта теория вооружает нас методологией и способами формализованного описания таких систем. В данной главе мы попытались отразить все то существенное, что было достигнуто в теории массового обслуживания за последние шестьдесят пять лет. Главная наша цель состоит в том, чтобы нарисовать общую картину, подчеркивая в этой области лишь наиболее важные аспекты и результаты. При этом мы не пытались сделать перечень публикаций по данным вопросам исчерпывающим. Приведенная библиография поможет читателю сэкономить время при подборе литературы, отвечающей его интересам.

Несколько слов следует сказать по поводу порядка изложения материала. Стараясь постоянно держать в фокусе реальные системы массового обслуживания, мы приводим наиболее существенные теоретические результаты без их строгого математического обоснования. Краткое описание математических методов анализа систем массового обслуживания содержится в разд. 7. Технические термины, такие, как марковский процесс, цепь Маркова

и т. п., используем, не давая точного их определения, и в предшествующих разделах; однако это не нарушает общей канвы изложения. Определения этих терминов можно найти в разд. 7.

2. ЗАДАЧИ ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Классификация целевых назначений теории массового обслуживания основана на выделении в ее структуре различных классов задач и соответственно областей применения получаемых результатов. Можно выделить следующие классы задач: 1) задачи анализа поведения системы; 2) статистические задачи; 3) операционные задачи. Области приложений теории массового обслуживания весьма разнообразны. К их числу, например, относятся транспортные системы, электронно-вычислительные комплексы, система медицинского обслуживания и т. п. В каждой из них возникают задачи, относящиеся к указанным выше классам.

(а) Задачи анализа поведения системы. Цель рассмотрения задач такого рода заключается в том, чтобы с помощью математических моделей, более или менее детально отражающих свойства реальных систем массового обслуживания, выявить операционные характеристики, определяющие поведение этих систем в процессе их функционирования. К числу основных операционных характеристик любой системы массового обслуживания относятся следующие:

$Q(t)$ — *длина очереди в момент времени* t, т. е. число требований, находящихся в системе в момент времени t (некоторые авторы определяют длину очереди как число требований, *ожидающих* обслуживания, т. е. не включают в $Q(t)$ требования, обслуживание которых уже начато);

Q_n — *длина очереди на n-й стадии*; при этом предполагается, что стадии реализуются в дискретном режиме и определяются теми или иными событиями (например, поступлением требования в систему или выбытием требования из системы);

$W(t)$ — *виртуальная продолжительность ожидания относительно момента времени* t, т. е. время ожидания обслуживания для требования, которое поступит в систему в момент времени t;

W_n — *продолжительность периода, в течение которого n-е требование ожидает обслуживания*;

T_i — *продолжительность периода занятости системы, начало которого соответствует* $Q(0) = i$, т. е. длина периода занятости системы, начинающегося при наличии в системе i требований (при $i = 1$, так же как и при $i = 0$ в момент, непосредственно предшествующий поступлению требования на обслуживание, систему принято считать начавшей функционировать, т. е. занятой);

I_n — *продолжительность n-го периода простоя системы*, т. е. длина интервала времени, в течение которого система в n-й раз оказывается незанятой (ясно, что в системах обслуживания периоды незанятости сменяются периодами занятости).

Наряду с указанными операционными характеристиками в исследованиях по теории массового обслуживания используются и их различные модификации, такие, как *полная продолжительность пребывания требования в системе*, *операционный цикл* (сумма продолжительностей периода занятости и непосредственно следующего за ним периода простоя), *суммарное полезное время* (доля времени, в течение которого обслуживающий механизм находится в состоянии загруженности). Поскольку процесс поступления требований и (или) процесс обслуживания носят случайный характер, то $Q(t)$, Q_n, $W(t)$ и W_n представляют собой случайные процессы в соответствующих пространствах состояний и параметров, а T_i и I_n являются случайными величинами. Определение свойств распределений и моментов $Q(t)$, Q_n, $W(t)$, W_n, T_i и I_n и есть та основная цель, которую преследуют при моделировании и анализе поведения систем массового обслуживания.

Следует заметить, что длина очереди не зависит от дисциплины очереди при условии, что а) в течение всего периода, пока в системе имеются неудовлетворенные требования, обслуживающий механизм не прекращает функционировать, б) обслуживание любого требования доводится до конца и в) дисциплина очереди не основана на приоритете динамического типа. В случае когда имеет место дисциплина ПЕРПО и система располагает лишь одним обслуживающим прибором, виртуальная продолжительность ожидания фактически совпадает с длительностью периода загрузки обслуживающего прибора.

Многие системы массового обслуживания обладают тем свойством, что по истечении определенного времени их поведение в некотором смысле стабилизируется. Формально это выражается в появлении определенных свойств процессов $\{Q(t)\}$, $\{W(t)\}$ при $t \to \infty$ и $\{Q_n\}$ и $\{W_n\}$ при $n \to \infty$. Для удобства будем в дальнейшем пользоваться следующими обозначениями: $Q(\infty) = Q$, $W(\infty) = W$, $Q_{n\to\infty} = Q_\infty$ и $W_{n\to\infty} = W_\infty$. Когда поведение системы полностью стабилизируется (т. е. перестает меняться с течением времени), говорят, что процесс ее функционирования является стационарным, или равновесным. Условия, при которых системы переходят в стационарное состояние, представляют значительный интерес.

На практике удобнее оперировать простыми и легко измеримыми показателями, нежели сложными формулами для распределений вероятностей и моментов. Выбор показателей такого рода, разумеется, зависит от характера исследуемой системы и целей анализа. В этой связи можно подчеркнуть, что наиболее часто

используемым показателем является степень загруженности обслуживающего прибора, определяемая коэффициентом нагрузки системы

$$\rho = \frac{\text{Приведенная интенсивность поступления требований}}{\text{Приведенная интенсивность обслуживания}}.$$

(б) Статистические задачи. Статистическое исследование является неотъемлемой частью разработки математической модели реальной системы. В общем виде модель может существовать сама по себе, но приведение ее в количественное соответствие с конкретной системой массового обслуживания достигается путем статистического анализа эмпирических данных, оценивания фигурирующих в модели параметров и проверок исходных гипотез.

Параметрами системы, по существу, являются параметры, ассоциированные с процессом поступления требований и механизмом обслуживания (либо некоторые функции этих параметров). Это утверждение нетрудно конкретизировать. Пусть требования $C_1, C_2, \ldots$ поступают соответственно в моменты времени $t_1, t_2, \ldots$. Величина $U_n = t_n - t_{n-1}$ есть длина временнóго интервала между моментами поступления требований C_{n-1} и C_n. Обозначим через V_n продолжительность обслуживания требования C_n. (В случае когда требования поступают группами, эти определения необходимо надлежащим образом модифицировать; кроме того, следует ввести понятие распределения применительно к размеру группы.) Пусть $A(x) = \Pr\{U_n \leqslant x\}$ $(x \geqslant 0)$ и $B(x) = \Pr\{V_n \leqslant x\}$ $(x \geqslant 0)$. (Для упрощения обозначений индекс n, которым следовало бы снабдить величины $A(x)$ и $B(x)$, опущен.) Таким образом, параметрами системы являются параметры функций $A(x)$ и $B(x)$, распределения вероятностей некоторых других величин (например, в случае групповых поступлений — размера групп), а также физические характеристики системы, такие, как количество обслуживающих приборов, число очередей, вместимость пространства, отведенного для требований, ожидающих обслуживания и т. д. Таким образом, статистические задачи, возникающие при исследовании систем массового обслуживания, связаны с оценкой параметров основных процессов, протекающих в системе.

(в) Операционные задачи. Существование в теории массового обслуживания задач операционной направленности и позволяет считать эту теорию одним из разделов исследования операций. Разумеется, некоторые из операционных задач по своей природе относятся к разряду статистических. Другие операционные задачи возникают при проектировании систем массового обслуживания, управлении реальными системами массового обслуживания и оценках их эффективности. Таким образом, при постановке операционных задач следует различать описательный и нормативный подходы. В первом случае описание системы через ее операционные

характеристики (характеристики поведения) используется для принятия решений относительно режима функционирования данной системы. С другой стороны, при нормативном подходе путем математического моделирования протекающих в системе процессов устанавливаются нормативные требования (нормативы) по обеспечению эффективной работы системы. Например, с учетом экономических (стоимостных) и физических ограничений можно установить такие скорости обслуживания, которые оптимизируют надлежащим образом построенную целевую функцию. Укажем теперь некоторые из областей, где теория массового обслуживания нашла весьма полезное применение.

3. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

Как и любой раздел прикладной математики или исследования операций, теория массового обслуживания возникла в связи с решением практических задач. Если обратиться к самой ранней истории вопроса, то следует упомянуть опубликованную в 1907 г. (и вторично появившуюся в 1910 г. в журнале Post Office Electrical Engineers Journal, London) статью Джоанисена «Продолжительности ожидания и число попыток выйти на связь в телефонной сети» (Waiting Times and Number of Calls). По-видимому, это была первая научная публикация по проблеме очередей. Следует, однако, заметить, что используемые в этой работе методы не являются математически строгими; первой математически корректной работой по теории очередей следует считать работу Эрланга «Теория вероятностей и телефонные разговоры» [Erlang A. K., The Theory of Probabilities and Telephone Conversations, *Nyt tidsskrift for Matematik*, **B-20**, 33 (1909)]. Таким образом, первые шаги в теории массового обслуживания были сделаны в связи с исследованиями систем связи. Системы связи как объекты приложений теории массового обслуживания и в настоящее время являются доминирующими, а если говорить о том вкладе в теорию массового обслуживания, который принадлежит специалистам в области проектирования и оптимизации сетей связи, то его трудно переоценить.

В связи с обсуждением всевозможных приложений теории массового обслуживания Морз [114] провел классификацию посвященных этому вопросу статей и книг, опубликованных в период с 1909 г. по 1960 г. включительно. Следует обратить внимание на следующий факт: из 753 публикаций (статей и книг), указанных в библиографии к книге Саати [150], 486 носят прикладной характер и 267 — общетеоретический. Из упомянутых выше 486 публикаций 222 имеют отношение к системам связи, 125 — к транспортным системам (автомобильный и железнодорожный транспорт, авиация), 53 — к системам обслуживания и остальные 86 работ

касаются приложений теории массового обслуживания в таких областях, как управление запасами, управление производством, здравоохранение, управление водными ресурсами и физика. Даже сейчас этот перечень областей применения методов теории массового обслуживания представляется весьма показательным и помогает увидеть перспективы развития этого важного раздела исследования операций. После 1960 г. появилась другая важная сфера приложений теории массового обслуживания — проектирование и создание электронно-вычислительных комплексов.

Для обеспечения эффективности усилий, связанных с исследованием современных систем массового обслуживания, важно, чтобы соответствующие теоретические разработки постоянно были на уровне самых сложных практических задач. Именно поэтому специалисту-теоретику важно иметь представление о различных областях применения методов теории массового обслуживания.

Первая работа по применению теории массового обслуживания в системах связи Эрланга (Брокмайер и др., 1948 г.) была продолжена рядом исследователей (C. D. Crommelin, C. Palm, A. E. Vaulot, P. J. Burke, V. Beneš, R. I. Wilkinson, J. Riordan и др.). Большую и полезную роль в этой области сыграли также серьезные теоретические исследования, выполненные такими специалистами, как Поллачек, Хинчин и Такач. Наиболее важные работы по применению теории массового обслуживания в системах связи печатаются в двух крупных журналах: The Bell System Technical Journal и Ericsson Technics [1]). Ссылки на статьи, посвященные исследованиям систем связи с позиции теории массового обслуживания, можно найти в упомянутых выше журналах, докладах международных конференций по проблемам телетрафика, а также в книгах Сиски [161], Риордана [147], Бенеша [8] и Купера [42].

За последние годы существенно усовершенствованы модели массового обслуживания в транспортных системах. Следует отметить, что во многих случаях транспортные модели содержат как стохастические, так и детерминированные элементы. Применительно к автодорожному графику это положение удачно проиллюстрировано в работе [70]. Тем не менее теория массового обслуживания продолжает оставаться одним из наиболее эффективных средств анализа транспортных систем. Статьи по этим вопросам можно найти в специализированных журналах, таких, как Transportation Science, и в ряде других журналов по исследованию операций. Полезно также познакомиться с книгами Хейта [70] и Ли [97].

По мере усложнения электронно-вычислительных систем возникла необходимость в разработке моделей для решения проблем-

[1]) Из отечественных журналов можно назвать «Проблемы передачи информации». Изд-во АН СССР.— *Прим. ред.*

мы их эффективного использования, и в частности проблемы предотвращения «заторов». Вопросам использования методов и конкретных результатов теории массового обслуживания для анализа проблемы пропускной способности вычислительных комплексов посвящен ряд работ, опубликованных в журналах соответствующего профиля (Journal of the Association for the Computing Machinery, Communications of the Association for the Computing Machinery, SIAM Journal on Computers и др.).

Системы технического обслуживания также относятся к числу типичных систем массового обслуживания. С ними мы сталкиваемся, например, когда речь идет о профилактическом ремонте технических средств. Статьи по вопросам применения теории массового обслуживания в этих и многих других ситуациях можно найти в узкопрофилированных журналах, а также в журналах, широко освещающих проблемы исследования операций.

Важно понимать, в чем состоит принципиальное различие между работой, цель которой заключается в расширении математического фундамента теории массового обслуживания, и работой сугубо прикладного характера. В первом случае основное внимание уделяется общей структуре математических построений и методам получения решений в общем виде, тогда как во втором случае на основе общих структур строят простые модели, а от общих математических решений переходят к практически значимым результатам. Эти результаты удается представить либо в численном виде, либо в форме, удобной для выполнения вычислительных процедур.

Дав общую характеристику задач и проблемных областей теории массового обслуживания, мы перейдем к рассмотрению некоторых наиболее важных результатов, достигнутых при исследовании систем массового обслуживания различных типов за последние шестьдесят пять лет. При этом будем следовать указанной выше классификации задач и областей приложения теории массового обслуживания.

Прежде чем рассмотреть различные классы систем, целесообразно ввести некоторые обозначения. Широко используемые обозначения, предложенные Кендаллом [82], позволяют описать системы массового обслуживания с помощью следующих трех элементов:

Вид входного потока/Распределение продолжительности обслуживания/Число обслуживающих приборов.

Различные распределения обозначаются буквами. Обычно используются следующие буквенные обозначения: M — пуассоновское (или экспоненциальное) распределение (M отражает тот факт, что процесс обладает марковским свойством), D — постоянная величина, E_k — распределение Эрланга (гамма-распределение

с целочисленным параметром k), G — произвольное распределение (распределение общего вида) и GI — распределение в случае независимых (рекуррентных) событий. В имеющихся публикациях можно встретить и другие варианты описания систем массового обслуживания; к различного рода модификациям указанного трехэлементного представления прибегают с целью более полного и адекватного описания исследуемых систем. Однако мы ограничимся обозначениями Кендалла (с помощью трех элементов) и в случае необходимости будем использовать другие характеристики системы.

Таким образом, под системой M/D/s понимается система с s приборами, обслуживающими поступающие требования за строго определенное время, причем интервалы времени между последовательными поступлениями требований распределены по закону Пуассона (или, как мы будем говорить, входной поток является пуассоновским).

4. АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМ

В теории массового обслуживания пуассоновское распределение занимает особое место. Впервые оно было получено Пуассоном и рассмотрено в его трактате по теории вероятностей, изданном в 1837 г. Важность этого распределения для моделирования систем телефонной связи была установлена Эрлангом в его работе, на которую мы уже ссылались. Свойство отсутствия памяти (отсутствия последействия), присущее экспоненциальному распределению, в значительной степени упрощает исследование систем массового обслуживания. Таким образом, в силу своей реалистичности и простоты пуассоновские процессы играют в теории массового обслуживания доминирующую роль. Это обстоятельство нашло отражение и в приведенном ниже материале.

Исторический обзор работ по теории массового обслуживания можно найти в работе [18]. Если проследить за развитием этой теории, то можно увидеть, что при анализе систем массового обслуживания сначала основное внимание уделялось стационарному (установившемуся) поведению этих систем. В этом нет ничего удивительного: результаты, получаемые в стационарных случаях, легко интерпретируемы и полезны с практической точки зрения. Однако для более точного исследования поведения системы анализ ее функционирования в неустановившемся (переходном) режиме становится совершенно необходимым. Как правило, нестационарную фазу поведения даже относительно простой системы удается исследовать лишь в результате весьма трудоемкого анализа с использованием сложных математических методов.

Понятие статистического равновесия для вероятностных процессов появилось в результате обобщения эргодического принципа, разработанного в связи с применением статистических методов в теоретической физике. На основе этого принципа Эрланг (1948 г.) получил ряд важных результатов в теории телетрафика. Эргодический принцип состоит в следующем: если система функционирует бесконечно долго, то влияние начального состояния этой системы на ее текущее поведение исчезает и система начинает функционировать в таком режиме, когда вероятности пребывания системы в различных состояниях не зависят от времени (т. е. имеет место стационарный процесс). В системах с конечным числом допустимых состояний стационарность достигается при условии, что эти состояния принадлежат к одному неприводимому классу (т. е. образуют множество сообщающихся состояний). Что касается систем с бесконечным числом возможных состояний, то в большинстве случаев для статистического равновесия требуется, чтобы коэффициент нагрузки системы ρ удовлетворял условию $\rho \leqslant 1$. (Разумеется, в системах сложного типа этот параметр нужно сначала адекватным образом определить.)

В системах связи коэффициент нагрузки ρ, определяемый как доля времени, в течение которого обслуживающий прибор оказывается загруженным, принят в качестве международной единицы измерения, которую назвали *эрлангом* (как свидетельство признания того большого вклада, который внес Эрланг в теорию телетрафика [161]).

Тот факт, что с помощью теории статистического равновесия нельзя описать микродинамику стохастических процессов, протекающих в системах массового обслуживания, еще в 1934 г. отметил Поллачек [127]. Поллачек и другие ученые получили ряд важных результатов, которые не только придали больший вес теории массового обслуживания как разделу прикладной математики, но и явились существенным вкладом в теорию вероятностей.

Последующий материал данной главы посвящен рассмотрению наиболее важных результатов теории массового обслуживания, которые приводятся отдельно для систем с единственным обслуживающим прибором, многоканальных систем и некоторых других вариантов массового обслуживания.

4.1. Система M/M/1

Модель системы, имеющей лишь один обслуживающий прибор и характеризующейся пуассоновским распределением продолжительностей интервалов времени между последовательными поступлениями требований и экспоненциальным распределением длительностей обслуживания, в теории массового обслуживания исполь-

зуется чаще, чем любая другая модель. Обозначим через λ и μ соответственно интенсивность поступления требований (количество требований, поступающих в систему в единицу времени) и интенсивность обслуживания (число требований, обслуживаемых в единицу времени). По определению, коэффициент нагрузки ρ равняется λ/μ.

Модель M/M/1 может быть получена (как частный случай) из моделей M/G/1, GI/M/1, GI/G/1, из соответствующих моделей с несколькими обслуживающими приборами, а также из других модификаций перечисленных выше моделей. Таким образом, исходные посылки для исследования равновесного поведения системы M/M/1 можно получить, обратившись к модели M/M/s, разработанной Эрлангом [110]. Пусть $\pi_j = \Pr\{Q = j\}$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$). Имеем

$$\pi_j = (1-\rho)\rho^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

$$E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \text{и} \quad \operatorname{Var}[Q] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}. \tag{2}$$

Метод, с помощью которого были получены эти соотношения, основан на использовании так называемых корреляционных уравнений Эрланга (как выяснилось позднее, эти уравнения являются частным случаем уравнений Колмогорова — Чэпмена для марковских процессов). В случае равновесного процесса эти уравнения называют также уравнениями баланса [19].

В случае когда имеет место дисциплина ПЕРППО и, следовательно, время ожидания обслуживания совпадает с продолжительностью пребывания обслуживающего прибора в состоянии загруженности, имеем

$$F(x) = \Pr\{W \leqslant x\} = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)x}, \tag{3}$$

$$E[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \quad \text{и} \quad \operatorname{Var}[W] = \frac{\rho(2-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2}. \tag{4}$$

Из формул (2) и (4) получаем следующие соотношения:

$$\frac{1}{\mu} E[Q] = E[W] \quad \text{и} \quad E[Q] = \lambda E\left[W + \frac{1}{\mu}\right]. \tag{5}$$

Первое из них справедливо лишь в случае, когда длительности обслуживания распределены по экспоненциальному закону, тогда как второе имеет место при самых общих условиях.

Пусть

$$P_{ij}(t) = \Pr\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\}. \tag{6}$$

Тогда

$$P_{i0}(t)=\frac{1}{\mu t}e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{r=i+1}^{\infty} r\rho^{r/2}I_{-r}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t), \tag{7}$$

$$P_{ij}(t)=e^{-(\lambda+\mu)t}[\rho^{(j-i)/2}I_{j-i}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)+$$
$$+\rho^{(j-i-1)/2}I_{j+i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)+$$
$$+(1-\rho)\rho^{j}\sum_{k=j+i+2}^{\infty}\rho^{-k/2}I_k(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)],\quad j=1,2,\ldots, \tag{8}$$

где $I_j(x)$ — модифицированная функция Бесселя, определяемая соотношением

$$I_j(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2n+j}}{n!\,(n+j)!} \tag{9}$$

[3, 32, 35, 38, 96]. Описание методов, с помощью которых были получены соотношения (7) и (8), можно найти в работе [133]. Выразив переходные вероятности $P_{ij}(t)$ через тригонометрические функции, Морз [112] определил функцию автокорреляции $\psi(t)$ для длины очереди $Q(t)$:

$$\psi(t)=\frac{\lambda^2}{(\mu-\lambda)^2}+(\mu-\lambda)\frac{\lambda\mu}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta e^{-\omega t}}{\omega^3}\,d\theta, \tag{10}$$

где $\omega=\mu+\lambda-2\sqrt{\lambda\mu}\cos 0$. Функция $\psi(t)$ обладает частотным спектром

$$W(f)=4\lambda\mu\left(\frac{\mu-\lambda}{\pi}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\omega^2(\omega^2+4\pi^2f^2)}. \tag{11}$$

Скорость, с которой распределение величины $Q(t)$ приближается к своему предельному значению ($\{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$), определяется временем релаксации $t\approx 2\lambda/(\mu-\lambda)^2$. (См. также [37].)

Для анализа неустановившегося поведения системы M/M/1 весьма полезными являются следующие асимптотические соотношения, полученные Прабху [134]:

	$\rho<1$	$\rho=1$	$\rho>1$
$E[Q(t)]$	$\frac{\lambda}{\mu-\lambda}+o(1)$	$2\sqrt{\frac{\lambda t}{\pi}}+o(\sqrt{t})$	$(\lambda-\mu)t+o(1)$
$\mathrm{Var}[Q(t)]$	$\frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2}+o(1)$	$2\lambda t\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+o(t)$	$(\lambda+\mu)t+o(t)$

(12)

и при $\rho = 1$

$$\Pr\left\{\frac{Q(t)}{\sqrt{2\lambda t}} \leqslant x\right\} \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy, \tag{13}$$

а при $\rho > 1$

$$\Pr\left\{\frac{Q(t)-(\lambda-\mu)t}{\sqrt{(\lambda+\mu)t}}\right\} \leqslant x\right\} \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy. \tag{14}$$

(Величина $o(t)$ такова, что $\lim [o(t)/t] = 0$.) В работе [134] можно найти аналогичные результаты для $W(t)$.

При исследовании систем типа M/M/1 большое внимание уделялось также распределению продолжительностей периода занятости обслуживающего прибора. Плотность вероятности $g_i(t)$ для T_i можно представить в следующем виде [122, 81, 4, 131]:

$$g_i(t) = \frac{i}{t} \rho^{-i/2} e^{-(\lambda+\mu)t} I_i\left(2\sqrt{\lambda\mu}\, t\right). \tag{15}$$

В случае когда имеет место дисциплина ПОСППО, продолжительности ожидания распределены по формуле (15). Распределение вероятностей продолжительностей ожидания в случае СОЗ рассматривается в работах [124] и [147].

В условиях статистического равновесия выходной поток также является пуассоновским с параметрами, совпадающими с параметрами входного потока [31, 144, 145].

4.2. Система M/G/1

Во многих реальных ситуациях предположение о пуассоновском распределении длин интервалов между поступлениями требований более естественно, чем предположение об экспоненциальном распределении продолжительности обслуживания. Кроме того, имеющиеся в нашем распоряжении методы анализа позволяют получать полезную информацию даже в тех случаях, когда пуассоновским является лишь либо входной поток, либо процесс обслуживания. Действительно, за последние четыре десятилетия были предприняты всесторонние исследования систем M/G/1, характеризующихся пуассоновским распределением моментов поступления требований, наличием единственного обслуживающего прибора и произвольным распределением продолжительностей обслуживания.

В уже упоминавшейся работе Эрланга (1948 г.) рассмотрены лишь случаи фиксированных и экспоненциально распределенных продолжительностей обслуживания. Первые исследования систем массового обслуживания, характеризующихся произвольным рас-

пределением продолжительностей обслуживания, были выполнены Поллачеком (1930 г.) и Хинчиным (1932 г.). Пусть в модели M/G/1 $F(x)$ есть функция распределения W ($\equiv W(\infty)$) и $\Phi(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x}\, dF(x)$, где $\operatorname{Re}\theta > 0$ [т. е. $\Phi(\theta)$ порождена преобразованием Лапласа — Стилтьеса функции $F(x)$]. Формула Поллачека — Хинчина имеет следующий вид:

$$\Phi(\theta) = \frac{(1-\rho)\theta}{\theta - \lambda + \lambda\psi(\theta)},$$

где λ — интенсивность поступления требований на обслуживание, а $\psi(\theta)$ — функция, получаемая путем преобразования Лапласа — Стилтьеса распределения продолжительностей обслуживания. Обозначим через V случайную величину, представляющую продолжительности обслуживания. Имеем

$$E[W] = \frac{\lambda E[V^2]}{2(1-\rho)}. \tag{16}$$

Для получения более полной информации о длительностях ожидания поступающих в систему требований можно обратиться к интегродифференциальному уравнению Такача [162], описывающему распределение продолжительностей пребывания требований в очереди. Пусть

$$F(x_0;\, x,\, t) = \Pr\{W(t) \leqslant x \mid W(0) = x_0\} \quad (t > 0;\ x,\ x_0 \geqslant 0)$$

Для функции $F(x, t) \equiv F(x_0;\, x, t)$ Такач [165] получил следующее уравнение:

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = -\lambda F(x, t) + \lambda \int_0^x F(x-v, t)\, dB(v), \tag{17}$$

где $B(x)$ — распределение продолжительностей обслуживания. Решения этого уравнения и обсуждение ряда связанных с ними результатов можно найти в работах [14, 133, 165].

Аналитические формулы, которые удалось вывести Поллачеку для длины очереди, лишь в начале 50-х годов были получены более простым и наглядным способом. Использование Кендаллом (1951 г.) метода вложенных цепей Маркова, позволившего рассматривать выбытия из системы обслуженных требований как акты восстановления функционального потенциала системы и длину очереди как цепь Маркова, положило начало новому направлению в исследованиях полумарковских процессов. Исходя из матрицы вероятностей переходов для вложенной цепи Маркова, нетрудно получить формулу для производящей функции $\Pi^*(z)$ предельного распределения длин очереди (т. е. стохастического

процесса $\{Q_n\}$):

$$\Pi^*(z) = E[z^{Q_\infty}] = \frac{(1-\rho)(1-z)K(z)}{K(z)-z}, \tag{18}$$

где $K(z)$ — производящая функция распределения вероятностей числа требований, поступающих в течение периода обслуживания. Из соотношения (18) следует

$$E[Q_\infty] = \rho + \frac{\lambda^2 E[V^2]}{2(1-\rho)}. \tag{19}$$

С помощью комбинаторных методов предельное распределение $\{\pi_j^*\}$ в явном виде было получено Прэбху и Бхатом [137]:

$$\pi_0^* = 1-\rho,$$

$$\pi_j^* = (1-\rho)\left[\sum_0^\infty k_{n+j-1}^{(n)} - \sum_0^\infty k_{n+j}^{(n)}\right], \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

где $\sum_{j=0}^\infty k_j^{(n)} z^j = [k(z)]^n$. Развернутый комбинаторный анализ процесса $\{Q_n\}$ проведен, например, в работе [167].

В модели M/G/1 предельные распределения Q_n и $Q(t)$ совпадают (разумеется, на другие случаи это утверждение не распространяется). Анализ процессов $\{Q_n\}$ и $\{Q(t)\}$ в переходный период проводился рядом авторов [43, 65, 80, 164, 165, 136, 137, 12, 17 и др.].

В частности, распределение $dG_i(t)$ продолжительностей занятости обслуживающего прибора T_i удалось представить аналитически в следующем виде:

$$dG_i(t) = \sum_{n=i}^\infty \frac{i}{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-i}}{(n-i)!} dB_n(t), \tag{21}$$

где $B_n(x)$ — n-кратная свертка функции $B(x)$ с самой собой; $B_n(0) = 1$, если $n = 0$, в противном случае $B_n(0) = 0$ [136]. Нетрудно также убедиться в том, что

$$E[T_i] = \frac{iE[V]}{1-\rho}. \tag{22}$$

Распределение длительностей периодов занятости в системе M/G/1, в случае когда очередь подчиняется дисциплине ПЕРППО, также совпадает с распределением продолжительностей ожидания в системе с дисциплиной ПОСППО. Влияние дисциплины очереди на поведение системы обслуживания в случае СОЗ исследовалось Кингманом [90]. Ряд полезных результатов, полученных для некоторых частных случаев, можно найти в работах [147, 150].

Наряду с системой M/M/1 системы M/D/1 и M/E_k/1 также являются важными частными случаями системы M/G/1; им посвя-

щен ряд интересных публикаций. Ссылки на эти публикации можно найти в книгах, указанных в списке литературы к этой главе.

4.3. Система GI/M/1

Результаты, полученные для систем данного типа, аналогичны результатам, относящимся к системе M/G/1. Использованный Кендаллом метод вложенных цепей Маркова позволяет найти предельное распределение длин очереди Q_n (ассоциируемых в рассматриваемом случае с моментами поступления требований на обслуживание). Это распределение имеет следующий вид:

$$\pi_j^* = (1 - \zeta)\, \zeta^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

где ζ — наименьший положительный корень функционального уравнения $\omega = K(\omega)$, а $K(z)$ — производящая функция распределения числа требований, обслуженных в интервале между последовательными поступлениями требований на обслуживание.

В модели GI/M/1 предельные распределения Q_n и $Q(t)$ оказываются разными. Положив $\Pr\{Q(\infty) = j\} = \pi_j$, получим [12, 17, 39]

$$\pi_0 = 1 - \rho,$$
$$\pi_j = \rho\,(1 - \zeta)\, \zeta^j \quad (j = 1, 2, 3, \ldots). \tag{24}$$

Неустановившееся поведение $\{Q_n\}$ и $\{Q(t)\}$ исследовалось рядом авторов [12, 15, 17, 39, 163, 165 и др.]. В частности, для распределения длительностей периодов занятости системы, начинающихся при наличии в системе одного требования (т. е. для распределения T_1) была получена следующая формула:

$$g(t) = \sum_n e^{-\mu t} \frac{\mu^n t^{n-2}}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)\,[1 - A(t-\tau)]\, dA_{n-1}(\tau), \tag{25}$$

где $1/\mu$ — среднее время обслуживания, а $A(t)$ — распределение длин интервалов между поступлениями требований в систему [12, 17, 40, 163]. Кроме того, было доказано, что

$$E[T_1] = \frac{1}{\mu(1-\zeta)}. \tag{26}$$

Поскольку длительности периодов занятости (загруженности) обслуживающих приборов распределены экспоненциально, формулу для распределения продолжительностей ожидания в системе GI/M/1 можно получить непосредственно. К числу весьма существенных результатов, имеющих отношение к системе GI/M/1, следует отнести теорему Смита [154], согласно которой предельное распределение продолжительностей периодов ожидания в системе

GI/M/1 является экспоненциальным при любом характере распределения длин отрезков между последовательными поступлениями требований на обслуживание.

Кроме систем M/M/1, D/M/1 и E_k/M/1, существуют и другие важные случаи системы GI/M/1. Работы, в которых содержится материал, имеющий отношение к системам такого рода, можно найти в списке литературы к этой главе.

4.4. Система GI/G/1

Обозначим через $A(x)$ и $B(x)$ соответственно распределение длин интервалов между поступлениями требований и распределение продолжительностей обслуживания в одноканальной системе GI/G/1. В соответствии с ранее принятыми обозначениями W_n — отрезок времени, в течение которого n-е требование C_n ожидает обслуживания, а $X_n = V_n - U_n$, где V_n — продолжительность обслуживания C_n и U_n — длина интервала времени между поступлениями C_{n-1} и C_n. Процесс $\{W_n\}$ является марковским; он подробно изучался рядом авторов [128, 129, 132 [1]), 102, 157, 84, 90, 93, 133 и др.]. Пусть $F(x) = \Pr\{W_\infty \leqslant x\}$ и $K(x) = \Pr\{X_n \leqslant x\}$. Как показал Линдли [102], функции $F(x)$ и $K(x)$ связаны следующим интегральным соотношением:

$$F(x) = -\int_{0^-}^{\infty} F(y)\, dK(x-y), \qquad x \geqslant 0. \tag{27}$$

В некоторых частных случаях интегральное уравнение (27) удается решить и, таким образом, найти распределения $F(x)$ и $K(x)$ в явном виде. Выражения для функции $F(x)$ в системах типа D/E_h/1 и E_h/D/1 приведены в работе [132]. Для $F_n(x) = \Pr\{W_n \leqslant x \mid W = 0\}$, где W_n — наибольшая из парциальных сумм $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, Шпитцер [157] получил следующее соотношение [см. также работу Поллачека (1957)]:

$$\sum_{0}^{\infty} z^n \int_{0^-}^{\infty} e^{\theta x}\, dF_n(x) = \exp\left[\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \Pr\{S_n \leqslant 0\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_{0^+}^{\infty} e^{\theta x}\, dK_n(x)\right] \quad (|z| < 1,\ \operatorname{Re}\theta < 0), \tag{28}$$

где $K_n(x)$ — n-кратная свертка функции $K(x)$ с самой собой. Взаимосвязь между процессами $\{W(t)\}$ и $\{W_n\}$ исследовалась

[1]) Поллачек обращался к анализу систем типа GI/G/1 еще в 1930 г.

Такачем [166, 167]. Формулу для распределения продолжительностей периодов занятости обслуживающего прибора читатель может найти в работах [90, 146, 133].

Для специалистов, занимающихся прикладными вопросами, анализ системы GI/G/1 сам по себе может оказаться неинтересным. Однако анализ систем этого типа позволяет выявить общие закономерности их функционирования и сделать ряд конкретных заключений относительно основных операционных характеристик таких систем. Наиболее важными из этих результатов являются следующие:

1) Соотношение $E[Q] = \lambda E[W + V]$, известное как формула Литтла [103, 77]. Установлено, что эта формула справедлива не только для систем типа GI/G/1, но и при более общих исходных посылках, например для многоканальных систем и для систем обслуживания при наличии приоритетов (в этих случаях метод усреднения должен соответствовать тому сложному механизму, который присущ исследуемой системе [160]).

2) Аппроксимирующее выражение для распределения продолжительностей ожидания в случае особо интенсивного трафика, полученное Кингманом [88, 91, 92], который показал, что, когда коэффициент нагрузки системы близок к единице и выполняются обычные условия независимости событий, распределение длительностей ожидания в первом приближении оказывается экспоненциальным со средним значением продолжительности ожидания, равным

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\text{Дисперсия длин интервалов времени между поступлениями требований} + \text{Дисперсия длительностей обслуживания}}{\text{Средняя длина интервала времени между поступлениями требований} - \text{Средняя продолжительность обслуживания}}\right]. \tag{29}$$

3) Верхняя и нижняя границы $E[W]$. Кингман [91] показал, что

$$E[W] \leqslant \left[\frac{\text{Дисперсия длин интервалов времени между поступлениями требований} + \text{Дисперсия продолжительностей обслуживания}}{2\,(\text{Средняя длина интервала времени между поступлениями требований})\,(1-\rho)}\right]. \tag{30}$$

Ограничение снизу было установлено Маршаллом [106]; он показал, что

$$E[W] \geqslant l, \tag{31}$$

где l — решение уравнения

$$x = \int_{-x}^{\infty} [1 - K(u)]\, du, \qquad x \geqslant 0$$

при $\rho < 1$ (такое решение существует и является единственным).

4.5. Системы с несколькими обслуживающими приборами

В тех случаях, когда распределение вероятностей для продолжительности обслуживания не является экспоненциальным, при анализе систем с несколькими обслуживающими приборами возникают серьезные трудности. Многочисленные попытки описать поведение системы самого общего вида (т. е. типа GI/G/s) к каким-либо значительным результатам не привели [128] и [87]). Более результативными оказались исследования частных систем типа M/D/s, GI/M/s и M/M/s. В уже упоминавшейся работе Эрланга (1948 г.) содержатся оценки длительностей ожидания в системе M/D/s при $s = 1$, 2 и 3, полученные в предположении, что система находится в состоянии статистического равновесия. Более изящный подход к анализу многоканальной модели с произвольными распределениями вероятностей для моментов поступления требований и продолжительностей обслуживания принадлежит Кроммелину [50].

Анализ модели GI/M/s методом вложенных цепей Маркова (длина очереди рассматривалась в моменты поступлений требований на обслуживание) проводился Кендаллом [82]. Ему удалось найти распределение вероятностей для процесса $\{Q_n\}$. Позднее Бхат [16] получил формулу для оценки длины очереди в моменты выхода обслуженных требований из системы на стадии неустановившегося режима ее функционирования. Им были также предложены методы [20] численных оценок продолжительности периода загруженности системы, а также методы анализа неустановившегося и равновесного поведения системы типа GI/M/s в случае конечной очереди.

Самые первые исследования системы M/M/s были предприняты Эрлангом (1948 г.) и Молиной (1927 г.). Пусть λ и μ обозначают соответственно интенсивность поступления требований и интенсивность обслуживания, $\rho = \lambda/s\mu$. Предельное распределение длины очереди $\{\pi_j\}$ имеет следующий вид:

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{(s\rho)^j}{j!}\pi_0, & 0 \leqslant j \leqslant s, \\ \dfrac{(s\rho)^j}{s^{j-s}s!}\pi_0, & j \geqslant s, \end{cases} \tag{32}$$

где

$$\pi_0 = \left[\sum_{0}^{s-1} \frac{(s\rho)^j}{j!} + \frac{(s\rho)}{s!}(1-\rho)^{-1}\right]^{-1}.$$

Установлено также, что

$$E[Q] = s\rho + \frac{\rho\pi_s}{(1-\rho)^2}. \tag{33}$$

Для продолжительности ожидания W имеют место следующие соотношения:

$$F(0) = \Pr\{W = 0\} = \pi_0 \sum_{0}^{s-1} \frac{(s\rho)^j}{j!},$$

$$f(x)\,dx = \Pr\{x < W \leqslant x + dx\} =$$

$$= s\mu\pi_s e^{-x(s\mu-\lambda)}\,dx, \qquad 0 < x < \infty, \tag{34}$$

$$E[W] = \frac{\pi_s}{s\mu(1-\rho)^2}. \tag{35}$$

Описание поведения $Q(t)$ на ограниченном отрезке времени дано в работе [149]. Как и в системе M/M/1, выходной поток системы M/M/s в пределе оказывается пуассоновским [31, 145]. Для ознакомления с исследованиями системы типа M/M/s, выполненными рядом других авторов, читатель отсылается к книгам и статьям, указанным в списке литературы к этой главе.

4.6. Очереди ограниченной длины

При рассмотрении систем массового обслуживания пока мы предполагали, что счетное множество допустимых значений $Q(t)$ является бесконечным. В реальных условиях чаще встречаются системы, в которых последовательность $Q(t)$ имеет конечный предел (т. е. ограничена сверху). Разумеется, с практической точки зрения большое (хотя и конечное) предельное значение $Q(t)$ можно считать бесконечно большим. Однако многие системы массового обслуживания (например, телефонный распределительный щит) к категории систем с чрезвычайно большим предельным значением $Q(t)$ не относятся. Поэтому дадим краткий обзор результатов, адекватно отражающих поведение систем обслуживания в тех случаях, когда длина очереди ограничена сверху.

Конечные очереди имеют место либо в системах с отказами, либо в системах с ограниченным объемом пространств, отводимых для ожидания. В первом случае требованиям, поступающим в момент, когда все обслуживающие приборы заняты, в обслуживании отказывают и, таким образом, обслуживающая система их теряет. Во втором случае поступающие требования имеют возможность дожидаться обслуживания лишь при условии, что количество уже находящихся в системе требований не превышает некоторое фиксированное число (т. е. имеется ограниченное число мест для ожидания).

Сначала рассмотрим случай, когда поток поступающих требований на обслуживание является пуассоновским с параметром λ, а длительности обслуживания распределены по экспоненциальному закону со средним значением $1/\mu$. Пусть число обслуживающих приборов равняется s. Обозначим через $\{\pi_j\}$ предельное распределение вероятностей числа имеющихся в системе требований. Для системы с отказами справедлива формула, полученная Эрлангом (1948):

$$\pi_j = \frac{(1/j!)\,\rho^j}{\sum\limits_{k=0}^{s} (1/k!)\,\rho^k}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, s, \tag{36}$$

где $\rho = \lambda/\mu$. В частности, выражение для π_s (т. е. для вероятности возникновения «затора», или вероятности потери требования на обслуживание) называют *формулой Эрланга для вероятности отказа*. Как показано многими исследователями, формула (36) имеет весьма универсальный (общий) характер. Обсуждение этой формулы и ее строгое доказательство можно найти в статье Такача [168].

Допустим, что в рассматриваемой системе источник требований является конечным и его объем равняется N. Пусть λ — константа и с вероятностью $\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$ [где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} [o(\Delta t)/\Delta t] = 0$] требования, порожденные источником в момент времени t, поступят в систему обслуживания в интервале $(t, t + \Delta t)$. Тогда предельное распределение $\{\pi_j\}$ можно записать в виде

$$\pi_j = \frac{\binom{N}{j}\rho^j}{\sum\limits_{k=0}^{s} \binom{N}{k}\rho^k}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, s. \tag{37}$$

Это соотношение обычно называют распределением Энгсета. Доля требований, которые система теряет (вероятность того, что поступившее в систему требование получит отказ в обслуживании), определяется по формуле

$$L_c = \frac{\binom{N-1}{s}\rho^s}{\sum\limits_{j=0}^{s} \binom{N-1}{j}\rho^j}. \tag{38}$$

Выражение (38) известно как *формула Энгсета для потерь* (иногда его называют *формулой Энгсета — О'Дейла* [161, 147].

Предположим, что в задаче с источником конечного объема допустимо ожидание. В этом случае мы имеем хорошо известную

модель обслуживания автоматическими устройствами, предложенную Пэлманом [123], в которой

$$\pi_j = \begin{cases} \binom{N}{j} \rho^j \pi_0, & 0 \leqslant j \leqslant s, \\ \binom{N}{j} \frac{j!}{s! s^{j-s}} \rho^j \pi_0, & s \leqslant j \leqslant N, \end{cases} \tag{39}$$

где

$$\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{s-1} \binom{N}{j} \rho^j + \sum_{j=s}^{N} \binom{N}{j} \frac{j!}{s! s^{j-s}} \rho^j \right]^{-1} \tag{40}$$

[60]. При $N = \infty$ формулы для π_j и π_0 получаются из соотношений (39) и (40) путем замены $\binom{N}{j}$ на $1/j!$, т. е. приходим к результатам, полученным для случая неограниченной очереди Эрлангом и Дженсеном [28, 161].

Для модели M/M/1 с конечной очередью в случае, когда в системе обслуживания может одновременно находиться не более N требований, предельное распределение $\{\pi_j\}$ величины $Q(t)$ имеет следующий вид:

$$\pi_j = \frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{N+1}}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{41}$$

В случаях, когда распределение длин интервалов времени между последовательными поступлениями требований и распределение продолжительностей обслуживания являются произвольными распределениями, формулы операционных характеристик системы весьма громоздкие. Предельные распределения $\{\pi_j\}$ для систем различного типа с конечными очередями можно найти в следующих публикациях: для M/M/1 в статье [78] и в книге [37], для GI/M/1 в книге [37], для M/G/1 (при источнике требований конечного объема) в книге [165] и работе [21], для GI/M/s с отказами в книге [165] (см. также [161]).

Когда область возможных состояний невелика, в вычислительном отношении анализ систем M/G/1 и GI/M/s (или G/M/s, в которой распределение длин интервалов времени между поступлениями требований может зависеть от состояния системы) удобнее проводить, основываясь на модели полумарковского процесса и используя математический аппарат вложенных цепей Маркова. Методика анализа систем M/G/1 с источником требований конечного объема и систем G/M/1 с ограничением на число требований, которым разрешается дожидаться обслуживания, предложена Бхатом [20]. Как показано в работе [20], с помощью фундаментальной матрицы (определение и трактовку нулевого состояния как поглощающего см. в работах [83] и [19]), ассоциированной с матрицей вероятностей переходов, нетрудно получить ряд полезных результатов для систем указанного выше типа.

Наиболее серьезными публикациями, в которых рассматриваются системы массового обслуживания с конечными очередями, являются [37], [147] и [161].

4.7. Другие системы массового обслуживания

Рассмотренные выше системы массового обслуживания характеризуются простой дисциплиной очереди и элементарной структурой. В реальных же условиях многие обслуживающие системы оказываются гораздо сложнее. Поскольку обсуждение каждого из возможных вариантов массового обслуживания не представляется возможным, мы ограничимся ссылками на публикации, среди которых читатель может выбрать наиболее для него интересные.

В разд. 1 были указаны основные элементы любой системы массового обслуживания. Каждую из многочисленных модификаций модельного описания процесса массового обслуживания можно связать с одним из этих элементов.

а) *Входной поток* (процесс на входе системы). Здесь возможны следующие варианты: групповые поступления требований; ожидание вне системы; поступление требований согласованными потоками; зависимость входного потока от состояния системы; поступления по графику, но с опозданиями и т. д.

б) *Механизм обслуживания*. Возможными вариантами являются: ограниченная вместимость пространства ожидания; прибор, который обслуживает клиентов, находящихся на определенных местах, передвигается; непрерывно работающие системы (даже при отсутствии клиентов); обслуживание осуществляется фиксированными «порциями»; обслуживающие приборы функционируют последовательно; обслуживание осуществляется последовательно, а вместимость пространств для ожидания между приборами ограничена (или не ограничена); обслуживающие приборы функционируют параллельно; поступающие требования не имеют права на ожидание (системы, отказывающие в обслуживании при загруженности всех обслуживающих приборов); число обслуживающих приборов изменяется в зависимости от состояния системы; приборы функционируют по согласованному регламенту; приборы реализуют специфические и взаимно незаменимые процедуры; сеть с обслуживающими приборами, функционирующими как последовательно, так и параллельно, и т. д.

в) *Дисциплина очереди*. Наряду с уже упоминавшимися тремя типами дисциплины возможны и другие варианты, учитывающие, например, возможности отказов от ожидания, выбытия требований из очереди по истечении определенного времени, обманные действия клиентов, наличие приоритетов и, наконец, смешанные варианты. Приоритеты могут быть экзогенного и эндогенного

типа. К числу экзогенных (не зависящих от состояния системы) приоритетов относятся, например, «нокаутирующие» приоритеты (безусловное право обслуживаться первыми при любой очереди); приоритеты, установленные официальным (внешним) регламентом; приоритеты, назначаемые с учетом прогнозируемых (или заранее точно известных) длительностей обслуживания соответствующих клиентов (например, первым обслуживается клиент, который требует наименьших затрат времени, или, наоборот, клиент, требующий наибольших временны́х затрат); приоритеты с обратной связью и приоритеты, основанные на «здравом смысле». Среди эндогенных (зависящих от состояния системы) приоритетов следует выделить динамические приоритеты, устанавливаемые в зависимости от продолжительности ожидания; приоритеты, назначаемые в зависимости от размера взятки, приоритеты, устанавливаемые в случае возникновения заторов в линиях ожидания, и т. д.

Ясно, что возможны различные комбинации критериев приоритетности, а также варианты различного рода зависимостей между этими критериями. Судя по имеющимся публикациям по теории массового обслуживания, в большинстве случаев решение таких задач оказывается возможным лишь в предположении о наличии у исследуемых процессов марковского свойства. При подборе литературы по вопросам анализа систем массового обслуживания можно использовать работы [54, 113, 86, 161, 46, 150, 151, 100, 147, 165, 167, 9, 10, 133, 97, 41, 76, 18, 37, 42, 69].

5. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

При построении модели обслуживающей системы прежде всего необходимо выявить структурные и количественные характеристики входного потока, механизма обслуживания и дисциплины очереди. Общую схему функционирования системы и дисциплину очереди легко установить путем наблюдений; чтобы определить характеристики входного потока и процесса обслуживания, приходится прибегать к статистическим методам обработки данных. При этом можно выделить следующие этапы:

(1) *Сбор данных.* Прежде всего необходимо определить, какие данные потребуются для предстоящего анализа. В этой связи следует заметить, что вид требуемых данных в значительной степени зависит от того, какая модель будет предложена для описания реальной системы массового обслуживания. Но поскольку тип модели не всегда оказывается заданным, исходную систему показателей на стадии сбора данных лучше всего выбирать в достаточной степени универсальной. Основными характеристиками процедуры сбора данных являются а) способ получения данных и б) объем выборки.

Способ получения данных также зависит от того, как результаты наблюдений будут использоваться в модели. Так, например, в системе M/M/1 коэффициент нагрузки можно оценить как отношение средней интенсивности поступления требований к средней интенсивности обслуживания. С другой стороны, в качестве оценки коэффициента нагрузки можно использовать долю времени, в течение которого система оказывается занятой обслуживанием (загруженной). Ясно, что первый способ оценивания коэффициента нагрузки является более точным и эффективным. Существуют методы, позволяющие при таком способе измерения коэффициента нагрузки определять соответствующие доверительные интервалы [101]. Наряду с проблемой выбора метода сбора данных возникает проблема выбора величины интервала времени для наблюдений. Как долго следует наблюдать за системой: в пределах некоторого заданного интервала времени или же до тех пор, пока в систему не поступит определенное количество требований? Если процесс поступления требований является пуассоновским, то можно показать, что для получения выборки оптимального размера второй вариант имеет по сравнению с первым явное преимущество [25]. Таким образом, при решении вопроса о наилучшем использовании информации, ассоциированной с процессом функционирования системы, следует исходить из практических соображений. Чтобы полезность собранных данных была максимальной, на ранних стадиях исследования может потребоваться неоднократный пересмотр плана проведения эксперимента.

Аналогичная проблема возникает и в связи с определением объема выборки. Большинство обсуждавшихся в периодической печати методов определения объема выборки являются параметрическими [105]. Исключением является метод, основанный на использовании неравенства Чебышева, позволяющий оценить требуемый объем выборки при произвольном виде функции распределения вероятностей; при этом с доверительностью 0,98 при выборке, равной 200 «экземплярам», удается оценить среднее значение исследуемой совокупности с точностью до одной второй от среднего квадратического отклонения. В тех случаях, когда вид распределения вероятностей известен, при том же самом объеме выборки результаты удается существенно улучшить.

(2) *Проверка на стационарность.* Поскольку при анализе нестационарных процессов, ассоциированных с системами массового обслуживания, возникают большие трудности, число публикаций, в которых рассматриваются такие процессы, незначительно. В реальных же условиях нестационарность поведения системы на некоторых интервалах времени наблюдается довольно часто. Например, в поведении требований на обслуживание весьма распространенными являются циклические тренды. Один из самых простых способов, позволяющих использовать для анализа неста-

ционарных процессов результаты, полученные в предположении о том, что условия стационарности выполняются, состоит в разбиении рассматриваемого интервала времени на периоды, в пределах которых поведение системы можно считать стационарным. При осуществлении такого разбиения применяют так называемые процедуры проверки статистических гипотез. Поскольку на начальной стадии исследования не делаются предположения о параметрической форме записи закона распределения вероятностей для рассматриваемых процессов, особый интерес представляют непараметрические критерии. Одним из критериев такого рода является предложенная Паттером [142] модификация двухвыборочного рангового критерия Вилкоксона, в которой учитывается взаимосвязь между дискретными наблюдениями [111].

(3) *Проверка независимости событий.* Одним из допущений, упрощающих анализ систем массового обслуживания, является предположение о независимости моментов поступления требований и (или) длительностей обслуживания. Для проверки этого предположения можно применить соответствующие критерии. Во многих случаях корреляционная структура процесса может быть выявлена путем представления наблюдаемых данных в виде временны́х рядов. (Ссылки на публикации по этим вопросам можно найти в литературе, посвященной анализу временны́х рядов.) Существуют критерии проверки специфических типов взаимосвязей между наблюдаемыми событиями, в частности для проверки гипотезы о том, что исследуемый процесс может быть представлен в виде цепи Маркова. Тем, кто интересуется этими вопросами, мы рекомендуем книги Кокса и Льюиса [45], Биллингслея [24] и другие книги по теории стохастических процессов. Отметим, в частности, что Биллингслеем разработана теория максимального правдоподобия для марковских процессов, которую можно использовать для анализа многих моделей массового обслуживания не очень сложной структуры.

(4) *Подбор вида распределений.* Эти процедуры связаны с оцениванием параметров и проверкой гипотез относительно видов распределения. Лучше всего сначала рассматривать простые распределения (например, пуассоновское), так как в этих случаях анализ существенно упрощается. При этом можно пользоваться стандартной техникой подбора вида распределения, основанной на использовании критерия χ^2. В случае когда предполагаемое распределение является пуассоновским, исходными данными могут быть либо количество поступлений и число обслуженных требований на фиксированном (заданном) интервале времени, либо длины интервалов времени между поступлениями требований и длительности обслуживания. Если же предполагаемое распределение не является пуассоновским (например, равномерное распределение, нормальное распределение, распределение Эрлан-

га), то в качестве исходных данных могут служить лишь длины интервалов времени между последовательными поступлениями требований на обслуживание и длительности обслуживания. Как и в любом другом случае, когда речь идет о процедуре статистического анализа, решающим фактором при выборе критерия является наличие подходящих данных.

При анализе пуассоновского потока событий (событиями являются поступления требований и завершения обслуживания индивидуальных заявок, причем интервалы между событиями имеют экспоненциальное распределение) имеется несколько возможностей. Среди них заслуживают внимания следующие: а) воспользоваться критерием согласия; б) применить F-критерий; в) использовать критерий Колмогорова — Смирнова; г) применить критерий Андерсона — Дарлинга и д) использовать критерий равномерности распределения. Первые четыре процедуры являются стандартными; их описание можно найти в книгах, посвященных теории статистических выводов (см. также [69]). В последнем случае используют свойство пуассоновского распределения, позволяющее установить связь между этим распределением и равномерным распределением. Если $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — моменты времени, в которые происходят некоторые случайные события, ассоциированные с пуассоновским процессом, то выборку $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ можно рассматривать как упорядоченную выборку объема n из равномерного распределения в интервале $(0, T)$; следовательно, если $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$, то $E[S_n] = nT/2$ и $\mathrm{Var}[S_n] = nT^2/12$. Таким образом, проверка первоначально выбранного распределения может быть сведена к проверке нормированного нормального распределения на основе центральной предельной теоремы.

Необходимость в осуществлении одной или даже нескольких из указанных выше статистических процедур в связи с анализом систем массового обслуживания была продемонстрирована Эрлангом (1948), Молиной (1927), Фрайем [64], Вэйли [2, 4], Эди [56] и рядом других авторов. Многие аспекты проверки статистических гипотез рассматриваются в работах, посвященных приложениям теории массового обслуживания.

Проблема подбора подходящей модели предполагает прежде всего наличие соответствующих вариантов модели. Если ни одна из имеющихся моделей не подходит к рассматриваемой ситуации, требуется разработка новых моделей или видоизменение первоначальных вариантов модельного представления исследуемых процессов. Примером может служить распределение Эрланга. Плотность вероятности $b(x)$ в этом случае имеет вид

$$b(x) = e^{-k\mu x} \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!} x^{k-1}, \qquad x > 0. \tag{42}$$

Распределение Эрланга фактически представляет собой семейство распределений с весьма широким диапазоном свойств. При $k = 1$ оно сводится к экспоненциальному распределению, а при $k \to \infty$ имеет место детерминированный процесс. Кроме того, определяемая соотношением (42) функция $b(x)$ описывает распределение суммы k независимых и идентично распределенных по экспоненциальному закону случайных величин, среднее значение каждой из которых равняется $1/k\mu$. Это свойство успешно использовалось при анализе систем, в которых поступления требований и процедуры обслуживания характеризуются распределениями Эрланга. Простое обобщение распределения Эрланга рассматривалось Лукачем [104], который предложил модель типа взвешенной суммы распределений Эрланга и указал на возможности ее применения. Упомянутое выше обобщение распределения Эрланга получается из соотношения (42), если рассматривать k как независимую случайную величину с распределением $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. При этом получаем

$$b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{-k\mu x} \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!} x^{k-1}, \qquad x > 0. \tag{43}$$

Полученное Морзом [113] представление гиперэкспоненциального распределения является попыткой решения задачи определения наиболее подходящего вида распределения для моделируемого процесса с учетом характера имеющихся исходных данных. Предположим, что требования попадают в одну из двух обслуживающих систем, характеризующихся разными интенсивностями обслуживания $2p_1\mu$ и $2p_2\mu$ соответственно с вероятностями p_1 и p_2 $(=1 - p_1)$. Плотность распределения времени обслуживания $b(x)$ может быть записана в виде

$$b(x) = 2p_1^2\mu e^{-2p_1\mu x} + 2p_2^2\mu e^{-2p_2\mu x}, \qquad x > 0. \tag{44}$$

При варьировании p_1 в интервале (0, 1/2) получаются различные кривые распределения с дисперсиями в интервале $(1/\mu^2, \infty)$. Непосредственное обобщение данного распределения, предложенное Морзом, имеет следующий вид:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{M} p_i \mu_i e^{-\mu_i x}, \text{ где} \tag{45}$$

$$\sum_{i=1}^{M} p_i = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{M} (p_i/\mu_i) = \frac{1}{\mu}.$$

Статистические свойства распределения Эрланга и гиперэкспоненциальное распределение рассмотрены в работе [113].

Статистический анализ моделируемой системы массового обслуживания преследует и другую цель — выявление взаимосвязей

между операционными характеристиками, относящимися к разным структурным элементам исследуемой системы, и получение численных оценок параметров протекающих в системе процессов. Так, например, Кларк [35] получил оценки максимального правдоподобия для параметров (интенсивностей поступления требований и обслуживания) системы M/M/1, находящейся в стационарном состоянии. Бенеш в работе [8] приводит достаточный набор статистик для системы M/M/∞, а Вулф [173] получил критерии отношения правдоподобия и оценки максимального правдоподобия для простых моделей массового обслуживания. Тем, кто интересуется вопросами статистического анализа процессов массового обслуживания, рекомендуем также работы [44, 69, 71].

6. ОПЕРАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

В литературе по теории массового обслуживания описательный подход к операционному анализу всегда был доминирующим. Подтверждение этого можно найти в публикациях по системам связи, системам транспортного обслуживания, системам технического обслуживания и др. Например, в работе Эрланга, опубликованной в 1948 г. (A. K. Erlang [ср. Brockmeyer et al. (1948)], On the Rational Determination of the Number of Circuits), решается задача определения оптимального числа каналов связи (при этом в качестве критерия оптимальности берется минимум вероятности потерь из-за отказа в обслуживании). Можно привести и другие интересные примеры, в частности разработанную Байли [2] имитационную процедуру с целью совершенствования системы упорядочения явок пациентов на прием к врачу; предложенный Брайхамом [27] способ определения оптимального числа приемщиков списанного оборудования в пунктах инвентаризации технических изделий и результаты, полученные Эди [56] в связи с исследованием задержек транспортных средств возле пунктов продажи запчастей. Ниже указан ряд других важных исследований, в которых реализуется нормативный подход к решению задач операционного характера.

Для решения проблемы повышения эффективности функционирования систем ремонтно-технического обслуживания используются показатели производительности [46, 11]. В работе [23] для нахождения числовых значений управляющих параметров процесса динамического регулирования коэффициента нагрузки в системах M/G/1 и GI/M/1 использовались данные об операционных характеристиках системы (длина очереди, продолжительность периодов занятости обслуживающего прибора и др.).

В публикациях, посвященных приложениям теории массового обслуживания, можно найти еще больше примеров описательного подхода к операционному анализу обслуживающих систем. Основ-

ное внимание в них уделяется процедуре отыскания наилучшего значения управляющего параметра на основе характеристик системы [46, 97, 170].

При решении сложных операционных задач весьма эффективно может быть использован метод имитационного моделирования. Ясно, что с помощью имитации достигается не «лечебный», а лишь диагностический эффект. Но если это обстоятельство осознается теми, кто связан с практическими вопросами, то результаты имитационного анализа той или иной системы массового обслуживания могут быть эффективно использованы для ее совершенствования. Работы по имитационному моделированию указаны в списке литературы к гл. III-7 и III-8.

При нормативном подходе определяются оптимальные значения характеристик или параметров системы с учетом физических и экономических ограничений. Так, например, используя экономические показатели, связанные с задержками, качеством обслуживания и рентабельностью системы, можно определить оптимальные значения объема пространства для ожидания, числа обслуживающих приборов, коэффициента нагрузки, интенсивности обслуживания и т. д. За последние несколько лет были исследованы многие проблемы нормативного анализа и оптимизации в сфере массового обслуживания. Ниже дается краткое описание результатов, полученных при рассмотрении задач различного типа.

(1) Простые стоимостные модели. В этих моделях критерии оптимизации строятся на основе данных, получаемых в результате анализа протекающих в системе процессов. Рассмотрим, например, среднее время ожидания $E[W]$, определяемое соотношением (16). Для распределения Эрланга k-го порядка [соотношение (42)] получаем

$$E[W] = \rho \frac{[1+(1/k)]}{2\mu(1-\rho)}, \tag{46}$$

где $\rho = \lambda/\mu$. Совершенно очевидно, что $E[W]$ принимает наименьшее значение при $k \to \infty$ (т. е. при обслуживании с постоянной скоростью) и наибольшее значение при $k = 1$ (т. е. при экспоненциальном распределении длительностей обслуживания). Аналогичный результат имеет место для (двойственной) системы $E_k/M/1$ [62].

В результате проведенного Морзом анализа многоканальной системы типа M/M/s [113] были получены простые соотношения для оценок оптимальных значений ряда параметров. В частности, было показано, что в случае, когда коэффициент нагрузки $\lambda/s\mu$ и интенсивность поступления требований являются константами, средняя длина очереди и среднее время ожидания принимают минимальные значения при $s = 1$. Более того, Морз показал, что

в случае однокапальной системы M/M/1 с экономической точки зрения оптимальной является интенсивность обслуживания, определяемая соотношением

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda C_w}{C_s}}, \tag{47}$$

где C_s — затраты, связанные с работой одного обслуживающего прибора в течение единичного интервала времени (например, в течение минуты), а C_w — стоимость ожидания любого из требований в течение единичного интервала времени (цена ожидания).

Задачи подобного типа рассматривались также в работах [73, 41, 170, 19]. Бхат [19], в частности, показал, что при экономических предпосылках, аналогичных только что рассмотренным, оптимальное число касс в большом продовольственном магазине с самообслуживанием при пуассоновском потоке клиентов на выходе равняется

$$s^* = b_1 + \sqrt{\frac{\lambda b_2 C_w}{2C_s}}, \tag{48}$$

где λ — интенсивность поступления требований, а b_1 и b_2 — первый и второй моменты произвольного распределения вероятностей длительностей обслуживания.

(2) Варьирование интенсивности обслуживания. Для обеспечения эффективности функционирования системы массового обслуживания необходимо управлять либо входным потоком, регулируя интенсивность поступлений требований на обслуживание, либо обслуживающим механизмом, регулируя интенсивность обслуживания. В большинстве реальных случаев можно управлять лишь обслуживающим механизмом путем варьирования интенсивности обслуживания. Увеличение интенсивности обслуживания может быть достигнуто либо за счет увеличения числа обслуживающих приборов, либо с помощью других средств (например, с помощью средств автоматизации). Одна из наиболее значительных работ по проблеме варьирования интенсивности обслуживания принадлежит Модеру и Филлипсу [109]. В их модели длина очереди в системе M/M/s регулируется следующим образом. Обслуживание начинается при минимальном значении s; как только число требований в линии ожидания оказывается больше некоторого заранее установленного числа N, вводятся в действие дополнительные обслуживающие приборы, т. е. значение s увеличивается. Максимальное число обслуживающих приборов в данной системе равняется S. Как только длина очереди становится меньше критической (т. е. когда число требований, ожидающих обслуживания, оказывается меньше N), дополнительно вводимые в действие приборы «выключают». Несмотря на то что анализ, проведенный Модером и Филлипсом, относился только к поведе-

нию системы, используемые ими критерии эффективности оказываются неплохими ориентирами для выбора ее параметров. Модификация этой модели предложена в работе [174], в которой для решения задач операционного характера также используются данные, полученные в результате описательного анализа системы. В этой работе стратегия обслуживания в системе M/M/1 имеет следующий вид. Пусть $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots\}$ — последовательность допустимых интенсивностей обслуживания, в которой $\mu_0 = 0$, а $\mu_{k+1} > \mu_k$. Рассмотрим, кроме того, две целочисленные последовательности $\{R_1, R_2, \ldots, R_k, \ldots\}$ и $\{S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots\}$, такие, что $R_{k+1} > R_k$, $S_{k+1} > S_k$, $R_{k+1} > S_k$, $S_0 = 0$. Стратегия обслуживания строится следующим образом. Всякий раз, когда длина очереди достигает значения R_k, интенсивность обслуживания увеличивают: от μ_{k-1} переходят к μ_k; если же в ходе функционирования системы длина очереди сокращается до S_k, а при этом интенсивность обслуживания равняется μ_{k+1}, то от μ_{k+1} переходят к μ_k.

Оптимальность стратегий обслуживания такого типа в системах M/M/1 была установлена Крэбиллом [47, 48]. Для весьма общего вида зависимости от состояния системы (i) некоторого стоимостного показателя $C(i)$ и произвольного вида зависимости от интенсивности обслуживания другого экономического показателя r_i Крэбилл установил следующую оптимальную стратегию. Пусть λ есть интенсивность поступления в систему требований на обслуживание, а $\{\mu_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$ — возможные интенсивности обслуживания. Тогда, если $C(i)$ — неубывающая функция, стремящаяся к бесконечности при $i \to \infty$, и если выполняются условия $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k$, $0 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_k$, $\lambda < \mu_k$ и $\sum_{i=0}^{\infty} C(i)(\lambda/\mu k) < \infty$, то стационарная оптимальная стратегия задается $k+1$ числами $0 = d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_k \leqslant d_{k+1} = \infty$, такими, что в состоянии i при $d_j \leqslant i \leqslant d_{j+1}$ интенсивность обслуживания полагается равной μ_j.

(3) Стратегии включения—выключения канала обслуживания. На исследования, связанные с выявлением оптимальных стратегий регулирования процессов массового обслуживания, большое влияние оказала опубликованная в 1968 г. статья Хеймана [72]. До 1968 г. в исследованиях систем массового обслуживания с операционных позиций основное внимание уделялось определению оптимальных значений управляемых параметров с использованием несложных стоимостных критериев или же путем сопоставления результатов анализа протекающих в системе процессов. Примером может служить исследование, проведенное Ядином и Наором [174], которым удалось получить интересные результаты для системы M/G/1 с подвижной станцией обслуживания (при этом длина очереди может уменьшаться до нуля).

Позднее Хейман внес в модель Ядина и Наора некоторые усовершенствования. Он исследовал на оптимальность следующую стратегию: обслуживающий прибор включается, когда число требований в системе становится равным n, и выключается, когда число требований в системе становится равным нулю. В число стоимостных характеристик этой модели входят затраты, связанные с включением и выключением обслуживающего прибора, стоимость функционирования прибора в течение единичного интервала времени и стоимость «содержания» каждого требования в системе в течение единичного интервала времени. Хейман получил формулу для определения (без учета эффекта дисконтирования) оптимального значения n при условии, что система будет работать бесконечно долго. Для определения оптимальной стратегии при ограниченной (конечной) продолжительности функционирования обслуживающей системы получены соответствующие рекуррентные формулы динамического программирования.

Следуя по пути естественного обобщения рассмотренного выше случая, Собель [155] исследовал с точки зрения оптимальности (M, m)-стратегию для системы типа GI/G/1 при более общей структуре экономических показателей; при этом не учитывалось дисконтирование, а плановый горизонт считался удаленным на бесконечность. Сущность (M, m)-стратегии состоит в следующем: если длина очереди равняется или меньше m, то обслуживание не следует начинать до тех пор, пока длина очереди не станет равной M; в момент времени, когда длина очереди достигает значения M, начинается процесс обслуживания, который продолжается, пока длина очереди вновь не уменьшится до значения m. Ясно, что при $m = 0$, мы приходим к уже упоминавшейся модели Хеймана [72]. В работе [7] приведен аналог формулы Хеймана — Ядина — Наора для стратегии загрузки обслуживающего механизма. Другие варианты обобщения стратегии включения — выключения, свойственной системам управления запасами, даны в работах [26] и [51]. В первом из них учитываются возможности отказа клиентов от ожидания и перехода клиентов из одной очереди в другую, тогда как во втором рассматривается схема группового обслуживания и основное внимание уделяется проблеме определения оптимального размера группы, подлежащей одновременному обслуживанию.

(4) Аспекты проектирования. Как показывают публикации, посвященные различным приложениям теории массового обслуживания, при проектировании обслуживающих систем основной объем полезной исходной информации удается извлечь из моделей описательного типа. Сведения о стоимостных моделях можно найти в книге [73]. Модели нормативного характера встречаются в литературе чрезвычайно редко. Ниже приводятся краткие

сведения о двух попытках решить проблему проектирования обслуживающей системы на нормативной основе.

Интуиция подсказывает, что эффективность обслуживания при согласованной работе обслуживающих приборов будет более высокой, чем при их изолированном использовании (даже если пропускная способность в обоих случаях одинакова). Это следует из того факта, что в первом случае при отсутствии в системе требований на обслуживание приборы будут находиться в выключенном состоянии, тогда как во втором случае этого не будет. Выводы, к которым пришел Морз [113] при анализе системы типа M/M/s, подтверждают эти предположения. Следует, однако, заметить, что оптимальность первого варианта в сильной степени зависит от экономических предпосылок и характера обслуживания. Этот аспект весьма подробно обсуждался в работах [159] и [30]. Используя в качестве критерия оптимизации усредненные за продолжительный период ожидаемые расходы на единицу времени и исходя из весьма общих предположений о стоимостных показателях, ассоциированных с протекающими в системе процессами, Стидхэм [159] доказал, что централизованный способ использования обслуживающих приборов является более выгодным для большинства систем массового обслуживания типа $G/E_k/s$. Брюмелю [30] удалось распространить этот вывод на системы типа M/G/s.

Эванс [58] предложил другой подход к проектированию систем массового обслуживания, направленный на оптимизацию матрицы переходов, т. е. на получение такой переходной матрицы, которая оптимизирует целевую функцию, зависящую от вероятностей пребывания системы в равновесном состоянии. Проведенный Эвансом анализ производных целевой функции привел его к градиентным алгоритмам поиска локально оптимальных динамических характеристик системы.

(5) Системы с приоритетами. Системы массового обслуживания с приоритетами также относятся к категории трудноанализируемых. В задаче оптимизации графика работ для систем такого рода существенную роль играют правила назначения приоритетов. Возможности использования результатов анализа поведения той или иной системы с целью ее совершенствования подробно рассмотрены в книге Конвея, Максвелла и Миллера [41]. Один из важнейших результатов, представленных в этой книге, относится к случаю, когда приоритетность определяется на основе информации о том, сколько времени потребуется на обслуживание того или иного клиента. Хорошо известно, что при отсутствии такой информации средние значения основных показателей системы (таких, как средняя длина очереди и среднее время ожидания) одинаковы для многих видов дисциплины очереди. Приоритетность нередко назначается на основе оценок продолжительностей

предстоящих процедур обслуживания. В работе [126] показано, что если точно известно, сколько времени потребуется на обслуживание каждого из поступивших требований, то дисциплиной очереди, при которой минимизируется средняя за весь период обслуживания длина очереди и средняя (тоже за весь период функционирования системы) продолжительность ожидания (без права пропускать вперед клиентов с более низким приоритетом), является дисциплина, основанная на приоритете «первым обслуживается требование, которое можно обслужить быстрее других». Если же дисциплина очереди такова, что требование с более высоким приоритетом использует право обслуживаться по более низкому приоритету, то оказывается справедливым утверждение Праге [152]: средняя за весь рассматриваемый период длина очереди и средняя длительность ожидания минимизируются при реализации правила: клиент, продолжительность обслуживания которого меньше всего отличается от продолжительности обслуживания клиента с высшим приоритетом, подлежит обслуживанию в первую очередь. (См. также [153].)

Простой, но исключительно важный результат, касающийся назначения приоритетов, получен в работе [29]. Если имеют место пуассоновские потоки требований N типов и b_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) — продолжительность обслуживания требования i-го типа, а h_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) — стоимость ожидания требования i-го типа, то оптимальное упорядочение требований по приоритетам достигается путем построения возрастающей последовательности отношений b_i/h_i с назначением наивысшего приоритета требованиям того типа, которые соответствуют первому члену в этой последовательности.

Задачи еще одного класса возникают при анализе систем массового обслуживания, в которых приоритеты продаются (обслуживающей системой) и покупаются (клиентами). Клейнрок [94], исследовавший эти вопросы применительно к системе M/G/1, связывает намерение купить право быть обслуженным быстрее с фактором нетерпеливости клиентов. Он показал, что в этом случае функция, определяющая плату за повышение приоритета, оптимальная, если с увеличением степени нетерпеливости она монотонно возрастает. Приняв в качестве равновесной такую стратегию клиента, выигрыш за отклонение от которой равен нулю, если все другие клиенты придерживаются именно этой стратегии, Балачандран [5] исследовал стабильность различных оптимальных стратегий в системе M/M/1.

Мы указали здесь лишь некоторые из наиболее важных проблем операционного анализа, с которыми сталкиваются в сфере массового обслуживания, и привели далеко не все результаты, содержащиеся в публикациях по данному вопросу. В связи с тем особым практическим интересом, который представляют системы

массового обслуживания, обладающие марковским свойством, стали параллельно развиваться, обогащая друг друга, с одной стороны, теория марковских процессов и, с другой стороны, методы оптимизации обслуживающих систем, основанные на использовании аппарата цепей Маркова. Обширную библиографию по данной тематике можно найти в недавно опубликованных статьях обзорного характера [138, 156, 49].

7. МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Три последних раздела данной главы посвящены общетеоретическим и вычислительным аспектам анализа и моделирования обслуживающих систем, а также некоторым другим аспектам, важным с точки зрения перспектив развития теории массового обслуживания и ее приложений. Поскольку теория массового обслуживания является одним из разделов прикладной математики (в частности, прикладной математической статистики), вклад в ее развитие могут вносить как специалисты, интересующиеся главным образом математическими аспектами моделирования процессов массового обслуживания, так и специалисты, решающие лишь совершенно конкретные задачи проектирования, внедрения и совершенствования обслуживающих систем. Промежуточное положение занимают теоретики с практическим уклоном и практики, чувствующие потребность в теоретической работе и осознающие ее полезность. Для развития теории массового обслуживания в целом вклад теоретиков так же важен, как и вклад специалистов других категорий, пытающихся подойти к решению задач массового обслуживания на системной основе. В данном разделе дается краткое описание современных методов анализа процессов массового обслуживания, а в следующем разделе обсуждаются попытки применения этих методов на практике.

Математическим фундаментом теории массового обслуживания являются теория вероятностей, а также теория стохастических процессов. В течение последних четырех десятилетий теория массового обслуживания и теория случайных процессов развивались совершенно синхронно. Нередко бывает даже трудно отделить одну теорию от другой. В силу большого структурного разнообразия процессов массового обслуживания теория массового обслуживания внесла существенный вклад в развитие теории случайных процессов. Наиболее распространенными процессами в системах массового обслуживания являются марковские процессы и процессы восстановления. Марковские системы массового обслуживания (системы с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительностей обслуживания) являются яркими примерами процессов рождения и гибели, а процессы, ассоциированные с виртуальным временем ожидания

в системе M/G/1, представляют собой марковские процессы смешанного типа, когда состояние системы может меняться как непрерывно, так и скачками. В тех случаях, когда система не является марковской, в основном процессе удается выделить точки восстановления (например, точками восстановления в системе GI/M/1 являются моменты поступления требований на обслуживание). Поэтому теория восстановления оказывается весьма удобным средством анализа процессов массового обслуживания. Краткие сведения о процессах восстановления содержатся в гл. III-1 этой книги; данному вопросу посвящен также ряд книг.

В теоретических разработках по массовому обслуживанию, кроме того, рассматриваются вопросы идентификации и анализа исследуемых процессов с использованием понятий и выводов теории случайных процессов и ряда других разделов математики. Ниже обсуждаются некоторые из наиболее важных теоретических подходов к анализу процессов массового обслуживания. Мы начнем с определения ряда понятий, которые будут использоваться в дальнейшем.

Стохастический процесс определяется как совокупность случайных величин, упорядоченных по некоторому параметру (например, во времени или в пространстве). *Пространство состояний* представляет собой множество допустимых значений случайных величин, описывающих стохастический процесс. *Пространство допустимых значений параметра* определяется как множество значений, которые может принимать упорядочивающий параметр.

Марковский процесс. Рассмотрим стохастический процесс $X(t)$, в котором параметр t и значения случайных величин $X(t)$ могут меняться непрерывно. Пусть $(t_0, t_1, \ldots, t_n, t;\ t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t)$ — конечное (или счетно бесконечное) множество точек в пространстве параметров. Тогда $X(t)$ называют *марковским процессом*, если

$$\Pr\{X(t) \leqslant x \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0\} =$$
$$= \Pr\{X(t) \leqslant x \mid X(t_n) = x_n\},$$

т. е. если условное распределение $X(t)$ при заданных значениях $X(t_0), X(t_1), \ldots, X(t_n)$ зависит лишь от $X(t_n)$ [т. е. от значения $X(t)$ в последний из указанных моментов времени].

Марковский процесс при дискретно меняющемся значении параметра будем называть *цепью Маркова* (некоторые авторы отождествляют цепь Маркова с дискретным множеством состояний марковского процесса). Большинство цепей Маркова, которые встречаются на практике, действительно характеризуются дискретным пространством состояний. Пусть $\{X_n, n = 0, 1, 2 \ldots\}$ —

цепь Маркова именно такого типа и

$$P_{ij}^{(m,\, m+n)} = \Pr\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\}.$$

Если
$$P_{ij}^{(m,\, m+n)} = P_{ij}^{(0,n)} (\equiv P_{ij}^{(n)})$$

для всех значений m, то такую цепь Маркова называют *однородной во времени*. Матрица, элементами которой являются P_{ij} $(\equiv P_{ij}^{(1)})$, называется *матрицей вероятностей переходов*; она полностью определяет цепь Маркова.

Полумарковский процесс. Рассмотрим стохастический процесс $X(t)$ с дискретным множеством допустимых состояний и параметром, значение которого меняется непрерывным образом. Пусть $(t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots)$ — дискретное множество точек в пространстве допустимых значений параметра. Пусть далее процесс $X(t)$ таков, что $\{X(t_n),\ n = 0, 1, \ldots\}$ — цепь Маркова (в указанном выше смысле) с вероятностями переходов P_{ij}, $i, j \in S$, где S — множество допустимых состояний. Допустим, что случайная величина Y_{ij} представляет собой длину интервала времени, в течение которого осуществляется переход $i \to j$ в цепи Маркова $\{X(t_n)\}$. Пусть $F_{ij}(t) = \Pr\{Y_{ij} \leqslant t\}$ есть функция распределения вероятностей, ассоциированных с Y_{ij}. Обозначим через $Q_{ij}(t)$ совместную условную вероятность того, что если в некоторый момент времени стохастическая система находилась в состоянии i, то в следующий по порядку момент времени (когда переходы разрешены) она окажется в состоянии j, причем количество времени, необходимое для этого перехода, не превышает t. Совершенно очевидно, что $Q_{ij}(t) = P_{ij}F_{ij}(t)$. Процессы такого типа называются *полумарковскими* [143, 119, 343].

Процесс восстановления. Обозначим через $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n, \ldots$ моменты времени, когда происходят некоторые события в системе S. Пусть $X_n = t_n - t_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины. Таким образом, мы имеем процесс, который в указанные моменты времени себя «восстанавливает», и, следовательно, $\{X_n\}$ можно назвать *процессом восстановления*. Пусть $N(t)$ есть число актов восстановления (или просто число восстановлений), имеющих место в момент t, т. е. $N(t) = \max\{n \mid X_1 + X_2 \ldots + X_n \leqslant t\}$. Процесс $\{N(t),\ t \geqslant 0\}$ называется процессом учета актов восстановления.

Преобразование Лапласа — Стилтьеса. Пусть $F(t)$ — некоторая вещественная функция; преобразование вида

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dF(t), \quad \operatorname{Re}(s) > 0,$$

называется преобразованием Лапласа — Стилтьеса функции $F(t)$. Если $F(t)$ — непрерывная функция, $dF(t) = f(t)\,dt$, то преобразование Лапласа имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt, \quad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Производящая функция (*z-преобразование*). Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Если сумма $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ существует, то $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ называют *производящей функцией последовательности* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. В частности, если $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ представляет собой некоторое распределение вероятностей, то величину $A(z)$ называют *производящей функцией распределения вероятностей*.

Перейдем теперь к рассмотрению наиболее важных методов анализа стохастических процессов.

(а) Процессы рождения и гибели. В случае когда входной поток является пуассоновским, а длительности обслуживания распределены по экспоненциальному закону, процесс массового обслуживания является марковским. Более того, он относится к особому классу марковских процессов, получивших название *процессов рождения и гибели*.

Поступления требований (*акты рождения*). Пусть число требований в системе обслуживания в момент времени t равняется n. Вероятность того, что на бесконечно малом интервале времени $(t, t + \Delta t]$ в систему поступит лишь одно требование, равняется $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность того, что на этом интервале времени в систему не поступит ни одного требования, равняется $1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$. При этом предполагается, что вероятность $o(\Delta t)$ поступления за время Δt двух и более требований такова, что $o(\Delta t)/\Delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Обслуживание. Пусть вероятность того, что при наличии в момент времени t в системе n требований в интервале $(t, t + \Delta t]$ будет иметь место один акт завершения обслуживания, равняется $\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$. Ясно, что вероятность того, что в указанном интервале времени не будет наблюдаться ни одного акта завершения обслуживания, равняется $1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность завершения (в этом интервале) обслуживания двух и более требований равняется $o(\Delta t)$.

Мы будем также предполагать, что моменты поступления требований в систему и моменты завершения процедур обслуживания не зависят соответственно от моментов предшествующих поступлений и моментов предшествующих актов окончания обслуживания.

Кроме того, будем считать, что взаимозависимость моментов поступления в систему требований на обслуживание и моментов завершения процедур обслуживания определяется лишь числом находящихся в системе требований. Из соображений реалистичности будем предполагать, что $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 > 0$.

При этих условиях длина очереди (число требований в системе) представляет собой случайную величину, обладающую марковским свойством. Обозначим через $Q(t)$ число требований, находящихся в системе обслуживания в момент времени t, и положим

$$P_{ij}(t) = \Pr\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\}.$$

Введя в рассмотрение вероятности переходов в интервале между $(0, t]$ и $(t, t + \Delta t]$, приходим к следующей системе разностно-дифференциальных уравнений:

$$P'_{i0}(t) = -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t),$$

$$P'_{ij}(t) = -(\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \lambda_{i-1} P_{ij-1}(t) + \mu_{j+1} P_{ij+1}(t). \qquad (49)$$

Начальные условия имеют следующий вид:

$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

За исключением некоторых простейших случаев, решение данной системы уравнений сопряжено с большими трудностями. Даже для такой простой системы, как M/M/1, приходится прибегать к производящим функциям и преобразованиям Лапласа. Математические процедуры, связанные с решением системы уравнений (49) для неустановившегося режима функционирования систем M/M/1 и M/M/s, описаны в работе [150] (см. также [147] и [69]). Получающиеся в результате формулы для $P_{i0}(t)$ и $P_{ij}(t)$ были уже приведены в разд. 4.1 [см. соотношения (7) — (9)].

Если предельное распределение существует, то при $t \to \infty$ уравнение баланса для допустимых состояний системы можно получить либо полагая в уравнениях (49) $\lim\limits_{t\to\infty} P'_{ij}(t) = 0$, либо непосредственно рассматривая возможные переходы из одного допустимого состояния в другое. Пусть $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \pi_j$. Тогда уравнения для π_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ принимают следующий вид:

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1,$$

$$(\lambda_j + \mu_j)\pi_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1}, \quad j > 0. \qquad (50)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1.$$

С помощью обычного рекуррентного метода получаем решение системы уравнений (50):

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n}\right]^{-1}, \tag{51}$$

$$\pi_j = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_j}\pi_0, \quad j > 0. \tag{52}$$

Ясно, что предельное распределение существует лишь при условии, если знаменатель в соотношении (51) имеет конечную величину.

Для систем массового обслуживания с групповыми поступлениями требований и (или) с групповым обслуживанием решение системы уравнений, аналогичных уравнениям (50), рекуррентным способом получить невозможно. В этом случае приходится прибегать к производящим функциям. Рассмотрим, например, систему M/M/1 с групповыми поступлениями размера G с распределением $\{g_h\}$. Пусть $\gamma(z) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j$ ($|z| \leqslant 1$) — производящая функция распределения вероятностей. Тогда для $\Pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$ (т. е. для производящей функции предельного распределения вероятностей) имеем

$$\Pi(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z[1-\gamma(z)]}, \quad |z| \leqslant 1.$$

Для каждого конкретного вида $\gamma(z)$ можно получить обращение приведенного выше соотношения, т. е. определить $\{\pi_j\}$.

(б) Дополнительные случайные величины. Система массового обслуживания является марковской, если ее главный процесс полностью характеризует состояние системы в заданный момент времени и информация об этом состоянии оказывается достаточной для описания дальнейшего развития процесса. Таким образом, если случайная величина $Q(t)$ (длина очереди) не является марковской, то наряду с этой характеристикой системы необходимо ввести в рассмотрение другие случайные величины (стохастические процессы), с тем чтобы получить в результате марковское множество случайных величин, характеризующих исследуемый процесс. Пусть, например, $R(t)$ — время, прошедшее после последнего поступления в систему требования на обслуживание, а $S(t)$ — время, прошедшее с момента начала текущего обслуживания, если оно в момент t еще продолжается. Нетрудно убедиться, что вектор $\{Q(t), R(t), S(t)\}$ в модели GI/G/1 содержит информацию, достаточную для предсказания поведения очереди в будущем. Поскольку экспоненциальное распределение обладает марковским

свойством, векторами, полностью описывающими поведение систем M/G/1 и GI/M/1, являются соответственно $\{Q(t), S(t)\}$ и $\{Q(t), R(t)\}$. В том случае, когда G-распределение берется в виде распределения Эрланга, вместо $R(t)$ и $S(t)$ можно взять число экспоненциальных фаз, реализованных после того, как произошло предыдущее событие рассматриваемого типа (поступление требования или начало обслуживания). (Другая альтернатива предложена в работе [104].) Рассматривая систему M/G/1, Кокс [43] использовал этот прием для анализа поведения очереди в произвольно взятый момент времени при непрерывном характере распределения длительностей обслуживания. Пусть $B(x)$ — функция распределения вероятностей, а $\mu(x)$ — функция риска, определяемая соотношением

$$\mu(x)\,dx = \frac{dB(x)}{1-B(x)}.$$

Обозначим через $P_j(t, s)$ совместную вероятность и плотность вероятности того, что в момент времени t в системе находится j требований и затраты времени на обслуживание требования системой равняются s. Введем в рассмотрение интенсивность поступления требований на обслуживание λ; рассуждая далее по схеме, которой мы придерживались при построении модели рождения и гибели для стационарного режима (в обозначениях, принятых для описания стационарных процессов), получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{gathered}
-\lambda\pi_0 + \int_0^\infty \pi_1(s)\,\mu(s)\,ds = 0,\\
\frac{\partial\pi_1(s)}{\partial s} = -(\lambda+\mu(s))\,\pi_1(s),\\
\frac{\partial\pi_j(t)}{\partial s} = -(\lambda+\mu(s))\,\pi_j(s) + \lambda\pi_{j-1}(s),\quad j>1.
\end{gathered} \tag{53}$$

Кроме того, имеем

$$\pi_j(0) = \int_0^\infty \pi_{j+1}(s)\,\mu(s)\,ds + \delta_{1j}\lambda\pi_0,$$

где δ_{1j} равняется единице при $j=1$ и нулю при всех других значениях j. Эти уравнения можно решить с помощью производящих функций.

Этот метод широко применялся Джейсуолом [76] при исследовании очередей с приоритетами. Дополнительные случайные величины использовались в работе [80] при анализе систем типа M/G/1.

(в) Интегродифференциальные уравнения Такача. Приведенное в разд. 4.2 интегродифференциальное уравнение (17) получено

с учетом того факта, что случайная величина $W(t)$, представляющая собой виртуальное время ожидания, обладает свойствами марковского процесса смешанного типа (с переходами из одного состояния в другое, происходящими как непрерывно, так и скачками [162]). Формулы для времени ожидания, получаемые с помощью уравнения (17), можно преобразовать в формулы для длины очереди (как это и сделано в работе [133]).

(г) Вложенная цепь Маркова. Как уже отмечалось выше, в системе M/G/1 векторный процесс $\{Q(t), S(t)\}$ обладает марковским свойством. Пусть теперь $t_0, t_1, t_2, \ldots$ — моменты времени, в которые $S(t_n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ясно, что эти моменты времени являются моментами выбытия из системы обслуженных клиентов. Поэтому $\{Q(t_n)\}$ есть цепь Маркова, которую называют вложенной цепью Маркова системы M/G/1. Обозначив через X_n число требований, поступающих в систему в течение n-го периода обслуживания с вероятностью $\Pr\{X_n = j\} = k_j$, запишем

$$Q_{n+1} = \max[X_{n+1}, Q_n - 1 + X_{n+1}]. \tag{54}$$

Матрица вероятностей переходов записывается в виде

$$P = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & . & . & . \\ \hline 0 & \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_3 & . & . & . \\ 1 & \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_3 & . & . & . \\ 2 & . & \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & . & . & . \\ . & . & . & \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

В системе GI/M/1 длина очереди в моменты поступления требований на обслуживание представляет собой вложенную цепь Маркова. Обозначив длину очереди перед n-м поступлением через Q_n, а число требований, которые могут быть обслужены в интервале времени между n-м и $(n+1)$-м поступлениями, через X_n, можно записать

$$Q_{n+1} = \max[0, Q_n + 1 - X_{n+1}]. \tag{55}$$

Если положить $\sum_{r=j+1}^{\infty} k_r = \alpha_r$, матрица вероятностей переходов для цепи Маркова $\{Q_n\}$ запишется в виде

	0	1	2	3	4	.	.	.
0	α_0	$\mathbf{k}_0$	0	0	0	.	.	.
1	α_1	$\mathbf{k}_1$	$\mathbf{k}_0$	0	0	.	.	.
$P=2$	α_2	$\mathbf{k}_2$	$\mathbf{k}_1$	$\mathbf{k}_0$	0	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Свойства процесса $\{Q_n\}$ теперь нетрудно установить с помощью стандартных методов анализа. Как уже отмечалось, метод вложенных цепей Маркова в теории массового обслуживания впервые был применен Кендаллом [81, 82]. Позднее цепи Маркова использовались в работах [137, 13, 167].

(д) Анализ полумарковских процессов. Представленное в виде вложенной цепи Маркова поведение очереди в системе массового обслуживания с пуассоновским входным потоком в большинстве случаев можно рассматривать как полумарковский процесс, определение которого было дано выше. Методам анализа полумарковских процессов посвящено большое число публикаций. Читателю рекомендуются статьи [115] и [116]. Обширная библиография приведена в работе [33].

(е) Теоретический подход к анализу процессов восстановления. В процессах массового обслуживания всегда можно определить легко интерпретируемые точки (моменты) и периоды восстановления. Так, например, в системе GI/G/1 моменты начала занятых периодов являются точками восстановления, а циклы занятости (загруженности) обслуживающего механизма — периодами восстановления. Таким образом, если распределение периодов занятости известно, переходные распределения основных процессов можно получить с помощью хорошо известных формул теории восстановления. Методы теории восстановления широко использовались при получении формул для анализа поведения очереди в системах M/G/1 и GI/M/1 [65, 165, 12, 15 и 17].

(ж) Комбинаторные методы. В связи с анализом марковского процесса $\{W_n\}$ (времени ожидания n-го требования C_n в системе GI/G/1) использовались различные комбинаторные методы. Пусть V_n — время обслуживания C_n, а U_n — длина интервала времени между поступлениями требований C_{n-1} и C_n. Тогда имеем

$$W_n = \max\,[0,\ W_{n-1} + V_n - U_n], \tag{56}$$

откуда следует интегральное уравнение Линдли (27). Положив $X_n = V_n - U_n$ и $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, можно записать

$(W_0 \equiv 0)$

$$W_n \sim \max(0, S_1, S_2, \ldots, S_n), \tag{57}$$

где знак $\sim$ означает равенство в распределении. Процесс $\{W_n\}$, где W_n определяется соотношением (57), представляет собой один из важнейших процессов в теории флуктуаций случайных величин, исследование которого успешно проводилось Шпитцером, Феллером, Андерсеном, Кемперманом, Такачем, Прабху и др. (см. библиографию в работах [133, 167]).

Следует заметить, что при надлежащих начальных условиях и соответствующим образом выбранных переменных из рекуррентных соотношений (54) и (55) получаем

$$\text{M/G/1: } Q_n \sim X_n + \max(0, S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

$$\text{GI/M/1: } Q_n \sim \max(0, S_1, S_2, \ldots, S_n).$$

Эти комбинаторные соотношения использовались в работах [137, 13, 167] при анализе обслуживающих систем методом вложенных цепей Маркова.

Рекуррентное соотношение (56) берется также за основу при аппроксимации сверхинтенсивного трафика и получении других аппроксимирующих формул в теории массового обслуживания [88, 91, 106, 75]. В работе [93] это соотношение используется в связи с алгебраическим описанием и анализом систем массового обслуживания общего вида. Теорема о слабой сходимости и предельная теорема, справедливые при самых разнообразных исходных предположениях относительно исследуемых процессов массового обслуживания, также основаны на соотношениях указанного типа [75, 172].

(з) Метод Поллачека. Одним из ведущих специалистов в теории массового обслуживания является Поллачек [127, 128, 129, 130]. Проблемы оценивания времени ожидания (пребывания требований в очереди) он рассматривал еще в 1930 г.; его исследования продолжались и в последующие годы, в результате чего были получены фундаментальные результаты как для одноканальных, так и для многоканальных систем массового обслуживания при самых общих предположениях относительно характера входного потока и длительностей обслуживания. Подход Поллачека к анализу систем массового обслуживания отличается особой математической строгостью и аналитической последовательностью. Поэтому лишь немногие специалисты в области исследования операций способны в полной мере оценить его методы и результаты. Поллачек также исходил из соотношения (56) для систем с одним обслуживающим прибором и из обобщения этого соотношения на случай многоканальных систем. При таком подходе определение изображений по Лапласу — Стилтьесу функции W_n (т. е. определение

$E[e^{-\theta W_n}]$) сводится к решению системы интегральных уравнений (а в одноканальном случае — одного интегрального уравнения) с помощью методов теории функций комплексных переменных [37].

(и) Диффузионная аппроксимация. Один из способов получения удобных для использования приближенных формул состоит в аппроксимации исследуемого процесса. При условии сверхвысокой интенсивности трафика хорошей является аппроксимация, основанная на рассмотрении процесса массового обслуживания (в частности, поведения очереди) как некоторого диффузионного процесса (к числу диффузионных относятся марковские процессы, состояния которых меняются непрерывно и таким образом, что усредненное во времени среднее значение и дисперсия смещения на любом бесконечно малом отрезке времени являются конечными величинами) с соответствующими инфинитезимальными моментами первого и второго порядка. Как показано в работе [67], для процесса $\{W(t)\}$ в системе M/G/1 инфинитезимальное среднее и инфинитезимальная дисперсия определяются соотношениями

$$\mu = \lambda E(V) - 1, \ \sigma^2 = \lambda E[V^2],$$

где λ — средняя интенсивность поступления в систему требований на обслуживание, а V — интенсивность обслуживания. С помощью величин μ и σ^2 можно определить процесс, адекватно аппроксимирующий поведение $\{W(t)\}$. (См. также [74] и [61].)

В этом разделе были рассмотрены лишь некоторые из современных теоретических подходов к анализу обслуживающих систем. С другими методами можно познакомиться, обратившись к книгам и библиографическим указателям по теории массового обслуживания. Следует также отметить, что в настоящее время ведутся серьезные исследования по так называемым марковским процессам принятия управляющих решений, являющимся основой для анализа многих проблем управления, о которых мы говорили выше. Библиографию по этим вопросам читатель может найти в книгах [148] и [50], а также в конце гл. III-9 данного справочника.

8. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

В области прикладной математики ценность теоретических результатов непосредственно связана с тем, насколько легко их можно оценить численно. Во многих научных дисциплинах (например, в физике) теоретические результаты получают признание лишь после соответствующего экспериментального подтверждения. Имея в виду данное обстоятельство, мы считаем полезным остановиться на вычислительных аспектах теории массового обслуживания.

Вычислительные проблемы возникают при а) анализе эмпирических данных, б) составлении таблиц и построении графиков, в) вычислении значений тех или иных величин по соответствующим формулам, г) нахождении численных решений систем уравнений и д) моделировании исследуемого процесса. Публикации по этим весьма различным проблемам можно встретить в самых различных журналах, главным образом сугубо прикладной ориентации.

Многие из современных направлений в теории массового обслуживания возникли в результате анализа эмпирических данных. Работы Эрланга и ряда других авторов в области телетрафика, приложения теории массового обслуживания к анализу вычислительных систем и, наконец, транспортные приложения являются иллюстрацией того, как проблемы чисто практического характера привели к необходимости разрабатывать соответствующие математические модели. В результате попыток придать теоретическим результатам форму, удобную для практического использования, для некоторых типов систем массового обслуживания были разработаны таблицы. Примерами могут служить таблицы для систем типа M/M/s с ограниченным числом мест для ожидания [125], таблицы для определения численности обслуживающего персонала и потребностей в соответствующем обеспечении [141], а также [22] таблицы для вероятностей переходов и распределений длительностей периода занятости в системах M/M/1, M/D/1, D/M/1, $M/E_k/1$ и $E_k/M/1$ [22].

Точность численных оценок зависит как от формы представления взаимосвязей между показателями обслуживающей системы, так и от природы системы. Но эти характеристики определяются в свою очередь целями исследования. Результаты, получаемые теоретиками, чаще всего имеют вид, совершенно неудобный с вычислительной точки зрения (за исключением простейших математических соотношений). Следует, однако, отметить, что многие авторы предпринимают попытки интерпретировать свои результаты на языке, доступном специалистам-практикам; немало также и таких теоретических работ, в которых учитываются вычислительные аспекты решаемых задач. Желающие ознакомиться с практическим применением основных формул теории массового обслуживания могут наряду с работами, указанными в разд. 3, использовать учебные пособия по исследованию операций типа [73, 170, 113]. Полезным средством, помогающим оперировать сложными формулами, является обратное преобразование Лапласа. С целью повышения эффективности этого приема при анализе реальных обслуживающих систем были проведены многочисленные прикладные исследования. Сведения о полученных результатах можно найти в работах [66, 158, 55]. В статье [21] описана методология анализа системы M/G/1 с источником требований

конечного размера; авторами этой статьи путем учета структурных характеристик системы получены результаты, удобные с вычислительной точки зрения. Эта методология в работе [20] распространена на случай многоканальных систем типа G/M/s.

Другой подход к получению результатов в численном виде состоит в использовании численных методов решения систем уравнений. Этот подход применялся в работах [104, 99, 117, 95, 119, 1]. В работах [104] и [99] рассматриваются система M/M/1 и ее модификации. В статье [99], кроме того, проведен сравнительный анализ различных численных методов. Группой авторов во главе с Неутсом [117, 95, 119] получены численные решения систем уравнений, описывающих поведение системы M/G/1 с конечной очередью; вычисления проводились на основе рекуррентных соотношений для вероятностей переходов.

В некоторых случаях более эффективным оказывается сочетание вычислений по окончательным формулам с численным анализом системы уравнений. Это продемонстрировано в диссертационной работе Мура [111], посвященной разработке метода анализа систем массового обслуживания, характеризующихся наличием циклов нестационарности.

К моделированию нередко прибегают в тех случаях, когда имеют дело с системами сложного типа. Обсуждение моделирования и той роли, которую оно играет при анализе функционирования системы, можно найти в гл. III-7. Результаты имитационного моделирования нередко помогают определить наиболее перспективные направления теоретических исследований. Хотя и нельзя не согласиться с тем, что результаты моделирования зависят от числовых значений параметров исследуемой системы и что к заключениям общего характера можно прийти лишь путем тщательного анализа большого количества числовых данных, моделирование в случае сложных систем является единственным средством получения требуемой информации. Таким образом, роль имитационного моделирования заключается в том, чтобы при необходимости дополнить результаты, получаемые аналитически. Несмотря на то что моделирование получило весьма широкое распространение, публикаций по вопросам имитационного моделирования систем массового обслуживания не так уж много. В ряде книг по системному анализу [107] дается описание метода имитационного моделирования на уровне, позволяющем получить лишь общее представление об этом методе. Некоторые частные задачи, возникающие в связи с имитационным моделированием систем массового обслуживания, рассматривались Митчеллом [108] Фишманом [63] и др. Отметим также, что в области имитационного моделирования систем массового обслуживания открываются весьма серьезные перспективы в связи с исследованиями, проведенными группой специалистов под руководством Прицкера и посвя-

щенными так называемому методу GERT (Graphical Evaluation and Review Technique) и языку имитационного моделирования GASP-IV. Основные результаты, полученные Прицкером и его соавторами, изложены в работах [139] и [140].

9. ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ознакомление с литературой по теории массового обслуживания позволяет выделить в современных исследованиях в этой области следующие основные направления.

(а) *Анализ основных процессов.* Цель исследований заключается в том, чтобы лучше понять свойства и особенности процессов, протекающих в системах массового обслуживания. Новые конструктивные результаты в этой области важны для совершенствования методологических основ теории массового обслуживания, хотя на методологию исследования операций в целом эти результаты могут влиять лишь косвенно. В качестве примеров можно указать исследования Прабху [135] по представлениям Винера — Хопфа для систем массового обслуживания; комбинаторные исследования Такача [169]; принадлежащее Кейлсону [79] доказательство выпуклости и монотонности распределений характеристик процессов массового обслуживания; выполненные Неутсом [118] исследования по ветвящимся марковским процессам восстановления; общетеоретические исследования марковских процессов восстановления Синлора [34].

(б) *Анализ предельных свойств.* Исследуются асимптотическое и предельное поведения систем массового обслуживания. Предельные теоремы, доказанные Иглехартом, Уиттом и др. [172], могут оказаться полезными и при решении основных операционных проблем в теории массового обслуживания.

(в) *Разработка методов аппроксимации.* В процессе упрощения теоретических результатов аппроксимация моделей процессов представляется более плодотворной, чем аппроксимация конечных формул. Это подтверждают, в частности, результаты исследований Гейвера [67] по диффузионной аппроксимации процессов массового обслуживания и результаты, полученные Пьюэллом [120] в связи с гидродинамической аппроксимацией поведения очередей. С точки зрения приложений теории массового обслуживания упомянутые выше результаты имеют чрезвычайно большое значение [111, 68].

(г) *Обслуживающие сети.* В связи с появлением сетей вычислительных центров и сетей связи проблемы «заторов» (перегрузок), имеющие прямое отношение к теории массового обслуживания на сетях, приобрели особую важность. Основной вклад в этой

области исследований внесли Конвей, Максвелл и Миллер [41]. Сравнительно недавно опубликованные работы [53], [171] и [59] подтверждают, что исследования в этой области продолжаются.

(д) *Практическое применение теории массового обслуживания.* В настоящее время все более четко стали понимать, что, если теория массового обслуживания и впредь будет оставаться одним из разделов исследования операций (а системный подход и прикладная ориентация теории массового обслуживания указывают на такую возможность), она не должна терять связи с практикой. Поэтому необходимо, чтобы получаемые теоретические результаты (несмотря на абстрактность методов и понятий, используемых при анализе систем массового обслуживания) были практически значимыми и пригодными для немедленного применения. Статья Гейвера и Шедлера [68], в которой предложен аппроксимативный подход к теоретическому анализу, а также отдельные разделы книги Бхата [20], посвященные вычислительным аспектам анализа систем M/G/1 и G/M/s с конечными очередями, являются примерами исследований именно в этом направлении. В том же направлении проведены некоторые из исследований Харриса [71].

(е) *Задачи принятия решений.* В силу своей простоты и очевидной практической применимости простые стоимостные модели всегда будут популярны. Теоретические разработки, посвященные марковским процессам принятия управляющих решений, должны подготовить почву для решения некоторых более сложных задач проектирования систем массового обслуживания, а также для установления общих структурных характеристик процессов проектирования обслуживающих систем и управления этими системами.

Наконец, следует отметить, что за последние несколько лет сфера приложений теории массового обслуживания расширилась за счет вычислительных систем. Кроме того, интерес к анализу систем массового обслуживания возрождается и в области систем связи, что объясняется их постоянно возрастающей сложностью.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей главе дан обзор результатов, достигнутых в теории массового обслуживания за весь период ее существования (т. е. за последние шесть с половиной десятилетий). При наличии более чем полутора тысяч публикаций по данной теме отразить в кратком обзоре все существенные результаты, полученные в этой области, естественно, не представляется возможным. Поэтому наша цель заключалась в том, чтобы информировать читателя о тех или иных результатах, не вдаваясь в подробности. При этом были затронуты лишь основные вопросы. Мы стремились, кроме того, придерживаться исторической канвы и быть объективными в оценках вклада в теорию массового обслуживания каждого

из упомянутых нами авторов. Тем не менее мы отдаем себе отчет в том, что представленный материал может восприниматься разными читателями по-разному. Остается лишь надеяться, что это обстоятельство не очень снизит полезность нашей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bagchi T. J., Templeton J. G. C., Numerical Methods in Markov Chains and Bulk Queues, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
2. Bailey N. T. J., Study of Queues and Appointment Systems in Out-Patient Departments with Special Reference to Waiting times, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B14**, 185—199 (1952).
3. Bailey N. T. J., A Continuous Time Treatment of a Simple Queue Using Generating Functions, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B16**, 288—291 (1954).
4. Bailey N. T. J., A Note on Equalizing the Mean Waiting Time of Successive Customers in a Finite Queue, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B17**, 262—263 (1955).
5. Balachandran K. R., Parametric Priority Rules: An Approach to Optimization in Priority Queues, *Operations Res.*, **18**, 526—540 (1970).
6. Balachandran K. R., Purchasing Priorities in Queues, *Management Sci.*, **18**, 319—326 (1972).
7. Balachandran K. R., Control Policies for a Single Server System, *Management Sci.*, **19**, 1013—1018 (1973).
8. Beneš V. W., A Sufficient Set of Statistics for a Simple Telephone Exchange Model, *Bell Syst. Tech. J.*, 36, 939—964 (1957).
9. Beneš V. W., General Stochastic Processes in the Theory of Queues, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963.
10. Beneš V. W., Mathematical Theory of Connecting Networks and Telephone Traffic, Academic Press, New York, 1965.
11. Benson F., Cox D. R., The Productivity of Machines Requiring Attention at Random Intervals, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B13**, 65—82, (1951); **B14**, 200—219 (1952).
12. Bhat U. N., Some Simple Bulk Queueing Systems, Ph. D. Dissertation, Department of Math., University of Western Australia, 1964.
13. Bhat U. N., Imbedded Markov Chain Analysis of Single Server Bulk Queues, *J. Aust. Math. Soc.*, **4(2)**, 244—263 (1964).
14. Bhat U. N., On a Stochastic Process Occurring in Queueing Systems, *J. Appl. Prob.*, **2(2)**, 467—469 (1965).
15. Bhat U. N., Some Explicit Results for the Queue GI/M/1 with Group Sevice, *Sankhya*, **A29**, 199—206 (1967).
16. Bhat U. N., Transient Behavior of Multi-Server Queues with Recurrent Input and Exponential Service Times, *J. Appl. Prob.*, **5(1)**, 158—168 (1968).
17. Bhat U. N., A Study of the Queueing Systems M/G/1 and GI/M/1, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
18. Bhat U. N., Sixty Years of Queueing Theory, *Management Sci.*, **15(6)**, B-280-B-294 (1969).
19. Bhat U. N., Elements of Applied Stochastic Processes, Wiley, New York, 1972.
20. Bhat U. N., Some Problems in Finite Queues, Proc. of Conf. on Math. Methods in Queueing Theory, Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University, 1973.
21. Bhat U. N., Nance R. E., Busy Period Analysis of a Time-Sharing System Modeled as a Semi-Markov Process, *J. ACM*, **18**, 221—238, 1971.

22. Bhat U. N., Sahin I., Transient Behavior of Queueing Systems M/D/1, $M/E_k/1$, D/M/1 and $E_k/M/1$, Tech Memo. No. 135, Department of Operations Research, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, 1969.
23. Bhat U. N., Subba Rao S., A Statistical Technique for the Control of Traffic Intensity in the Queueing Systems M/G/1 and GI/M/1, *Operations Res.*, **20**, 955—966 (1972).
24. Billingsley P., Statistical Inference for Markov Processes, University of Chicago Press, Chicago, 1961.
25. Birnbaum A., Statistical Methods for Poisson Processes and Exponential Populations, *J. Amer. Stat. Assn.*, **49**, 254—266 (1954).
26. Blackburn J. D., Optimal Control of a Single Server Queue with Balking and Reneging, *Management Sci.*, **19**, 297—313 (1972).
27. Brigham G., On a Congestion Problem in an Aircraft Factory, *J. Operations Res. Soc. Amer.*, **3**, 412—428 (1955).
28. Brockmeyer E., Halstrom H. L., Jensen A., The Life and Works of A. K. Erlang, Trans. of the Danish Acad. Sci., No. 2, 1948.
29. Brosh I., Naor P., On Optimal Disciplines in Priority Queueing, *Bull. Int. Stat. Inst.*, **40(2)**, 593- 607 (1963).
30. Brumelle S. L., Some Inequalities for Parallel-Server Queues, *Operations Res.*, **19**, 402—413 (1971).
31. Burke P. J., The Output of a Queueing System, *Operations Res.*, **4**, 699—704 (1956).
32. Champernowne D. G., An Elementary Method of the Solution of the Queueing Problem with a Single Server and a Constant Parameter, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B18**, 125—128 (1956).
33. Cheong C. K., deSmit J. H. A., Teugels J. L., Bibliography on Semi-Markov Processes, CORE Discussion Paper, No. 7310. Center for Operations Research and Econometrics. Universite Catholique de Louvain, Brussels, Belgium, 1973.
34. Cinlar E., Markov Renewal Theory, *Adv. Appl. Prob.*, **1**, 123—187 (1969).
35. Clarke A. B., A Waiting Time Process of Markov Type, *Ann. Math. Stat.*, **27**, 452—459 (1956).
36. Clarke A. B., Maximum Likelihood Estimates in a Simple Queue, *Ann. Math. Stat.*, **28**, 1036—1040 (1957).
37. Cohen J., The Single Server Queue, American Elsevier, New York, 1969.
38. Conolly B. W., A Difference Equation Technique Applie to the Simple Queue, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B20**, 165—167 (1958).
39. Conolly B. W., A Difference Equation Technique Applied to the Simple Queue with Arbitrary Arrival Interval Distributions, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B20**, 167—175 (1958).
40. Conolly B. W., The Busy Period in Relation to the Queueing Process GI/M/1, *Biometrika*, **46**, 246—251 (1959).
41. Conway R. W., Maxwell W. L., Miller L. W., Theory of Scheduling, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
42. Cooper R. B., Introduction to Queueing Theory, Macmillan, New York, 1972.
43. Cox D. R., The Analysis of Non-Markovian Stochastic Processes by the Inclusion of Supplementary Variables, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51**, 433—441 (1955).
44. Cox D. R., Some Problems of Statistical Analysis Connected With Congestion, Proc. Symp. on Congestion Theory, Eds. W. L. Smith and W. E. Wilkinson. University of North Carolina, Chapel Hill, North Carolina, 1965.
45. Cox D. R., Lewis P. A. W., The Statistical Analysis of Series of Events, Metheun and Co., London, 1966.
46. Cox D. R., Smith W. L., Queues, Metheun and Co., London, 1961.
47. Crabill T. B., Optimal Control of a Queue with Variable Service Rates, Ph. D. Dissertation, Department of Operations Research, Cornell University, 1968.

48. Crabill T. B., Optimal Control of Service Facility with Variable Exponential Service Times and Constant Arrival Rate, *Management Sci.*, **18**, 560—566 (1972).
49. Crabill T. B., Gross D., Magazine M., A Survey of Research on Optimal Design and Control of Queues, *Operations Res.*, **22** (1974).
50. Crommelin C. D., Delay Probability Formulae When Holding Times are Constant, *P. O. Elect. Eng. J.*, **25**, 41—50 (1932).
51. Deb R. K., Serfozo R. F., Optimal Control of Batch Service Queues, *Adv. Appl. Prob.*, **5(2)**, 340—361 (1973).
52. Derman C., Finite State Markovian Decision Processes, Academic Press, New York, 1970.
53. Disney R. L., Some Topics in Queueing Network Theory, Proc. Conf. on Math. Methods in Queueing Theory Eds. A. B. Clarke. Western Michigan University, 1973.
54. Doig A., A Bibliography on the Theory of Queues, *Biometrika*, **44**, 490—514 (1957).
55. Dubner H., Abate J., Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform, *J. ACM*, **15**, 115—123 (1968).
56. Edie L. C., Traffic Delays at Toll Booths, *Operations Res.*, **4**, 107—138 (1956).
57. Etschmaier M., Discretionary Priority Processes, Tech. Memo, No. 60, Operations Research Group. Case Institute of Technology, 1966.
58. Evans R. V., Problems and Changes in the Stable Behavior of a Class of Markov Chains, *J. Appl. Prob.*, **8**, 543—550 (1971).
59. Evans R. V., Assembly Operations, Faculty Working Papers, College of Commerce and Bus. Adm., University of Illinois at Urbana-Champaign, April 4, 1973.
60. Feller W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, 3rd Ed., Wiley, New York, 1968.
61. Fischer M. J., On Two Problems in Alternating Queues, Ph. D. Dissertation Southern Methodist University, 1971.
62. Fischer M. J., The Waiting Time in the $E_k/M/1$ Queueing System, *Operations, Res.*, **22**, 898—902 (1974).
63. Fishman G. S., Estimation in Multiserver Queueing Simulations, *Operations Res.*, **22** (1974).
64. Fry T. C., Probability and its Engineering Uses, Van Nostrand Reinhold, New York, 1928.
65. Gaver D. P., Jr., Imbedded Markov Chain Analysis of a Waiting Line Process in C ntinuous Time, *Ann. Math. Stat.*, 30, 698—720 (1959).
66. Gaver D. P., Jr., Observing Stochastic Processes and Approximate Transform Inversion, *Operations Res.*, **14**, 444—459 (1966).
67. Gaver D. P., Jr., Diffusion Approximations and Models for Certain Congestion Problems, *J. Appl. Prob.*, **5**, 607—623 (1968).
68. Gaver D. P., Jr., Shedler G. S., Processor Utilization in Multi Programming Systems via Diffusion Approximations, *Operations Res.*, **21**, 569—576 (1973).
69. Gross D., Harris C. M., Fundamentals of Queueing Theory, Wiley, New York, 1974.
70. Haight F. A., Mathematical Theories of Traffic Flow, Academic Press, New York, 1963.
71. Harris C. M., Some New Results in the Statistical Analysis of Queues, Proc. Conf. on Math. Methods in Queueing Theory Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University. 1973.
72. Heyman D. P., Optimal Operating Policies for M/G/1 Queueing Systems, *Operations Res.*, **16**, 362—382 (1968).
73. Hillier F. S., Lieberman G. J., Introduction to Operations Research, Holden-Day, San Francisco, 1967.

74. Iglehart D. L., Limiting Diffusion Approximations for the Many Server Queue and the Repairman Problem, *J. Appl. Prob.*, **2**, 429—441 (1965).
75. Iglehart D. L., Whitt W., Multiple Channel Queues in Heavy Traffic II, *Adv. Appl. Prob.*, **2 (2)**, 355—369 (1970).
76. Jaiswal N. K., Priority Queues, Academic Press, New York, 1968.
77. Jewell W., A Simple Proof of: L = λW, *Operations Res.*, **15**, 1109—1116 (1967).
78. Keilson J., The Ergodic Queue Length Distribution for Queueing Systems with Finite Capacity, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B28**, 190—201 (1966).
79. Keilson J., Convexity and Complete Monotonicity in Queueing Distribution, and Associated Limit Behavior, Proc. Conf. on Math. Methods on Queueing Theory, Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University, 1973.
80. Keilson J., Kooharian A., On Time Dependent Queueing Processes, *Ann. Math. Stat.*, **31**, 104—112 (1960).
81. Kendall D. G., Some Problems in the Theory of Queues, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B13**, 151—185 (1951).
82. Kendall D. G., Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queue and Their Analysis by the Method of Imbedded Markov Chains, *Ann. Math. Stat.* **24**, 338—354 (1953).
83. Kemeny J. G., Snell J. L., Finite Markov Chains, Van Nostrand Reinhold, New York, 1960.
84. Kemperman J. H. B., The Passage Problem for a Stotionary Markov Chain, University of Chicago Press, Chicago, 1961.
85. Khintchine A., Mathematisches über die Erwartung von einen öffentlicher Schalter, *Sbornik*, **40**, 2 (1935).
86. Khintchine A., Mathematical Methods in the Theory of Queueing, Charles Griffin, London, 1960.
87. Kiefer J., Wolfowitz J., On the Theory of Queues with Many Servers, *Trans. Am. Math. Soc.*, **78**, 1—18 (1955).
88. Kingman J. F. C., The Single Server Queue in Heavy Traffic, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **57**, 902—904 (1961).
89. Kingman J. F. C., On Queues in which Customers are Served in Random Order, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58, 79—91 (1962).
90. Kingman J. F. C., The Use of Spitzer's Identity in the Investigation of the Busy Period and Other Quantities in the Queue GI/G/1, *J. Aust. Math. Soc.*, **2**, 345—356 (1962).
91. Kingman J. F. C., On Queues in Heavy Traffic, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B24**, 383—392 (1962).
92. Kingman J. F. C., The Heavy Traffic Approximation in the Theory of Queues, Proc. Symp. on Congestion Theory, Eds. W. L. Smith and W. E. Wilkinson, University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1965.
93. Kingman J. F. C., On the Algebra of Queues, *J. Appl. Prob.*, 3, 285—326 (1966).
94. Kleinrock L., Optimal Bribing for Queue Position, *Operations Res.*, **15**, 304—318 (1967).
95. Klimko E. M., Neuts M. F., The Single Server Queue in Discrete Time—Numerical Analysis II and III, *Nav. Res. Log. Quart.*, **20**, 297—304 (1973).
96. Ledermann W., Reuter G. E., Spectral Theory for the Differential Equations of Simple Birth and Death Processes, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **A246**, 321—369 (1954).
97. Lee A. M., Applied Queueing Theory, St. Martin's Press, New York, 1966.
98. Lee T. C., Judge G. G., Zellner A., Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data, North Holland, Amsterdam, 1970.
99. Leese E. L., Boyd D. W., Numerical Methods of Determining the Transient Behavior of Queues with Variable Arrival Rates, *J. Canadian Operations Res. Soc.*, **4(1)**, 1—13 (1966).

100. LeGall P., Les Systémes Avec au Sans Attente et Les Processus Stochastiques, Tome 1, Dunod, Paris, 1962.
101. Lilliefors H. W., Some Confidence Intervals for Queues, *Operations Res.*, 14(4), 723—727 (1966).
102. Lindley D. V., The Theory of Queues with a Single Server, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 48, 277—289 (1952).
103. Little J. D. C., A Proof of the Queueing Formula L = λW, *Operations Res.*, 9, 383—387 (1961).
104. Luchak G., The Solution of the Single Channel Queueing Equation Characterized by a Time-Dependent Poisson Distributed Arrival Rate and a General Class of Holding Times, *Operations Res.*, 4, 711—732 (1956).
105. Mace A. E., Sample Size Determination, Van Nostrand Reinhold, New York, 1964.
106. Marshall K. T., Some Inequalities in Queueing, Bounds for Some Generalizations of the GI/G/1 Queues, *Operations Res.*, 16, 651—665, 841—848 (1968).
107. McMillan C., Gonzales R. F., Systems Analysis, A Computer Approach to Decision Models, Richard D. Irwin, Homowood, Illinois, 1968.
108. Mitchell W., Variance Reduction by Antithetic Variates in GI/G/1 Queueing Simulations, *Operations Res.*, 21 (1973).
109. Moder J. J., Phillips C. R., Jr., Queueing with Fixed and Variable Channels, *Operations Res.*, 10, 218—231 (1962).
110. Molina E. C., Application of the Theory of Probability to Telephone Trunking Problems, *Bell. Syst. Tech. J.*, 6, 461—494 (1926).
111. Moore S. C., Approximate Techniques for Non-Stationary Queues. Ph. D. Dissertation, Southern Methodist University, Dallas, Texas, 1972.
112. Morse P. M., Stochastic Properties of Waiting Lines, *J. Operations Res. Soc. Amer.*, 3, 255—261 (1955).
113. Morse P. M., Queues Inventories and Maintenance, Wiley, New York, 1958.
114. Morse P. M., The Application of Queueing Theory in Operations Research, Queueing Theory, Recent Developments and Applications, American Elsevier, New York, 1967.
115. Neuts M. F., The Single Server Queue with Poisson Input and Semi-Markov Service Times, *J. Appl. Prob.*, 3, 202—230 (1966).
116. Neuts M. F., A Queue Subject to Extraneous Phase Changes, *Adv. Appl. Prob.*, 3, 78—119 (1971).
117. Neuts M. F., The Single Server Queue in Discrete Time—Numerical Analysis I, *Nav. Res. Log. Quart.*, 20, 305—319 (1973).
118. Neuts M. F., Markov Renewal Branching Processes in Queueing Theory, Proc. Conf. on Math. Methods in Queueing Theory, Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University, 1973.
119. Neuts M. F., Heimann D., The Single Server Que in Discrete Time—Numerical Analysis IV, *Nav. Res. Log. Quart.*, 20, 735—766 (1973).
120. Newell G. F., Applications of Queueing Theory, Chapman and Hall, London, 1971.
121. Oliver R. M., Pestalozzi G., On a Problem of Optimum Priority Classification, *J. Indust. Appl. Math.*, 13(3), 580—591 (1965).
122. Palm C., Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr, *Ericsson Technics*, 44, 1—89 (1943).
123. Palm C., The Distribution of Repairmen in Servicing Automatic Machines, In Swedish, *Indust. Nord.*, 75, 75—90, 90—94, 119—123 (1947).
124. Palm C., Waiting Times with Random Served Queue, *Tele*, 1, 1—107, English ed., (1957).
125. Peck L. G., Hazelwood R. N., Finite Queueing Tables, Wiley, New York, 1958.
126. Phipps T. E., Jr., Machine Repair as a Priority Waiting Line Problem, *Operations Res.*, 4, 76—85 (1956).

127. Pollaczek F., Uber das Warteproblem, *Math. Z.*, 38, 492–537 (1934).
128. Pollaczek F., Sur une Généralisation de la Théorie des Attentes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **236**, 578–580 (1953).
129. Pollaczek F., Problèms Stochastiques Posés par le Phénomene de Formation d'une Queue d'Attente à un Guichet et par des Phénoménes Apparentés, Gauthiers Villars, Paris, 1957.
130. Pollaczek F., Concerning an Analytic Method for the Treatment of Queueing Problems. Proc. Symp. on Congestion Theory, Eds. W. L. Wmith and W. E. Wilkinson, University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1965.
131. Prabhu N. U., Some Results for the Queue with Poisson Arrivals, *J. Roy. Stat. Soc.*, **22**, 104–107 (1960).
132. Prabhu N. U., Elementary Methods for Some Waiting Time Problems, *Operations Res.*, **10**, 559–566 (1962).
133. Prabhu N. U., Queues and Inventories, Wiley, New York, 1965.
134. Prabhu N. U., The Simple Queue in Non-Equilibrium, *Opsearch*, **6(2)**, 118–128 (1969).
135. Prabhu N. U., Wiener-Hopf Techniques in Queueing Theory, Proc. Conf. on Math. Methods in Queueing Theory, Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University, 1973.
136. Prabhu N. U., Bhat U. N., Further Results for the Queue with Poisson Arrivals, *Operations Res.*, **11**, 380–386 (1963).
137. Prabhu N. U., Bhat U. N., Some First Passage Problems and Their Applications to Queues, *Sankhya*, **A25**, 281–292 (1963).
138. Prabhu N. U., Stidham S., Jr., Optimal Control of Queueing Systems, Proc. Conf. on Math. Methods in Queueing Theory, Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University, 1973.
139. Pritsker A. A. B., The Gasp IV Simulation Language, Wiley, New York, 1974.
140. Pritsker A. A. B., Phillips D. T., GERT Network Analysis of Complex Queueing Systems, Research Memo., No. 72–1, School of Industrial Engineering, Purdue University, Lafayette, Indiana, 1972.
141. Purvis R. E., McLaughlin R. L., Mallory W. K., Queueing Tables for Determining System Manning and Related Support Requirements, Behavioral Sciences Lab. Air Force Systems Comm., Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1964.
142. Putter J., The Treatment of Ties in Some Nonparametric Tests, *Ann. Math. Stat.*, **26**, 268—386 (1955).
143. Pyke R. A., Markov Renewal Processes, Definitions and Preliminary Properties, Markov Renewal Processes with Finitely Many States, *Ann. Math. Stat.*, **32**, 1231–1242, 1243–1259 (1961).
144. Reich E., Waiting Times When Queues are in Tandem, *Ann. Math. Stat.*, **28** 768–773 (1957).
145. Reich E., Departure Processes, Proc. Symp. on Congestion Theory, Eds. W. L. Smith and W. E. Wilkinson, University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1965.
146. Rice S. O., Single Server Systems — II, Busy Periods, *Bell Syst. Tech. J.*, **41**, 279–310 (1962).
147. Riordan J., Stochastic Service Systems, Wiley, New York, 1962.
148. Ross S. M., Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisco, 1970.
149. Saaty T. L., Time Dependent Solution of Many Server Poisson Queue, *Operations Res.*, **8**, 755–772 (1960).
150. Saaty T. L., Elements of Queueing Theory, McGraw-Hill, New York, 1961.
151. Saaty T. L., Seven More Years of Queueing Theory, A Lament and a Bibliography, *Nav. Res. Log. Quart.*, **13**, 447–476 (1966).
152. Schrage L., A Proof of the Optimality of the Shortest Remaining Processing Time Discipline, *Operations Res.*, **16**, 687–690 (1968).

153. Schrage L., Miller L. W., The Queue M/G/1 with Shortest Remaining Processing Time Discipline, *Operations Res.*, **14**, 670—684 (1966).
154. Smith W. L., On the Distribution of Queueing Times, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49**, 449—461 (1953).
155. Sobel M. J., Optimal Average-Cost Policy for a Queue with Start-up and Shut-down Costs, *Operations Res.*, **17**, 145—162 (1962).
156. Sobel M. J., Optimal Operation in Queues, Proc. Conf. on Math. Methods in Queueing Theory, Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University, 1973.
157. Spitzer F., A Combinatorial Lemma and its Applications to Probability Theory, *Trans. Am. Math. Soc.*, **82**, 323—339 (1956).
158. Stehfest H., Algorithm 368:Numerical Inversion of Laplace Transforms, *Communications ACM*, **13**, 47—49 (1970).
159. Stidham S., Jr., On the Optimality of Single Server Queueing Systems, *Operations Res.*, **18**, 708—732 (1970).
160. Stidham S., Jr., $L = \lambda W$, A Discounted Analogue and a New Proof, *Operations Res.*, **20**, 1115—1126 (1972).
161. Syski R., Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems, Oliver and Boyd, London, 1960.
162. Takács L., Investigation of Waiting Time Problems by Reduction to Markov Processes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **6**, 101—129 (1955).
163. Takács L., Transient Behavior of a Single Server Queueing Process with Recurrent Input and Exponentially Distributed Service Times, *Operations Res.*, **8**, 231—245 (1960).
164. Takács L., The Transient Behavior of a Single Server Queueing Process with Poisson input, Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., University of California Press, Berkeley, California, 1961, pp. 535—567.
165. Takács L., Introduction to the Theory of Queues, Oxford University Press, New York, 1962.
166. Takács L., The Limiting Distribution of the Virtual Waiting Time and the Queue Size for a Single Server Queue with Recurrent Input and General Service Times, *Sankhya*, **A25**, 91—100 (1963).
167. Takács L., Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes, Wiley, New York, 1967.
168. Takács L., On Erlang's Formula, *Ann. Math. Stat.*, **40**, 71—78 (1969).
169. Takács L., Occupation Time Problems in the Theory of Queues, Proc. Conf. on Math. Methods in Queueing Theory, Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University, 1973.
170. Wagner H. M., Principles of Operations Research, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
171. Wallace V. L., Algebraic Techniques for Numerical Solution of Queueing Networks, Proc. Conf. on Math. Methods in Queueing Theory, Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University, 1973.
172. Whitt W., Recent Research on Queues in Heavy Traffic, Proc. Conf. on Math. Methods in Queueing Theory, Ed. A. B. Clarke, Western Michigan University, 1973.
173. Wolff R. W., Problems of Statistical Inference for Birth and Death Queueing Models, *Operations Res.*, **13**, 343—357 (1965).
174. Yadin M., Naor P., on Queueing Systems with a Removable Server, *Operations Res.*, **14**, 393—405 (1963).
175. Yadin M., Naor P., On Queueing Systems with Variable Service Capacities, *Nav. Res. Log. Quart.*, **14**, 43—54 (1967).

III-3. Теория полезности

П. Фишберн[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении проблем построения целенаправленных систем всегда приходится учитывать цели, желания и нужды тех, кто управляет такими системами или сам подвергается их воздействию. Именно поэтому исследование полезности представляет собой основу теории и практики исследований операций.

В данной главе рассмотрены некоторые теоретические вопросы, относящиеся к структурам полезности, и заложены теоретические основы построения процедур для определения предпочтений в количественной форме. Все это совершенно необходимо для лиц, принимающих решения, а также для тех, кто помогает им в этом сложном деле. Излагаемый материал отражает современное состояние теории принятия решений и дает представление о практике исследования операций.

Следует отметить, что термин «полезность» имеет два разных значения. Первое (более важное) — это качественная, или сравнительная, оценка, характеризуемая такими утверждениями, как: «Я ценю это больше, чем то» или «Я предпочитаю x, а не y». Второе значение этого термина — количественная оценка, когда мы в виде числа выражаем наше предпочтение, пытаясь отразить его сравнительную природу. Вообще говоря, представление полезности в виде некоторого числа является удобным количественным выражением исходного качественного отношения предпочтения. Учитывая такую двойственность, мы будем использовать термин «предпочтение» для отображения качественной характеристики объекта, а термин «полезность»— для количественного представления предпочтений.

1.1. Краткий исторический обзор

Основы современной теории полезности были заложены в восемнадцатом столетии. Именно тогда несколько математиков, заинтересовавшись теорией вероятностей и ее применением к случайным играм и страхованию, выдвинули принцип (максиму), в соответствии с которым благоразумный человек, попав в критическую ситуацию, в которой возникла угроза его благосостоянию, должен вести себя так, чтобы максимизировать размер ожидаемого

[1)] Peter C. Fishburn, The Pennsylvania State University.

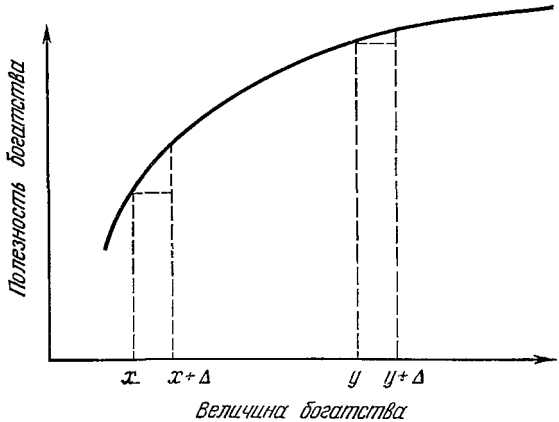


Рис. 1. Убывание предельной полезности.

богатства или денежной прибыли. Например, утверждалось, что некоторая персона, располагающая очень скромными средствами, может благоразумно предпочесть гарантированный подарок в девять тысяч дукатов обычной азартной игре в «орлянку», при которой выплачивается либо 20 тысяч дукатов, либо ничего. Помимо максимизации ожидаемой денежной прибыли, Крамер и Бернулли [1738] предложили максимизировать ожидаемую величину полезности. Чтобы можно было вычислить ожидаемую величину, они предположили, что для многих людей полезность богатства растет с убывающей скоростью по мере роста богатства. На рис. 1 хорошо проиллюстрирован этот так называемый закон убывающей предельной полезности: когда богатство возросло, то добавление еще одной единицы богатства приводит к меньшему возрастанию полезности, чем в начале роста благосостояния.

Хотя идеи Крамера и Бернулли и не были полностью забыты, заметных сдвигов в использовании понятия полезности для принятия решений в ситуациях, содержащих элементы риска или неопределенности, не происходило. И лишь почти через два столетия после того, как Крамер и Бернулли выдвинули свои новаторские идеи, в 1931 г. молодой философ и математик Рамсей [50] построил в общих чертах систему аксиом для субъективной ожидаемой полезности. В дальнейшем мы будем очень часто обращаться к этим идеям.

Между тем экономисты, изучая покупательную способность при отсутствии элемента риска, создали свою собственную теорию полезности, содержащую принцип убывающей предельной полезности. Для иллюстрации их взглядов нам понадобятся некоторые понятия и обозначения. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — набор продук-

тов, в который входит x_1 единиц первого продукта (или товара, или вида услуг), x_2 единиц второго товара и т. д. В 70-х годах прошлого века Йевон, Менгер, Вальрас ввели в рассмотрение аддитивную функцию полезности $u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n)$, с помощью которой они вычисляли общее удовлетворение индивидуума, получаемое им от набора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; при этом предполагалось, что полезность u_i i-го продукта зависит только от его количества x_i. Более того, они предполагали, что каждая функция u_i возрастает с убывающей скоростью по мере возрастания x_i; таким образом, они применили концепцию убывающей предельной полезности к каждому продукту в отдельности. В конце девятнадцатого и в начале двадцатого столетия ряд видных экономистов, таких, как Эджеворт, Фишер, Парето и Слуцкий, предлагали заменить аддитивную функцию полезности на функцию полезности более общего вида $u(x_1, \ldots, x_n)$. Их аргументы сводились к тому, что последняя позволяет учесть взаимозависимость между продуктами (например, их дополнительность и взаимозаменяемость) и при некоторых предположениях позволяет объяснить ряд фактов, ранее установленных с помощью аддитивной функции полезности.

Вскоре после этого Фрит [29] сделал важный шаг вперед, сформулировав аксиомы для предпочтений и сравнения различий в предпочтениях; выдвинутые аксиомы должны были обеспечить базис для получения количественной меры предпочтений с экономической точки зрения. Идея обоснования полезности с помощью аксиом для предпочтений в дальнейшем была развита в работах [11. 62]. Интересно, что аксиоматика для аддитивной функции полезности, использованной Йевона, Менгером и Вальрасом, введена недавно [12].

Нейман и Моргенштерн предложили аксиомы полезности для принятия решений в ситуациях с элементом риска. Появление книги [58] способствовало дальнейшему развитию экономической теории. Представляют интерес аксиомы предпочтений между возможными альтернативами, для которых считаются заданными вероятности исходов осуществления; эти аксиомы явились фундаментом понятия ожидаемой полезности Крамера — Бернулли и придали ему необходимую строгость. Следует отметить, что Рамсей предвосхитил некоторые идеи Неймана и Моргенштерна, но его работа оставалась долгое время незамеченной. Рамсей старался вывести полезность и вероятность из аксиом предпочтения. На результаты Рамсея обратил внимание Сэвидж, который в своей работе [52] впервые ввел строгую систему аксиом для субъективной ожидаемой полезности, в которой полезность и вероятностные меры получаются из аксиом предпочтения.

1.2. Краткое содержание главы

Хотя теоретические построения, упоминавшиеся выше, предполагают определенные структурные свойства у изучаемых объектов, теория предпочтений исходит только из двух гипотез. Во-первых, предполагается, что не является пустым множество, которое рассматривается как множество вариантов решения, стратегий или способов поведения. Во многих случаях это множество содержит недопустимые альтернативы вследствие, например, того, что трудно идентифицировать все допустимые альтернативы с помощью какой-либо простой процедуры или потому, что некоторые недопустимые альтернативы могут потребоваться при измерении или масштабировании полезности.

Во-вторых, предполагается бинарность предпочтений, что находит выражение во введении отношения «предпочтение — или — безразличие» (нестрогого предпочтения) на множестве альтернатив. В следующем разделе рассматриваются основные принципы построения бинарных отношений; затем обсуждается вопрос о том, какое отношение принимать: «предпочтение» либо «предпочтение — или — безразличие»; показано, что при довольно мягких предположениях ответ на поставленный вопрос зависит только от личного вкуса исследователя. Далее описываются принципы упорядочения отношений, включая транзитивность, а затем излагаются основные идеи теории полезности, базирующиеся только на двух введенных предположениях и на аксиомах (или допущениях), которые можно применить к структуре предпочтений.

В последующих разделах описываются специальные структуры альтернатив. В разд. 3 рассматривается множество распределений вероятностей, определенных на множестве исходов или на множестве чистых стратегий. Вводятся две системы аксиом для линейной полезности (т. е. для ожидаемой полезности). Одна из систем аксиом близка аксиоматике Неймана — Моргенштерна для понятия ожидаемой полезности Крамера — Бернулли. Другая, менее жесткая (более общая) система аксиом должна учесть некоторые аспекты психологической действительности, включая нетранзитивное безразличие. Раздел заканчивается кратким обзором ключевых понятий теории полезности «богатства», таких, как гарантированный эквивалент и уклонение от риска.

В разд. 4 основное внимание уделяется рассмотрению альтернатив или исходов, которые характеризуются целым набором специальных критериев, факторов, продуктов или характерных признаков. В этом разделе исследуется независимость предпочтений между факторами или характерными признаками. Оказалось, что свойство независимости приводит к функциям (моделям) полезности специального вида, таким, как лексикографическая

или иерархическая модель и аддитивная модель $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n)$. Здесь же упоминается об аддитивной и близких к ней формах функции полезности, определенной для исходов принятия решений в ситуациях, содержащих элемент риска.

Глава заканчивается замечаниями о теории субъективной ожидаемой полезности, в которой аксиомы предпочтений неопределенных альтернатив решений позволяют получить полезность для исходов и оценить вероятности неопределенных событий. Без излишних деталей рассмотрены подходы Рамсея [50] и Сэвиджа [52]; показано, чем они отличаются и что требуют дополнительно по сравнению с теорией ожидаемой полезности Неймана—Моргенштерна.

2. ПРЕДПОЧТЕНИЕ И ПОЛЕЗНОСТЬ

Фундаментальным понятием теории предпочтений является бинарное отношение, поэтому необходимо изложить некоторые положения теории бинарных отношений.

Бинарное отношение R на непустом множестве X есть подмножество множества всех упорядоченных пар элементов из X; множество всех упорядоченных пар задается прямым произведением $X \times X = \{(x, y): x \in X, y \in X\}$. Запись xRy (читается: x находится в отношении R к y) означает, что (x, y) принадлежит R; аналогично *не* xRy (записывается как $x\overline{R}y$) означает, что (x, y) не принадлежит R, или что x не находится в отношении R к y.

Ниже указаны восемь возможных свойств бинарных отношений, разделенных на четыре группы. Во всех определениях предполагается, что x, y и z являются элементами множества X. Бинарное отношение R на множестве X является:

1) рефлексивным, если xRx для каждого $x \in X$; перефлексивным, если $x\overline{R}x$ для каждого $x \in X$;

2) симметричным, если из xRy следует yRx; асимметричным, если из xRy следует $y\overline{R}x$;

3) транзитивным, если из xRy и yRz следует xRz; отрицательно транзитивным, если из $x\overline{R}y$ и $y\overline{R}z$ следует $x\overline{R}z$;

4) связным, если xRy или yRx; слабосвязным, если из $x \neq y$ следует xRy или yRx.

Все перечисленные свойства стандартны, за исключением двух последних. Связное отношение часто называют сильно связным или полным; слабосвязное отношение также называют полным или просто связным. В дальнейшем мы будем пользоваться терминологией, введенной определениями, перечисленными выше.

Два свойства первой группы являются противоречивыми (т. е. они не могут выполняться одновременно), но этого нельзя утверждать относительно свойств остальных трех групп. Например, асимметричность и отрицательная транзитивность означают транзитивность; связность влечет слабую связность; симметричность и асимметричность имеют место одновременно, если R пусто; если же R не пусто, то симметричность и асимметричность являются противоречивыми свойствами.

Пусть X — множество всех живых людей. Тогда отношение «выше, чем» является нерефлексивным, асимметричным, транзитивным и отрицательно транзитивным; отношение «ему (ей) столько же лет, как и» рефлексивно, транзитивно, отрицательно транзитивно и связно; отношение «является сестрой» (по крайней мере один из родителей общий) симметрично (но почему не транзитивно?); отношение «знаю имя», используемое при исследованиях пациентов с потерей памяти, не удовлетворяет ни одному из перечисленных свойств.

Транзитивное бинарное отношение называется упорядочением или отношением порядка. К сожалению, для обозначения отношений порядка используются весьма различные термины. Например, асимметричное, транзитивное и слабосвязное отношение называют по-разному: линейным порядком, строгим упорядочением, сильным порядком, простым порядком, общим упорядочением, полным упорядочением, связным упорядочением и цепью. (Напомним, что таким отношением является отношение «больше, чем» на множестве действительных чисел.) Некоторые из только что перечисленных терминов используются также для обозначения принципов упорядочения с другими свойствами. Следовательно, когда говорят о некотором типе упорядочения, то необходимо определить, какими свойствами оно обладает.

2.1. Предпочтение и безразличие

В теории предпочтений используются два основных бинарных отношения на множестве X. Во-первых, отношение нестрогого предпочтения $\succsim$; запись $x \succsim y$ читается следующим образом: «x либо предпочтительнее, чем y, либо безразличен к y». Чаще пользуются формулировкой: «y не предпочтительнее, чем x». Во-вторых, применяется отношение предпочтения $\succ$; запись $x \succ y$ читается так: «x предпочтительнее, чем y». Отношение нестрогого предпочтения чаще встречается в литературе, но в последнее время некоторые авторы стали пользоваться последним определением.

Когда в качестве основного бинарного отношения берется отношение нестрогого предпочтения ($\succsim$), то отношения предпочтения ($\succ$) и безразличия ($\sim$) определяются через нестрогое предпочтение $\succsim$ следующим образом:

$x \succ y$ тогда и только тогда, когда $x \succsim y$, и неверно, что $y \succsim x$;
$x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x \succsim y$ и $y \succsim x$. (1)

Если же в качестве основного бинарного отношения берется $\succ$, то отношение безразличия и отношение нестрогого предпочтения определяются на основе $\succ$ как

$x \sim y$ тогда и только тогда, когда неверно $x \succ y$ и неверно $y \succ x$;
$x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $x \succ y$ или неверно $x \succ y$ и неверно $y \succ x$. (2)

Связь между этими двумя подходами прослежена в книге [22], где показано, что в некоторых случаях они эквивалентны. В частности, определим отношение $\succ$ из отношения $\succsim$ с помощью (1), а затем полученное отношение $\succ$ подставим в правую часть (2); тогда возникнет новое отношение $\succsim'$; оказывается, что $\succsim' = \succsim$ тогда и только тогда, когда отношение $\succsim$ является связным. Если пойти другим путем и определить отношение $\succsim$ из отношения $\succ$ с помощью (2) и затем подставить его в правую часть (1), то можно определить новое отношение $\succ'$; оказывается, что $\succ' = \succ$ тогда и только тогда, когда отношение $\succ$ асимметрично.

В том случае, когда в качестве основного бинарного отношения берется отношение $\succ$, представляется исключительно целесообразным ввести предположение о его асимметричности, так как в противном случае сохранится возможность того, что одновременно x будет предпочтительнее, чем y, а y предпочтительнее, чем x. Аналогично если в качестве основного бинарного отношения берется отношение $\succsim$, то, по-видимому, разумно предположить наличие связности, поскольку иначе может оказаться, что x не считается столь же желательным, как y, а y не считается столь желательным, как x.

Будем предполагать, что отношение $\succsim$ является связным, а отношение $\succ$ — асимметричным, причем независимо от того, какое из них выбрано в качестве основного. Как уже отмечалось выше, на вопрос о том, какое из двух отношений ($\succ$ или $\succsim$) взять в качестве основного бинарного отношения, каждый отвечает в соответствии со своими личными вкусами. Поскольку автор предпочитает отношение $\succ$, то оно будет во всех дальнейших рассуждениях выполнять роль основного бинарного отношения; отношение безразличия определяется как отсутствие строгого предпочтения в соответствии с (2), а отношение $\succsim$ задается с помощью (2). Из асимметричности (а значит, и нерефлексивности) отношения $\succ$ следует, что отношение безразличия рефлексивно ($x \sim x$); отношение $\sim$ симметрично по определению.

2.2. Транзитивность

Отношение предпочтения $\succ$ на X транзитивно, если из того, что x предпочтительнее, чем y, а y предпочтительнее, чем z, следует, что x предпочтительнее, чем z. В целом это свойство кажется разумным, поэтому будем предполагать, что оно выполняется в большинстве дальнейших рассуждений. Транзитивность нарушается, если ($x \succ y$, $y \succ z$, $x \sim z$) или ($x \succ y$, $y \succ z$, $z \succ x$) для некоторых x, y и z из X.

Несмотря на очевидную разумность предположения о транзитивности предпочтений, имеется достаточно примеров и наблюдений, из которых видно, что здравомыслящие люди могут иметь нетранзитивные предпочтения в некоторых ситуациях (см. [10, 56, 59]). Альтернативы, используемые, чтобы проиллюстрировать этот факт, обычно включают несколько критериев или характерных признаков, как в следующем примере, когда молодому ученому предлагается выбрать место академической работы:

(а) x: ассистента в очень известном университете с окладом 15 тыс. долл.;

(б) y: доцента в университете штата N с окладом 18 тыс. долл.;

(с) z: профессора в малоизвестном колледже с окладом 21 тыс. долл.

Ученый предпочитает x больше, чем y, рассудив, что престиж известного университета стóит 3 тыс. долл.; исходя из аналогичных соображений, он предпочитает y больше, чем z, но, сравнивая x и z, он чувствует, что занимаемый пост и величина оклада перевешивают престижность, поэтому он предпочитает z по сравнению с x. В описанной ситуации его предпочтения образуют цикл $x \succ y$, $y \succ z$, $z \succ x$.

Приведенный пример хорошо иллюстрирует проблему, возникающую в теории выбора, а именно то, что бинарное отношение не дает путеводной нити для выхода из цикла, не позволяет сделать выбор между x, y и z, когда каждая альтернатива менее предпочтительна, чем некоторая другая. Следовательно, здесь нет сáмой предпочтительной альтернативы. Таким образом, теория выбора, которая сможет учесть и разрешить циклические предпочтения, должна быть «богаче» и «глубже» по сравнению с теоретическими построениями, обсуждаемыми в данной главе (см. [54, 57]).

Отношение безразличия ($\sim$) на X транзитивно, если из того, что x безразличен по отношению к y, а y безразличен к z, следует, что x безразличен по отношению к z. Отношение безразличия не транзитивно, если существуют x, y и z, для которых $x \sim y$, $y \sim z$ и $x \succ z$. Хотя во многих примерах нетранзитивных безразличий используется несколько критериев или характерных приз-

наков, можно привести и простейшие «одномерные» примеры, демонстрирующие тот же факт. Для этого можно рассмотреть ситуацию с некоторым пороговым предпочтением, которое остается незамеченным благодаря несущественным или малым различиям в предпочтениях. В работе [38] это рассмотрено на примере чашки кофе, в которую добавляют один за другим маленькие кусочки сахара. Можно ожидать безразличного отношения к x и $(x+1)$ кусочкам сахара для x, скажем в пределах от 0 до 5000, но трудно ожидать одинакового отношения к двум чашкам кофе, в одной из которых нет сахара, а в другой $x = 5000$.

В случае когда предпочтения не образуют циклов, а безразличие не предполагается транзитивным, каждое непустое конечное подмножество X содержит максимально предпочтительную альтернативу, т. е. одна из альтернатив не менее предпочтительна, чем любая другая альтернатива из данного подмножества. В этом случае можно выделить самую предпочтительную альтернативу с помощью некоторого численного представления предпочтений, при котором $u(x)$ больше, чем $u(y)$ при $x \succ y$. (Запись $u(x)$ означает: «полезность x».) В работах [17, 51] содержатся обзоры по теории предпочтений с нетранзитивным отношением безразличия.

Следуя работам [17, 18, 22], будем говорить, что бинарное отношение $\prec$ является слабым упорядочением, если отношения $\succ$ и $\sim$ транзитивны. Эквивалентным будет утверждение, что отношение $\succ$ является слабым упорядочением, если оно отрицательно транзитивно (и асимметрично, как предполагалось ранее). Поскольку отрицательная транзитивность означает, что при $x \succ y$ либо $x \succ z$, либо $z \succ y$, то говорят, что между x и z или между y и z будет существовать «явное» предпочтение, если x не безразличен по отношению к y. Отсюда следует транзитивность отношения безразличия. Когда отношение $\succ$ задает слабое упорядочение, то отношение $\succsim$, определенное из (2), является транзитивным и связным. Обычно транзитивное и связное отношение $\succsim$ называют слабым порядком или полным предпорядком. Таким образом, мы используем в качестве слабого упорядочения отношение $\succ$, тогда как традиционным считается слабое упорядочение, задаваемое отношением $\succsim$.

В рассуждениях, приведенных ниже, предполагается, что отношение $\succ$ — слабое упорядочение. Тогда, поскольку отношение $\sim$ транзитивно, оно является отношением эквивалентности (транзитивным, симметричным, рефлексивным) и, следовательно, может быть использовано для разделения (разбиения) множества X на классы эквивалентности, или классы безразличия. Такие классы представляют собой непустые множества из X: если A и B — два различных класса и x лежит в A, а y в B, то $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $A = B$; если же $x \succ y$, то $x' \succ y'$ для

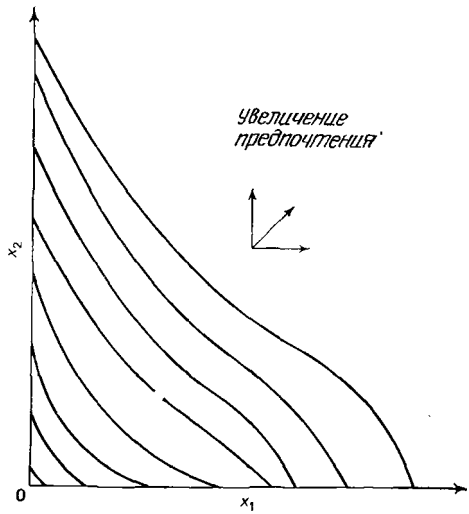


Рис. 2. Карта безразличия.

любого x' из A и каждого y' из B. На рис. 2 изображены классы безразличия для случая двух продуктов или двух характерных признаков. Классы безразличия представляют собой кривые, на каждой из которых любые две точки находятся в отношении безразличия, а предпочтение возрастает по мере удаления от начала координат. Поскольку кривые имеют отрицательный наклон, то с уменьшением x_1 должно увеличиваться x_2, чтобы сохранялось отношение безразличия вдоль кривой. Эти кривые называют также кривыми обмена или траекториями безразличия. В случае большой размерности говорят уже о поверхностях безразличия или о поверхностях обмена. Экономисты используют термин «карта безразличия», понимая под этим набор траекторий безразличия. В экономических исследованиях часто предполагается, что траектории выпуклы в сторону начала координат, как, например, кривые, расположенные вблизи начала координат на рис. 2.

2.3. Полезность

Пусть u — вещественная функция, определенная на X. Функция u называется *функцией полезности* для отношения предпочтения $\succ$ на X, если $u(x) > u(y)$ для любых x и y, таких, что $x \succ y$; u называется *совершенной функцией полезности* для отношения $\succ$ на X, если для всех x и y из X справедливо неравенство $u(x) > u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succ y$. Пусть отношение $\succ$ на X может существовать, если только отношение $\succ$

является слабым упорядочением, и пусть для этого отношения определена совершенная функция полезности u; тогда $x \sim y$, если и только $u(x) = u(y)$. Отсюда следует, что классы безразличия в X совпадают с подмножествами альтернатив, имеющих равную полезность. В этом случае классы безразличия называют также контурами равной полезности. В книге [18] можно найти доказательства всех утверждений данного раздела относительно функций полезности.

Множество X называется исчислимым, если оно конечно или если его элементы можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с целыми положительными числами. Пусть множество X исчислимо. Тогда для отношения $\succ$ на X функция полезности существует тогда и только тогда, когда отношение $\succ$ ациклично (т. е. нет такого набора $x_1, x_2, \ldots, x_m$ из X, для которого выполняется $x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3, \ldots, x_{m-1} \succ x_m, x_m \succ x_1$); совершенная функция полезности для отношения $\succ$ на X существует тогда и только тогда, когда $\succ$ — слабое упорядочение. В случае когда отношение $\succ$ является слабым упорядочением, функция полезности существует для отношения $\succ$ на X тогда и только тогда, когда существует совершенная функция полезности для отношения $\succ$ на X; это утверждение справедливо для множества X (исчислимого или неисчислимого) любых размеров с любым кардинальным числом (card X).

Неисчислимым называется множество, которое не является исчислимым, т. е. ни конечным, ни счетным. В настоящее время автору неизвестен набор необходимых и достаточных условий существования функции полезности для отношения $\succ$ на неисчислимом множестве X. С другой стороны, *совершенная* функция полезности существует для отношения $\succ$ на X тогда и только тогда, когда отношение $\succ$ — слабое упорядочение на X, и кроме того, в X существует *исчислимое* подмножество, которое является $\succ$ — плотным в X[1]). Это так называемое условие плотности относительно упорядочения, которое было введено Кантором [7]. Согласно этому условию, существует *счетное* подмножество Y из X, такое, что для любых x и z из X, для которых $x \succ z$, существует y из Y, такое, что либо $x \succ y \succ z$, либо же y находится в отношении безразличия к одному из элементов x или z. Когда выполняется сформулированное условие и отношение $\succ$ — слабое упорядочение, функция u сначала определяется на соответствующем счетном подмножестве X, а затем продолжается на все множество X с помощью предельных теорем.

В случае когда отношение $\succ$ — слабое упорядочение на X и приведенное выше условие плотности относительно упорядочения

[1]) Наличие в множестве исчислимого, плотного относительно некоторой топологии подмножества называют сепарабельностью данного множества.— *Прим. перев.*

не выполняется, множество действительных чисел оказывается недостаточно «богатым», чтобы можно было определить совершенную функцию полезности для отношения $\succ$ на X. Грубо говоря, действительных чисел нехватает, чтобы окружить каждую точку. Чтобы показать, как это условие может нарушаться, возьмем множество $X = E^2$ — множество всех упорядоченных пар действительных чисел (двумерное евклидово пространство) и выберем в качестве отношения $\succ$ на X лексикографическое упорядочение, определяемое следующим образом: $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 > y_1$ или ($x_1 = y_1$ и $x_2 > y_2$). В данном примере отношение $\succ$ — линейное упорядочение без отношения безразличия между различными элементами и каждый класс безразличия состоит из единственной точки. Условие существования плотности относительно упорядочения не выполняется, поскольку не существует исчислимого подмножества E^2, которое является отношением $\succ$ — плотным в E^2. Тем не менее можно найти некоторое численное выражение для отношения $\succ$ на E^2. Например, определим u_1 и u_2 на E^2 следующим образом: $u_1(x) = x_1$, $u_2(x) = x_2$, когда $x = (x_1, x_2)$; тогда становится тривиальным утверждение о том, что $x \succ y$ тогда и только тогда, когда $u_1(x) > u_1(y)$ или [$u_1(x) = u_1(y)$ и $u_2(x) > u_2(y)$]. Приведенная запись представляет собой простой случай двумерной лексикографической функции полезности, или представления с помощью двумерного вектора полезности $(u_1(x), u_2(x))$. Лексикографически упорядоченные функции полезности подробно рассмотрены в работах [8, 24].

Пусть u — совершенная функция полезности для отношения $\succ$ на X. Некоторая функция v также является совершенной функцией полезности для отношения $\succ$ на X, если и только если для любых x и y из X справедливо неравенство $v(x) > v(y)$ тогда и только тогда, когда $u(x) > u(y)$. Если $X = \{x, y, z\}$, $x \succ y \succ z$, $\{u(x) = 100,\ u(y) = 99,\ u(z) = 0\}$ и $\{v(x) = 100,\ v(y) = 1,\ v(z) = 0\}$, то функции u и v будут функциями полезности для отношения $\succ$ на X. Тот факт, что в одном случае полезность y равна 99, а в другом только 1, не имеет принципиального значения.

В случае когда отношение безразличия не транзитивно, функции u и v могут быть монотонно связанными, как в только что приведенном примере, хотя обе по-прежнему будут представлять собой функции полезности. Например, $X = \{x, y, z\}$, $x \sim y$, $y \sim z$, $x \succ z$, $\{u(x) = 1,\ u(y) = 2,\ u(z) = 0\}$ и $\{v(x) = 1,\ v(y) = -1,\ v(z) = 0\}$.

Отметим в заключение, что функция полезности, удовлетворяющая некоторым специальным условиям, обладает определенными аналитическими свойствами, что в свою очередь очень важно для специальных приложений теории, особенно тех, где требуется найти максимум функции полезности. Например, функция может быть непрерывной или полунепрерывной сверху (см. [13, 18, 22]).

В оставшейся части главы будут рассмотрены другие условия, которые можно ввести для специальных структурных характеристик альтернатив.

3. ТЕОРИЯ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Во всех рассуждениях данного раздела предполагается, что бинарное отношение предпочтения $\succ$ определено на P — множестве всех простых распределений вероятностей p, q, ..., заданных на непустом множестве X. Элементами X могут быть чистые стратегии или альтернативы, либо же они могут представлять собой исходы, или последствия, некоторых решений, принимаемых в ситуациях, содержащих элемент риска; вероятности таких исходов описываются некоторым распределением из P.

Простым распределением вероятностей p называется вещественная функция P, которая принимает положительные значения на большинстве элементов x из конечного множества X, а сумма всех значений $p(x)$ равна единице. Мы не будем рассматривать непростые распределения; с ними можно познакомиться в книге [18]. В зависимости от контекста распределения из P часто называют ставками, играми, лотереями, альтернативами риска, смешанными стратегиями и рандомизированными стратегиями. Для любых распределений p и q из P выражение $\alpha p + (1-\alpha) q$ называется прямой линейной комбинацией распределений p и q; здесь α — действительное число, заключенное между 0 и 1. Таким образом, если $r = \alpha p + (1-\alpha) q$, то $r(x) = \alpha p(x) + (1-\alpha) \times q(x)$ для любого x из X. Если p и q принадлежат P и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то $\alpha p + (1-\alpha) q$ также принадлежит P.

Предположим, что элементами X являются некоторые суммы денег и пусть p (0 долл.) $= 0{,}3$; p (10 долл.) $= 0{,}2$; p (20 долл.) $= 0{,}5$; q (7 долл.) $= 0{,}7$; q (10 долл.) $= 0{,}3$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда $r = \alpha p + (1-\alpha) q = \left(\frac{1}{2}\right) p + \left(\frac{1}{2}\right) q$; r (0 долл.) $= 0{,}15$; r (7 долл.) $= 0{,}35$; r (10 долл.) $= 0{,}25$ и r (20 долл.) $= 0{,}25$.

3.1. Линейная функция полезности

В соответствии с приведенными выше определениями вещественная функция u, заданная на множестве P, является функцией полезности для отношения $\succ$ на P, если $u(p) > u(q)$ для всех $p \succ q$, и q — совершенная функция полезности для отношения $\succ$ на P, если для всех p и q из P неравенство $u(p) > u(q)$ справедливо тогда и только тогда, когда $p \succ q$. В случае когда множество X содержит более одного элемента, множество P будет неисчислимо, поэтому замечания из разд. 2.3 для неисчислимых множеств справедливы для функции u на множестве P.

В рассматриваемом случае наличие определенных структурных свойств у множества P приводит к тому, что функция u обладает *свойством линейности*, которое определяется следующим образом:

$$u(\alpha p + (1 - \alpha) q) = \alpha u(p) + (1 - \alpha) u(q) \tag{3}$$

для всех α, лежащих между 0 и 1, и для всех p и q, принадлежащих P. Функция полезности u, определенная для отношения $\succ$ на P, называется *линейной функцией полезности*, если для нее выполняется равенство (3). Аналогично если u — совершенная функция полезности, которая удовлетворяет равенству (3), то она называется *совершенной линейной функцией полезности*.

Сколь важным является свойство линейности, становится очевидным из дальнейших рассуждений. На основе функции u, заданной на P, введем в рассмотрение дополнительную (вспомогательную) функцию v на X, определяемую следующим образом:

$$v(x) = u(p), \text{ когда } p(x) = 1. \tag{4}$$

Определим отношение $\succ'$ так, что $x \succ' y$ тогда и только тогда, когда $p \succ q$ при $p(x) = q(y) = 1$; в этом случае v будет функцией полезности для отношения $\succ'$ на X при условии, что u является функцией полезности для отношения $\succ$ на P. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ — различные элементы множества X и $p(x_1) + p(x_2) + \ldots$ $\ldots + p(x_n) = 1$; применив несколько раз равенство (3) и воспользовавшись (4), получим

$$u(p) = p(x_1) v(x_1) + \ldots + p(x_n) v(x_n). \tag{5}$$

Согласно этому выражению, полезность p равна математическому ожиданию дополнительной функции v с распределением вероятностей p, заданным на X. Если рассматривать $v(x)$ как полезность исхода, то выражение (5) означает, что полезность некоторой альтернативы (с элементом риска) равна ожидаемой полезности для исходов, которые могут иметь место при использовании этой альтернативы.

Соотношение (5) представляет большой интерес, поскольку его можно использовать при масштабировании и вычислении полезности. Если функция v на X масштабирована или определена таким образом, что это согласуется с условием линейности и выражением (4), то с помощью равенства (5) можно вычислить функцию $u(p)$ для любого p из множества P. Пусть отношение $\succ$ на P является слабым упорядочением, $x \succ y \succ z$ и u — совершенная линейная функция полезности. В этом случае любой из элементов $v(x)$, $v(y)$ и $v(z)$, например $v(y)$, можно однозначно выразить через два других, если определить значение величины α, при котором y находится в отношении безразличия к лотерее, имеющей исход x с вероятностью α и исход z с вероятностью $(1 - \alpha)$. Пусть таким

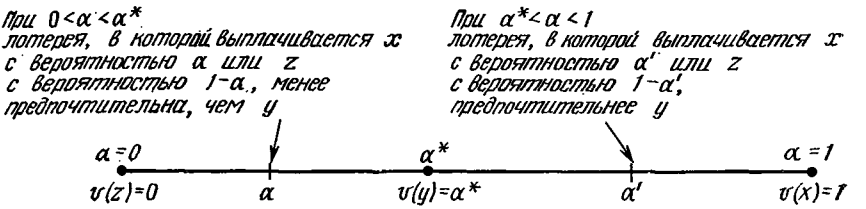


Рис. 3. $x \succ y \succ z$.

значением α является α^*; тогда

$$v(y) = \alpha^* v(x) + (1 - \alpha^*) v(z). \tag{5a}$$

Рассмотрим пример на рис. 3. Пусть $x \succ y \succ z$ и $v(x) = 1$, $v(z) = 0$. Тогда $v(y) = \alpha^*$, если y находится в отношении безразличия к лотерее с показателем α^*. Следует отметить, что в реальной ситуации психологические особенности человека могут сделать поставленную задачу достаточно сложной, поскольку оказывается трудно определить точное значение α^*, при котором y находится в отношении безразличия к лотерее.

Ниже буква u используется для обозначения функции полезности (линейной или любой другой) на P, а буква v — для вспомогательной функции на X, которая определена в соответствии с формулой (4). Бинарное отношение $\succ'$ на X было введено сразу после формул (4).

Прежде чем формулировать аксиомы для линейной или ожидаемой полезности, приведем некоторые свойства линейных и нелинейных функций полезности. Сначала предположим, что u — совершенная линейная функция полезности для отношения $\succ$ на множестве P. Тогда u^* также является совершенной линейной функцией полезности для отношения $\succ$ на P тогда и только тогда, когда существуют действительные числа $b > 0$ и c, такие, что $u^*(p) = bu(p) + c$ при всех p из P. В этом случае u^* и u связаны аффинным (или линейным) положительным (возрастающим) преобразованием, а $v^*(x) = bv(x) + c$ при x из X. О вспомогательных функциях полезности v и v^* также говорят, что они связаны положительным линейным преобразованием; такую функцию иногда называют кардинальной функцией полезности, основной масштабной единицей, интервальной мерой. Все эти выражения означают просто следующее: а) если x и y — два элемента множества X, такие, что $x \succ' y$, то $v(x)$ и $v(y)$ могут быть любыми двумя числами, удовлетворяющими условию $v(x) > v(y)$; б) для данных $v(x)$ и $v(y)$ функция $v(z)$ однозначно определяется из уравнения (5а) для каждого z, принадлежащего X. Определив некоторую та-

кую функцию v на X, можно полностью построить совершенную линейную функцию полезности u на P или вычислить ее с помощью уравнения (5).

Важно отметить, что линейная функция полезности u на P зависит только от обычного отношения предпочтения $\succ$ на множестве P, и следует проявлять особую осторожность в отношении всяких попыток интерпретировать функцию u (или дополнительную v) как меру интенсивности предпочтений [40]. Пусть u — совершенная линейная функция полезности для отношения $\succ$ на множестве P. Тогда u^* — также совершенная функция полезности для $\succ$ на P, если неравенство $u^*(p) > u^*(q)$ справедливо тогда и только тогда, когда $u(p) > u(q)$. Такая функция u^* не будет линейной, если она не связана с u аффинным преобразованием, а если u^* не является линейной, то вычисления математического ожидания на основе v^* с помощью формулы (5) не будут справедливы. Тем не менее v^* остается вполне законной совершенной функцией полезности для отношения $\succ'$ на множестве X.

Может, конечно, возникнуть и такая ситуация, когда некоторое отношение $\succ$ на множестве P не будет порождать никакой *линейной* функции полезности на P, хотя для него существует совершенная функция полезности (тогда и только тогда, когда отношение $\succ$ — слабое упорядочение на P и некоторое исчислимое подмножество из P является $\succ$ — плотным в P). В этом случае все же можно говорить о максимизации функции полезности, хотя соотношение (5) уже нельзя использовать для вычисления u на основе v.

Предыдущие замечания справедливы с некоторыми поправками и для несовершенной функции полезности, определенной для отношения $\succ$ на P. Пусть u — линейная функция полезности для отношения $\succ$ на P, тогда u^* — также линейная функция полезности для отношения $\succ$ на P, если функция u^* связана с u посредством аффинного преобразования. Тем не менее, если отношение $\succ$ на P не является слабым упорядочением (но ациклично), то две линейные функции полезности u и u^* для отношения $\succ$ на P не обязательно связаны аффинным преобразованием. Например, пусть $X = \{x, y, z\}$ и $p \succ q$, если и только если $p(x) > q(x)$ и $p(y) > q(y)$; тогда отношение $\succ$ на P транзитивно, но не является слабым упорядочением, так как отношение безразличия не транзитивно. Пусть $\{v(x) = 1,\ v(y) = v(z) = 0\}$, $\{v^*(y) = 1,\ v^*(x) = v^*(z) = 0\}$, а функции u и u^* определены на P формулой (5) на основе v и v^* соответственно. Тогда u и u^* являются линейными функциями полезности для отношения $\succ$ на множестве P, и они не связаны между собой аффинным преобразованием.

3.2. Аксиомы для линейной функции полезности

В данном разделе будут рассмотрены аксиомы (или условия) для отношения $\succ$ на множестве P, выполнение которых означает, что существует линейная функция полезности для отношения $\succ$ на P. В работе [21] предложены аксиомы ($A1$, $A2$, $A3$), которых достаточно для существования линейной функции полезности для отношения $\succ$ на P. Другой набор аксиом $\{B1, B2, B3\}$ введен в работе [33]; выполнение этих аксиом является необходимым и достаточным условием существования совершенной линейной функции полезности для отношения $\succ$ на множестве P. В каждом случае X представляет собой любое непустое множество, причем не обязательно конечное или исчислимое. Аксиомы не означают, что полезность ограничена, хотя ограниченность полезности обычно возникает в результате применения аналогичных аксиом к непростым распределениям вероятностей.

Как отмечалось в начале главы, первоначальная аксиоматика для совершенной функции полезности была предложена Нейманом и Моргенштерном в их известной книге [58], и поэтому совершенную линейную функцию u (или дополнительную к ней v на X) часто называют функцией полезности Неймана — Моргенштерна. Используется также выражение «полезность по Бернулли», поскольку Бернулли внес вклад в разработку этого вопроса [6].

При формулировке каждой аксиомы предполагается, что все p, q, r и s принадлежат множеству P; в аксиомах $A2$ и $B2$ считается, что α лежит строго между 0 и 1.

$A1$. *Отношение $\succ$ на P нерефлексивно.*

$A2$. *Если $0 < \alpha < 1$ и $p \succ q$ и $r \succ s$,* то $\alpha p + (1-\alpha) \times r \succ \alpha q + (1-\alpha) s$.

$A3$. *Если $p \succ q$* и $r \succ s$, то $\alpha p + (1-\alpha) s \succ \alpha q + (1-\alpha) r$ *для некоторого α, заключенного строго между* 0 *и* 1.

$B1$. *Отношение $\succ$ на P является слабым упорядочением.*

$B2$. *Если $0 < \alpha < 1$ и $p \succ q$, то* $\alpha p + (1-\alpha) r \succ \alpha q + (1-\alpha) r$.

$B3$. *Если $p \succ q$ и $q \succ r$, то* $\alpha p + (1-\alpha) r \succ q$ *и* $q \succ \beta p + (1-\beta) r$ *для некоторых α и β, лежащих строго между* 0 *и* 1.

Аксиомы $A1$ и $B1$ уже обсуждались выше (они означают, что отношение $\succ$ ациклично); $A2$ и $B2$ называют по-разному: аксиомами независимости, аддитивности или условиями линейности. Линейные свойства функции u [см. уравнение (3)] получаются непосредственно из этих аксиом. Рациональное обоснование аксиом $A2$ и $B2$ обычно дается следующим образом: сначала выбирают p и r с соответствующими вероятностями α и $(1-\alpha)$, а затем составляют выражение $\alpha p + (1-\alpha) r$ на основе ранее сделанного выбора. Такая рационализация представляется достаточно разум-

ной, но иногда вызывает возражения с психологической точки зрения. Поясним аксиому $A2$ с помощью следующего примера. Запишем диаграмму и будем считать, что мы выбираем строку A

	α	$1-\alpha$
A	p	r
B	q	s

или B, а нейтральный наблюдатель (судья) выбирает столбец с вероятностями α и $(1-\alpha)$; после выбора строки и столбца получаем соответствующие значения p, q, r и s. Если мы предпочитаем p по сравнению с q и r по сравнению с s, то первая строка строго доминирует вторую строку в смысле нашего предпочтения; но это наводит на мысль, что мы будем (или даже должны) выбирать A вместо B, не обращая никакого внимания на значение величины α. Поскольку A и B характеризуются выражениями $\alpha p \dotplus (1-\alpha) r$ и $\alpha q \dotplus (1-\alpha) s$, то имеем: если $p \succ q$ и $r \succ s$, то $\alpha p \dotplus (1-\alpha) r \succ \alpha q \dotplus (1-\alpha) s$.

Аналогично можно обосновать аксиому $B2$, заменив s на r в приведенной диаграмме, где $\alpha > 0$. Если $p \succ q$, то (так как $r \sim r$) представляется разумным предположить (или предложить), что A будет выбираться вместо B или что $\alpha p \dotplus (1-\alpha) r \succ \alpha q \dotplus (1-\alpha) r$. С психологической точки зрения определенная «слабость» аксиомы $B2$ заключается в некотором пренебрежении краевыми эффектами. Если α очень мало (близко к нулю), то субъект может на самом деле и не стараться уловить различия между A и B (или он просто не в состоянии это сделать), поэтому ему будет безразлично, что выбирать: A или B. Такой критике нельзя подвергнуть аксиому $A2$, поскольку в ней как $p \succ q$, так и $r \succ s$.

Можно на основе иных соображений представить и другие примеры, которые ставят под сомнение разумность исходной формулировки аксиомы $B2$ (и $A2$). В книге [52] очень подробно обсуждаются другие слабые места такой аксиоматики.

Последними в данных наборах аксиом являются аксиомы $A3$ и $B3$, которые часто называют аксиомами Архимеда или условиями непрерывности. Смысл их введения состоит в том, чтобы вместе с другими аксиомами обеспечить существование вещественных функций полезности; с этой точки зрения они играют ту же роль, что и условие «плотности относительно упорядочения» из разд. 2.3. В случае когда аксиома Архимеда $B3$ исключена из системы, возникает лексикографически упорядоченная совершенная линейная функция полезности, включающая векторы полезности, такие, как $(u_1(p), u_2(p), \ldots, u_n(p))$ [8, 9, 19, 32].

Аксиома $A3$ сильнее, чем $B3$, поскольку она включает условие $B3$. Чтобы продемонстрировать очевидную разумность этих аксиом, достаточно положить $\alpha \approx 1$ в $A3$ или взять $\alpha \approx 1$, а $\beta \approx \approx 0$ в $B3$.

3.3. Полезность «богатства»

Поскольку часто предполагают, что X является набором некоторых величин, выраженных в денежных единицах, то для полноты обсуждения теории ожидаемой полезности мы посвятим данный раздел этому вопросу. Пусть $x = 0$ представляет «богатство» в данный момент, а остальные элементы X являются потенциальными добавками к имеющемуся богатству. В дальнейшем будем предполагать, что аксиомы $B1$, $B2$, $B3$ выполняются; u — совершенная линейная функция полезности для отношения $\succ$ на P; v — вспомогательная функция на X [определенная с помощью (4)]; v возрастает по x.

В данном разделе часто встречаются три понятия — гарантированный эквивалент, минимальная продажная цена и максимальная покупная цена для некоторой лотереи p на X. Поясним смысл этих терминов в предположении, что v — непрерывная функция (см. [27, 30]). Гарантированным эквивалентом $c(p)$ лотереи p называется величина x, при которой некоторому субъекту безразлично, что он получит: лотерею p или гарантированную величину x; следовательно, она определяется как $u(p) = v(c(p))$. Минимальной продажной ценой $s(p)$ лотереи p называется наименьшая величина x, за которую субъект согласится продать лотерею p, если он получит p в качестве «подарка», т. е. станет владельцем лотереи. Поскольку полезность лотереи p есть $u(p)$, а $v(x)$ — полезность от продажи лотереи p за x денежных единиц, то $u(p) = v(s(p))$, т. е. $s(p) = c(p)$. Таким образом, гарантированный эквивалент и минимальная продажная цена совпадают.

Максимальной покупной ценой $b(p)$ лотереи p называется наибольшая величина, которую субъект заплатил бы (без затрат на сделку) из имеющихся у него денег за право владения лотереей p. Если он платит x за лотерею p, то полезность после сделки равна $u(p_x)$, где p_x определяется из соотношения $p_x(y - x) = p(y)$ для всех y из Y. Поскольку полезность до сделки равна $v(0)$, то $v(0) = u(p_{b(p)})$. Нет никакой уверенности в том, что $b(p) = s(p)$, если функция v не является линейной по x (нейтральной относительно риска). Кроме того, величины $s(p)$ и $b(p)$ могут быть как отрицательными, так и положительными или даже равными нулю. Например, если $b(p) < 0$, то это означает, что субъект требует вознаграждения в размере $-b(p)$ (или больше) за свое согласие участвовать в «неблагоприятной» лотерее p. Аналогично,

если $s(p) > 0$, то он сам заплатит сумму денег в размере $-s(p)$ (или меньше), чтобы избавиться от лотереи p.

Пусть p — обычная «благоприятная» лотерея; тогда нет никакого несоответствия в следующих типах поведения: субъект заплатил бы 300 долл. за право владения лотереей p, но если бы она досталась ему бесплатно, то он продал бы ее всего за 250 долл.; субъект заплатил бы 1000 долл., чтобы получить p, но если бы он купил p, скажем, за 980 долл., то ему бы уже не хотелось платить больше, чем 850 долл. за вторую лотерею, которая является точной копией первой.

Различные исследователи предпринимали попытки рационализировать или объяснить такие индивидуальные действия, как участие в лотереях и покупку страховок, путем использования графика функции v и его характерных особенностей [3, 28, 31, 44, 63]. Эту функцию называют *функцией уклонения от риска* (рис. 4), если она строго вогнута на некотором интервале [для $x \neq y$ и $0 < \alpha < 1$ справедливо неравенство $\alpha v(x) + (1-\alpha) v(y) < v(\alpha x + (1-\alpha) y)$]; *нейтральной относительно риска*, если

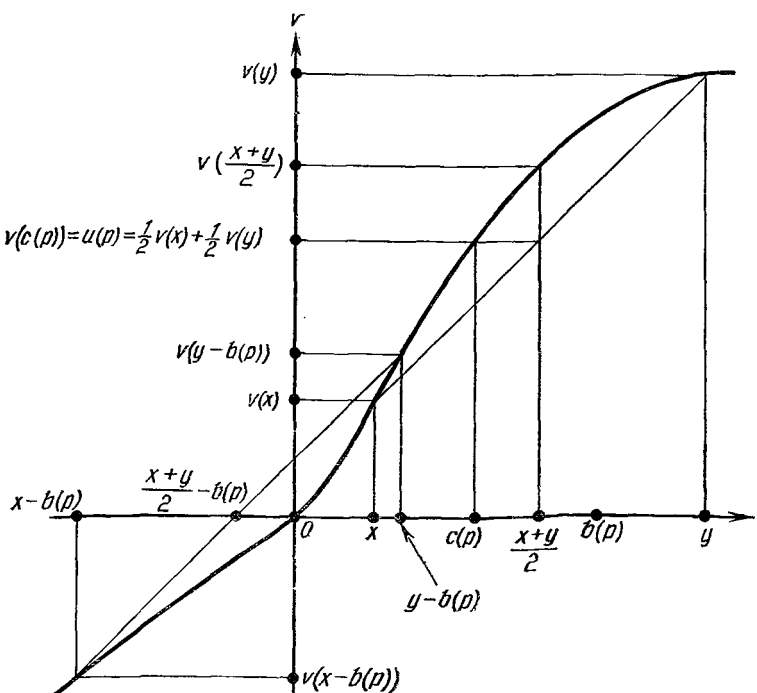


Рис. 4. Вспомогательная функция полезности. $p(x) = p(y) = \frac{1}{2}$.

она лишейна на интервале $[\alpha v(x) + (1-\alpha) v(y) = v(\alpha x + (1-\alpha) y)]$; *функцией стремления к риску*, если она строго выпукла на интервале $[\alpha v(x) + (1-\alpha) v(y) > (\alpha x + (1-\alpha) y)]$. Пусть v — непрерывная функция на интервале определения; тогда она является функцией уклонения от риска, если и только если $c(p) < \alpha x + (1-\alpha) y$ при $p(x) = \alpha$, $p(y) = (1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ и $x \neq y$ для x, y, лежащих внутри интервала; если же v дважды дифференцируема, то она будет функцией уклонения от риска тогда и только тогда, когда $v''(x) < 0$ для всех x, лежащих внутри интервала. В работах [4, 46] величина $-v''(x)/v'(x)$ рассматривалась как мера уклонения от риска в локальной окрестности точки x. Аналогичные утверждения справедливы для функции стремления к риску при $c(p) > \alpha x + (1-\alpha) y$ или $v''(x) > 0$.

Некоторая конкретная функция v может вести себя различным образом на разных интервалах. На рис. 4 изображена функция v, которая является функцией стремления к риску на интервале $[0, x]$, функцией уклонения от риска на интервале $[x, y]$ и нейтральной относительно риска на интервале $[x - b(p), 0]$. Гарантированный эквивалент $c(p)$ и максимальная покупная цена $b(p)$, показанные на рис. 4, вычислены при условии $p(x) = p(y) = \frac{1}{2}$.

4. МНОГОФАКТОРНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

За исключением простейших ситуаций, варианты решений и исходы оцениваются на основе целого набора критериев, факторов, целевых установок или характерных признаков [43]. В этом разделе будут рассмотрены некоторые свойства предпочтений и функций полезности для случая, когда варианты решений или исходы из множества X можно представить в виде вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i принадлежит множеству X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Каждое X_i является множеством, элементами которого служат уровни или значения отдельных факторов или признаков. Некоторые X_i могут быть отнесены к факторам в данный период времени (чистый доход, общий объем проданных товаров и т. д.) или к аналогичным факторам за последовательные периоды времени (чистый доход за этот год, чистый доход за прошлый год и т. д.).

Таким образом, мы считает X подмножеством множества, заданного в виде прямого произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Верхним индексом будем обозначать номер вектора в множестве X, например $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ и $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$. Отношение предпочтения $\succ$ будет определено либо непосредственно на X (как в разд. 2), либо на множестве P всех простых вероятностных распределений на X (как в разд. 3).

4.1. Условие независимости

В большей части теоретических положений данного раздела используется понятие независимости предпочтений для отдельных факторов или характерных признаков. Рассмотрим сначала простое условие независимости, а затем введем более сложные условия.

Предположим, что $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ и отношение $\succ$ на множестве X является слабым упорядочением. Зафиксируем некоторые уровни $x_2^0 \ldots x_n^0$ в множестве $X_2, \ldots, X_n$ и на основе отношения $\succ$ на X определим условное слабое упорядочение $\succ_1^0$ на X_1 следующим образом: $x_1 \succ_1^0 y_1$ тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2^0 \ldots, x_n^0) \succ (y_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Аналогично определяется условное слабое упорядочение на X_1 для других уровней в $X_2, X_3, \ldots, X_n$. Рассматриваемое условие независимости, в частности, гласит, что любые два условных слабых упорядочения на X_1 совпадают. Более того, это справедливо для каждого X_i, когда берутся различные комбинации фиксированных уровней в $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$. Вообще, условие независимости утверждает, что

$$(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n) \succ (x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n)$$

тогда и только тогда, когда

$$(y_1, \ldots, a_i, \ldots, y_n) \succ (y_1, \ldots, b_i, \ldots, y_n)$$

для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$ и все четыре набора из n элементов лежат в X.

Определив простое условие независимости, можно опустить детали построения условий для набора из $(n-1)$ элементов, поскольку условное упорядочение на X_i не зависит от этого, и будем в дальнейшем использовать запись $\succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_n$ для обозначения слабых упорядочений, полученных по индукции для $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Конечно, в некоторых случаях условие независимости может не выполняться, т. е. принципиальное значение имеет зависимость между факторами. Тем не менее случай независимых факторов был изучен более подробно, хотя возможно, что на практике чаще встречаются ситуации, когда факторы взаимозависимы. Некоторые аспекты теории взаимозависимых предпочтений рассматриваются в работах [23, 26].

Возможно, что полностью нескомпенсированная лексикографическая модель является простейшей моделью, в которой используется условие независимости и куда включены все упорядочения $\succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_n$, полученные по индукции; в этой модели имеется упорядочение строгого доминирования факторов. Предположим, что X_1 — самый важный фактор, X_2 — следующий по важности фактор и т. д.; тогда в лексикографической модели от-

ношение $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ тогда и только тогда, когда $x_1 \succ_1 y_1$ или ($x_1 \sim_1 y_1$ и $x_2 \succ_2 y_2$) или ($x_1 \sim_1 y_1$, $x_2 \sim_2 y_2$, $x_3 \succ_3 y_3$) или ... или ($x_i \sim_i y_i$ для всех $i < n$, а $x_n \succ_n y_n$). Данная и другие лексикографические модели рассматриваются в книге [24]. Хотя для некоторых ситуаций нельзя провести лексикографический анализ, тем не менее весьма вероятно, что больший практический интерес представляют ситуации, которые включают элементы компенсации факторов или «обмена» ими, поэтому именно такие модели будут описаны в следующих разделах. Сначала рассмотрим аддитивные функции полезности, поскольку они обладают интересными аналитическими свойствами.

4.2. Аддитивные функции полезности

Пусть X представляет собой непустое подмножество декартова произведения n множеств $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, и пусть определено отношение предпочтения $\succ$ на X. Будем говорить, что u является аддитивной функцией полезности для отношения $\succ$ на X тогда и только тогда, когда она является вещественной функцией полезности на X и существуют вещественные функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (определенные на $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно), такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из X справедливо равенство

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots u_n(x_n). \qquad (6)$$

Аналогично u является *совершенной аддитивной функцией полезности* для отношения $\succ$ на X, если она совершенная функция полезности, и существуют функции полезности u_i, такие, что выполняется равенство (6).

Чтобы сформулировать условия независимости, которые должны гарантировать аддитивность функции полезности, потребуются некоторые новые понятия, и прежде всего отношение эквивалентности ($\cong$). Соотношение $(x^1, \ldots, x^m) \cong (y^1, \ldots, y^m)$ имеет место тогда и только тогда, когда каждый $x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m$ лежит в X (m — некоторое целое положительное число больше единицы) и для каждого i от 1 до m набор $x_i^1, \ldots, x_i^m$ является перестановкой (переупорядочением) набора $y_i^1, \ldots, y_i^m$. Если равенство (6) выполняется и $(x^1, \ldots, x^m) \cong (y^1, \ldots, y^m)$, то $u(x^1) + \ldots + u(x^m) = u(y^1) + \ldots + u(y^m)$; последнее равенство получается, если сделать соответствующую подстановку в (6) и сократить одинаковые члены u_i. Следовательно, если $(x^1, \ldots, x^m) \cong (y^1, \ldots, y^m)$ и u является аддитивной функцией полезности для отношения $\succ$ на X, то не может выполняться отношение $x^k \succ y^k$ для $k = 1, 2, \ldots, m$, а если u — совершенная аддитивная функция полезности для $\succ$ на X, то не справедливы отношения $x^k \succsim y^k$ для $k = 1, 2, \ldots m$ и $x^k \succ y^k$ для некоторого k.

Предположим, что X — конечное множество. Тогда для отношения $\succ$ на X аддитивная функция полезности существует тогда и только тогда, когда для каждого отношения эквивалентности $(x^1, \ldots, x^m) \cong (y^1, \ldots, y^m)$ является ложным условие, что $x^k \succ y^k$ для всех k от 1 до m; доказательство этого утверждения можно найти в работах [1, 18]. В книге [18] аналогичным образом показано, что для отношения $\succ$ на X существует совершенная аддитивная функция полезности тогда и только тогда, когда для каждого отношения эквивалентности $(x^1, \ldots, x^m) \cong (y^1, \ldots, y^m)$ являются ложными условия, что $x^k \succsim y^k$ для всех k от 1 до m и $x^k \succ y^k$ для некоторого k. Можно легко показать, что первое условие независимости порядка с отношением эквивалентности $\cong$ означает, что отношение $\succ$ является ациклическим, а второе условие $\cong$ означает, что отношение $\succ$ — слабое упорядочение.

Вышеизложенные условия независимости порядка являются также необходимыми (но не достаточными) условиями аддитивности или совершенной аддитивности функции полезности в случае, когда X — бесконечное множество. Однако во многих основных теоретических положениях, касающихся аддитивности функций при бесконечном X, накладываются жесткие ограничения на структуру X: каждое множество X_i имеет мощность-континуум (или что-то близкое к этому), $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$; отношение $\succ$ на X является слабым упорядочением [12, 37, 42]. В результате таких ограничений условия независимости оказываются не очень сложными или происходит сокращение условий. Если сделать все структурные предположения, то типичным условием, достаточным для $n = 2$, является условие для $m = 3$: если $(x^1, x^2, x^3) \cong (y^1, y^2, y^3)$, то не справедливо, что $x^1 \succsim y^1$, $x^2 \succsim y^2$, $x^3 \succsim y^3$ и $x^k \succ y^k$ для некоторого k из $\{1, 2, 3\}$. При $n > 2$ достаточным условием является условие для $m = 2$: если $(x^1, x^2) \cong (y^1, y^2)$ или $\{x_i^1, x_i^2\} = \{y_i^1, y_i^2\}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то не справедливо, что $x^1 \succsim y^1$, $x^2 \succsim y^2$ и $x^k \succ y^k$ для некоторого k из $\{1, 2\}$.

Жесткие ограничения на структурные характеристики приводят к тому, что различные совершенные аддитивные представления функции полезности для специального отношения $\succ$ на X связаны одинаковыми аффинными преобразованиями. Пусть u — совершенная аддитивная функция полезности для отношения $\succ$ на X и функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$ удовлетворяют равенству (6). Тогда u^* с соответствующими функциями $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*$ из (6) является также совершенной аддитивной функцией полезности для отношения $\succ$ на X, если и только если существуют действительные числа $b, c_1, \ldots, c_n$ $(b > 0)$, такие, что $u^*(x) = bu(x) + c_1 + \ldots + c_n$ для всех x из X и для каждого i от 1 до n $(\geqslant 2)$ справедливо равенство $u_i^*(x_i) = bu_i(x_i) + c_i$ для всех x_i из X_i.

Как хорошо показано в работе [26], эта особенность функций u_i сильно упрощает их масштабирование и оценку. В тех случаях, когда множество X конечное или не обладает «удобной» структурой, функции u_i не будут иметь указанную особенность и могут потребоваться различные оценочные приемы. Методы оценок для обеих ситуаций рассмотрены в статье [16].

4.3. Аддитивные и другие линейные полезности

Вернемся теперь к рассуждениям, связанным с изучением отношения предпочтения на множестве P простых распределений вероятностей, заданных на подмножестве X декартова произведения n множеств $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Пусть задано p из множества P; тогда p_i называется маргинальным распределением p на X_i. Таким образом, если $p(x_1, x_2, x_3) = 0{,}3$ и $p(y_1, y_2, y_3) = 0{,}7$, где $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$, то $p_1(x_1) = p_2(x_2) = 0{,}3$; $p_1(y_1) = p_2(y_2) = 0{,}7$ и $p_3(x_3) = 1$.

В данном разделе будут рассмотрены только совершенные линейные функции полезности, поскольку во всех специальных работах, посвященных данному вопросу, предполагается, что отношение $\succ$ на P является слабым упорядочением. Допустим, что выполняются аксиомы $B1$, $B2$, $B3$ (из разд. 3.2).

Вещественная функция u на P является совершенной аддитивной линейной функцией полезности для отношения $\succ$ на P тогда и только тогда, когда она является совершенной линейной функцией полезности для отношения $\succ$ на P (см. разд. 3.1) и для ее дополнительной функции v, определенной на X с помощью формулы (4), существуют вещественные функции $v_1, v_2, \ldots, v_n$, заданные на $X_1, \ldots, X_n$ и такие, что для всех x из X справедливо равенство

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \ldots + v_n(x_n). \qquad (7)$$

Пусть выполняется равенство (7) и $u_i(p_i)$ определены как математическое ожидание v_i с распределением вероятностей p_i на X_i; тогда $u(p) = u_1(p_1) + u_2(p_2) + \ldots + u_n(p_n)$ для всех p из P.

В работе [20] показано, что совершенная аддитивная линейная функция полезности существует для отношения $\succ$ на P тогда и только тогда, когда $p \sim q$ при $p_i = q_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Последнее утверждение представляет собой другую форму условия независимости; в соответствии с этим утверждением субъект проявит отношение безразличия к выбору между p и q всякий раз, когда маргинальная величина p на X_i равна маргинальной величине q на X_i при $i = 1, \ldots, n$. В работах [15, 45] доказано, что если $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, то ослабленное условие является достаточным только для игр (лотерей) с шансами 50 на 50, а имен-

но утверждается, что если $p(x) = p(y) = q(z) = q(w) = \frac{1}{2}$ и $\{x_i, y_i\} \sim \{z_i, w_i\}$ при $i = 1, \ldots, n$, то $p \sim q$.

В работах [25, 34—36, 45] приведены примеры других специальных функций v на X, для существования которых требуются менее жесткие условия независимости. Рассмотрим их для случая $X = X_1 \times X_2$. При фиксированном x_2 из X_2 условное упорядочение $\succ_{x_2}$ на распределениях $a, b, \ldots$, заданных на X_1, определяется следующим образом: $a \succ_{x_2} b$ тогда и только тогда, когда $p \succ q$ при $p_1 = a$, $q_1 = b$ и $p_2(x_2) = q_2(x_2) = 1$. Аналогично для распределений r и s на X_2 имеет место отношение $r \succ_{x_1} s$ тогда и только тогда, когда $p \succ q$ при $p_2 = r$, $q_2 = s$ и $p_1(x_1) = q_1(x_1) = 1$. В работах [34—36, 45] доказано, что а) если отношение $\succ_{x_2}$ совпадает с отношением $\succ_{y_2}$ для всех x_2 и y_2 из X_2, то v можно записать в виде $v(x_1, x_2) = v_2(x_2) + v_1(x_1) f_2(x_2)$; б) если $\succ_{x_1}$ тождественно $\succ_{y_1}$ для всех x_1 и y_1 из X_1, то v можно записать в виде $v(x_1, x_2) = v_1(x_1) + v_2(x_2) f_1(x_1)$; в) если выполняются оба равенства, т. е. $\succ_{x_2} = \succ_{y_2}$ при всех x_2 и y_2 и $\succ_{x_1} = \succ_{y_1}$ при всех x_1 и y_1, то функцию v можно записать либо в аддитивной форме (7), либо же в мультипликативной форме $v(x_1, x_2) = v_1(x_1) v_2(x_2)$ (после соответствующего аффинного преобразования). Несколько более сложное условие независимости позволяет привести функцию v к следующему виду: $v(x_1, x_2) = v_1(x_1) + v_2(x_2) + f_1(x_1) f_2(x_2)$ [25].

В работах [16, 35, 36, 49] рассматриваются методы масштабирования и оценки функций полезности, которые относятся к нескольким отдельным факторам и имеют специальный вид.

5. СУБЪЕКТИВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И ОЖИДАЕМАЯ ПОЛЕЗНОСТЬ

В книге [52] рассматриваются субъективные взгляды на значение вероятности. В частности, там указывается, что «при субъективном подходе полагают, что вероятность измеряет степень уверенности некоторого лица в справедливости некоторого утверждения, например о том, что завтра будет дождь. При этом постулируется, что рассматриваемый субъект является до некоторой степени «разумным», но не исключается возможность того, что два «разумных» индивидуума, столкнувшись с одними и теми же доказательствами, могут иметь разную степень уверенности в справедливости одного и того же утверждения». В заключение данной главы мы кратко рассмотрим теории предпочтений для принятия решений в условиях неопределенности. Эти теоретические положения приводят к моделям ожидаемой полезности, в которых субъективные вероятности (различных последствий некоторых способов действия), а также полезность получаются из аксиом предпочтения.

В работах [14, 52] предложены две основные схемы построения теории субъективной ожидаемой полезности. В одной из них [52] исходы и состояния берутся за основу, а действие рассматривается как функция, которая каждому состоянию из множества S ставит в соответствие исход из X. Состояние, которое достигнуто или является истинным, субъекту в момент, когда он принимает решение, не известно. Обычно предполагается, что состояния не зависят от действий в том смысле, что выбранное действие не будет оказывать влияние на то состояние, которое получается на самом деле. Пусть F — множество возможных действий (стратегий), а S — множество состояний m. Тогда $f(s)$ означает результат действия f, произведенного при состоянии s. Предположим, что число состояний s_i конечно $[S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}]$ и заданы: простое распределение вероятностей P^* на S, функция полезности u на F и ее дополнительная функция v на множестве X. Для состояния s_i функция $P^*(s_i)$ задает субъективную оценку вероятности лицам, принимающим решение, а его полезность для исхода x определяется функцией $u(x)$. Пусть отношение $\succ$ на F является слабым упорядочением; тогда имеем $u(f) > u(g)$ в том и только в том случае, когда $f \succ g$ для любых f и g из F, где

$$u(f) = P^*(s_1)v(f(s_1)) + P^*(s_2)v(f(s_2)) + \ldots + P^*(s_n)v(f(s_n)) \tag{8}$$

для каждого действия f из множества F.

Другой подход предложен в работе [14], где в качестве базиса выбирались множество действий F и множество исходов X. Состояние в явном виде не вводилось. Для модели с конечным множеством исходов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ вводились функции u на F и v на X, а также распределение вероятностей p_f на X для каждого f из F. Как и раньше, функция $v(x)$, $x \in X$, является функцией полезности для лица, принимающего решение. Под функцией $p_f(x)$ будем понимать его субъективную оценку вероятности следующего утверждения: «если совершить действие f, то реализуется исход x». Предположим, что отношение $\succ$ на F является слабым упорядочением; тогда из данной модели имеем что $u(f) > u(g)$, если и только если $f \succ g$, где

$$u(f) = p_f(x_1)v(x_1) + p_f(x_2)v(x_2) + \ldots + p_f(x_m)v(x_m). \tag{9}$$

Несмотря на внешнее различие, две приведенные схемы построения теории субъективной ожидаемой полезности фактически являются изоморфными в смысле рассуждений, приведенных в гл. 12 книги [18].

5.1. Аксиомы и измерения

Аксиоматика в области субъективной ожидаемой полезности опирается в основном на первую из описанных выше схем построения теории, на которой мы и сосредоточим наше внимание в заключение данной главы. Следует отметить, что существуют теории, не использующие первую схему [5, 37, 39].

Самая элегантная формальная теория в рамках первой схемы разработана Сэвиджем [52]; краткое изложение этой теории содержится в работах [40, 41], подробное — в книге [18]. Теории ожидаемой полезности Сэвиджа предшествовала схема Рамсея [50], с которой можно познакомиться в работе [55]. Теория Сэвиджа легла в основу аксиоматических систем, предложенных в исследованиях [2, 18, 47]. Мы рассмотрим только подходы Сэвиджа и Рамсея, поскольку они иллюстрируют все основные идеи теорий ожидаемой полезности. Аксиоматика Рамсея была введена частично для того, чтобы избежать возможных нежелательных структурных предположений, которые были в более ранних теориях.

Рамсей предлагал использовать «этически нейтральное утверждение» $\left(\text{нечто равносильное событию } E \text{ с вероятностью } \frac{1}{2}\right)$ для измерения полезности исходов путем процедуры последовательного деления пополам. В процедуре для общности требуется бесконечность множества X. Пусть элементами X являются некоторые суммы денег (ранжированные от большего предпочтения к меньшему) и $x > z$; тогда получается элемент y в промежутке между x и z, такой, что он гарантированно находится в отношении безразличия с $\{x$, если событие E осуществляется, и z, если событие E не наступает$\}$. Затем полагаем $v(y) = \frac{1}{2} v(x) + \frac{1}{2} v(z)$. После этого функция v на X используется как мера вероятностей для P^*: пусть A — событие (подмножество S) и для x, y, z имеем $v(x) > v(y) > v(z)$, причем y гарантированно находится в отношении безразличия к $\{x$, если событие A наступает, или z, если A не осуществляется$\}$; тогда $P^*(A)$ определяется из равенства $v(y) = P^*(A)\, v(x) + [1 - P^*(A)]\, v(z)$. В некоторых теориях предполагается существование полного набора внешних вероятностных мер, которые позволяют при конечном множестве X получить единственную, с точностью до аффинного преобразования, функцию v [18].

Сэвидж действует противоположным образом по сравнению с описанной процедурой «измерений». Прежде всего он вводит вероятностную меру P^* на основе своих аксиом для отношения $\succ$ на F. При этом он использует процедуру деления пополам, в которой предполагается бесконечность множества S. Пусть x предпочтительнее y и некоторый субъект считает, что в отношении

безразличия находятся {x, если наступает A, или y, если не осуществляется A} и {y, если осуществляется A, или x, если A не осуществляется}; тогда из равенства $P^*(A)v(x) + [1 - P^*(A)]\,v(y) = P^*(A)\,v(y) + [1 - P^*(A)]\,v(x)$ получается $P^*(A) = \frac{1}{2}$ независимо от конкретных значений $v(x)$ и $v(y)$ [до тех пор, пока $v(x) \neq v(y)$]. Рассмотрим диаграмму

	B	A-B	A не осуществляется
Выбор 1	x	y	x
Выбор 2	y	x	x

Здесь B является «подсобытием» события A и A-B означает событие: «A произошло, а B нет». Если x не находится в отношении безразличия к y, но (выбор 1) $\sim$ (выбор 2), то из модели субъективной ожидаемой полезности с помощью непосредственных выкладок получаем $P^*(B) = \frac{1}{2}P^*(A)$.

После того как будет получена мера P^*, с ее помощью можно получить функцию v на X. Пусть x предпочтительнее y, который в свою очередь предпочтительнее z, и пусть A является событием, которое состоит в том, что y приводится в отношение безразличия к {x, если осуществляется A, или z, если A не осуществляется}; тогда $v(x)$, $v(y)$, $v(z)$ связаны друг с другом посредством равенства $v(y) = P^*(A)\,v(x) + [1 - P^*(A)]\,v(z)$. Фактически, как отмечал еще Сэвидж, его аксиомы означают, что P^* приводит к множеству индуцированных мер p_f на X для различных f из F, обладающих структурой, которую Нейман и Моргенштерн использовали в своей теории ожидаемой полезности (разд. 3.2 и [58]). Следовательно, при заданной P^* существование подходящей функции v на X следует из ранее развитой теории.

Мы не будем рассматривать различные структурные условия, но коротко остановимся на одной новой аксиоме, которая, по существу, не фигурировала в теоретических построениях в разд. 3. Эта аксиома имеет вид условия независимости и регулярности для событий и исходов. Подход Рамсея гарантирует, что, если $v(x) > v(y) > v(z)$, $v(x') > v(y') > v(z')$; если $[v(y) - v(z)]/[v(x) - v(z)] = [v(y') - v(z')]/[v(x') - v(z')]$ и y находится в отношении безразличия к {x, если осуществляется A, или z, если A не осуществляется}, то y' безразличен к {x', если осуществляется A, или z', если не осуществляется A}. В результате $P^*(A)$ однозначно определяется через отношение разностей функции v. С точки зрения Сэвиджа, гарантировано, что если $P^*(A) = P^*(B)$, x предпочтительнее, чем y, а y предпочтитель-

нее, чем z, и если y находится в отношении безразличия к $\{x$, если осуществляется A, или z, если не осуществляется $A\}$, то y безразличен к $\{x$, если осуществляется B, или z, если B не осуществляется$\}$. Тогда величина $P^*(A)$ однозначно определяется как отношение $[v(y) - v(z)]/[v(x) - v(z)]$.

В работах [48, 53, 60, 61] читатель найдет дополнительные сведения о методах оценки субъективных вероятностей.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной главе представлены основные идеи теорий предпочтений и полезности. Многие вопросы изложены очень коротко или не упоминались вовсе. Например, сейчас очень быстро растет число публикаций в таких областях, как экономика и математическая психология, в которых в качестве основного вместо понятия «предпочтение» стало использоваться понятие «выбор». Построение теории математической психологии начинается здесь не с рассмотрения отношения предпочтения на множестве альтернатив, а с определения функции выбора (детерминированной, или вероятностной), заданной на подмножествах альтернатив.

Кроме того, в данной главе слишком мало внимания уделено вопросу использования теорий предпочтений и полезности при анализе практических проблем. Применение теории может оказаться плодотворным при решении: 1) задачи с большим числом факторов и критериев и 2) задач принятия решений в условиях неопределенности. В последние годы исследованиям в каждой из этих областей уделялось большое внимание со стороны ученых, заинтересованных в применении теоретических результатов на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adams E. W., Elements of a Theory of Inexact Measurement, *Phil. Sci.*, 32, 205—228 (1965).
2. Anscombe F. J., Aumann R. J., A Definition of Subjective Probability, *Ann. of Math. Stat.*, 34, 199—205 (1963).
3. Archibald G. C., Utility, Risk, and Linearity, *J. Pol. Econ.*, 67, 437—450 (1959).
4. Arrow K. J., Aspects of the Theory of Risk-Bearing, Yrjö Jahnssonin Säätiö, Helsinki, 1965.
5. Balch M., Fishburn P. C., Subjective Expected Utility for Conditional Primitives, in M. Blach, D. McFadden, S. Y. Wu, Eds., Essays on Economic Behaviour Under Uncertainty, North-Holland, Amsterdam, 1973.
6. Bernoulli D. Specimen theoriae nova de mensura sortis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 5, 175—192 (1738); Translated by L. Sommer, *Econometrica*, 22, 23—36 (1954).
7. Cantor G., Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, 46, 481—512 (1895); Translated with notes by P. E. B. Jou-

dain in Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, Dover, New York, 1915.
8. Chipman J. S., The Foundations of Utility, *Econometrica*, **28**, 193—224 (1960).
9. Chipman J. S., Non-Archimedean Behavior Under Risk, An Elementary Analysis — With Application to the Theory of Assets, in J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter, H. F. Sonnenschein, Eds., Preferences, Utility, and Demand, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.
10. Davidson D., McKinsey J. C. C., Suppes P., Outlines of a Formal Theory of Value, I, *Phil. Sci.*, **22**, 140—160 (1955).
11. Debreu G., Theory of Value, An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, Wiley, New York, 1959.
12. Debreu G., Topological Methods in Cardinal Utility Theory, in K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes, Eds., Mathematical Methods in the Social Sciences. 1959, Stanford University Press, Stanford, 1960.
13. Debreu G., Continuity Properties of Paretian Utility, *Int. Econ. Rev.*, **5**, 285—293 (1964).
14. Fishburn P. C., Decision and Value Theory, Wiley, New York, 1964.
15. Fishburn P. C., Independence in Utility Theory with Whole Product Sets, *Operations Res.*, **13**, 28—45 (1965).
16. Fishburn P. C., Methods of Estimating Additive Utilities, *Management Sci.*, **13**, 435—453 (1967).
17. Fishburn P. C., Intransitive Indifference in Preference Theory, A Survey, *Operations Res.*, **18**, 207—228 (1970).
18. Fishburn P. C., Utility Theory for Decision Making, Wiley, New York, 1970. [Имеется перевод: Фишберн П. Теория полезности для принятия решений.— М.: Наука, 1978.]
19. Fishburn P. C., A Study of Lexicographic Expected Utility, *Management Sci.*, **17**, 672—678 (1971).
20. Fishburn P. C., Additive Representations of Real-Valued Functions of Subsets of Product Sets, *J. Math. Psych.*, **8**, 382—388 (1971).
21. Fishburn P. C., Alternative Axiomatizations of One-Way Expected Utility, *Ann. Math. Stat.*, **43**, 1648—1651 (1972).
22. Fisburn P. C., Mathematics of Decision Theory, Mouton, The Hague, 1972.
23. Fishburn P. C., Interdependent Preferences on Finite Sets, *J. Math. Psych.*, **9**. 225—236 (1972).
24. Fishburn P. C., Lexicographic Orders, Utilities and Decision Rules: A Survey, *Management Sci.*, **20**, 1442—1471 (1974).
25. Fishburn P. C., Von Neumann-Morgenstern Utility Functions on Two Attributes, *Operations Res.*, **22**, 35—45 (1974).
26. Fisher I., Mathematical Investigations in the Theory of Values and Prices, *Trans. of the Conn. Acad. of Arts and Sci.*, **9**, 1—124 (1892), Augustus M. Kelley, New York, 1965.
27. Feldes L., Expected Utility and Continuity, *Rev. Econ. Studies*, **39**, 407—421 (1972).
28. Friedman M., Savage L. J., The Utility Analysis of Choices Involving Risk, *J. Pol. Econ.*, **56**, 279—304 (1948).
29. Frisch R., Sur un Problème d'économie pure, *Norsk Matematisk Forenings Skrifter*, **1 (16)**, 1—40 (1926). Chipman J. S., Hurwicsz L., Richter M. K., Sonnenschein H. F., Eds., Preferences, Utility, and Demand, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971, pp. 386—423.
30. Grandmont J.-M., Continuity Properties of a von Neumann-Morgenstern Utility, *J. Econ. Theory*, **4**. 45—57 (1972).
31. Hakansson N. H., Friedman-Savage Utility Functions Consistent with Risk Aversion, *Quart. J. Econ.*, **84**, 472—487 (1970).
32. Hausner M., Multidimensional Utilities, in R. M. Thrall, C. H. Coombs, R. L. Davis, Eds., Decision Processes, Wiley, New York, 1954.

33. Jensen N. E., An Introduction to Bernoullian Utility Theory. I. Utility Functions, *Swedish J. Econ.*, 69, 163—183 (1967).
34. Keeney R. L., Quasi-Separable Utility Functions, *Nav. Res. Log. Quart.*, 15, 551—565 (1968).
35. Keeney R. L., Utility Independence and Preference for Multiattributed Consequences, *Operations Res.*, 19, 875—893 (1971).
36. Keeney R. L., Utility Functions for Multiattributed Consequences, *Management Sci.*, 18, 276—287 (1972).
37. Krantz D. H., Luce R. D., Suppes P., Tversky A., Foundations of Measurement, Vol. 1, Academic Press, New York, 1971.
38. Luce R. D., Semiorders and a Theory of Utility Discrimination, *Econometrica*, 24, 178- 191 (1956).
39. Luce R. D., Krantz D. H., Conditional Expected Utility, *Econometrica*, 39, 253—271 (1971).
40. Luce R. D., Raiffa H., Games and Decisions, Wiley. New York, 1957. [Имеется перевод: Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения.— М.: ИЛ, 1961.]
41. Luce R. D., Suppes P., Preference, Utility, and Subjective Probability, in R. D. Luce, R. R. Bush and E. Galanter, Eds.. Handbook of Mathematical Psychology. Vol. II, Wiley, New York, 1965.
42. Luce R. D., Tukay J. W., Simultaneous Conjoint Measurement, A New Type of Fundamental Measurement, *J. Math. Psych.*, 1, 1—27 (1964).
43. MacCrimmon K. R., An Overview of Multiple Objective Decision Making, in J. L. Cochrane and M. Zeleny, Eds.. Multiple Criteria Decision Making, University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina, 1973.
44. Markowitz H., The Utility of Wealth, *J. Pol. Econ.*, 60, 151—158 (1952).
45. Pollak R. A., Additive von Neumann-Morgenstern Utility Functions, *Econometrica*. 35, 485 -494 (1967).
46. Pratt J. W., Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 32, 122- 136 (1964).
47. Pratt J. W., Raiffa H., Schlaifer R., The Foundations of Decision Under Uncertainty, An Elementary Expositions, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 59, 353—375 (1964).
48. Raiffa H., Decision Analysis, Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.
49. Raiffa H., Preferences for Multi-Attributed Alternatives, Memorandum RM-5868-DOT RC, The RAND Corporation. Santa Monica, California, 1969.
50. Ramsey F. P., Truth and Probability, in F. P. Ramsey, The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, Harcourt, Brace and Co., New York. 1931. Reprinted in H. E. Kyburg and H. E. Smokler, Eds., Studies in Subjective Probability. Wiley, New York, 1964.
51. Roberts F. S., On Nontransitive Indifference, *J. Math. Psych.*, 7, 243 -258 (1970).
52. Savage L. J., The Foundations of Statistics, Wiley, New York, 1954; Dover, New York, 1972.
53. Savage L. J., Elicitation of Personal Probabilities and Expectations, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 66. 783 -801 (1971).
54. Schwartz T., Rationality and the Muth of the Maximum, *Nous*, 6, 97—117, 1972.
55. Suppes P., The Role of Subjective Probabilitiy and Utility in Decision-Making, Proc. of the Third Berkeley Sump. on Math. Stat. and Probab., 1954—1955, 5, 61 -73 (1956).
56. Tversky A., Intransitivity of Preferences, *Psych. Rev.*, 76, 31—48 (1969).
57. Tversky A., Elimination by Aspects, A Theory of Choice. *Psych. Rev.*, 79, 281- 299 (1972).
58. Von Neumann J., Morgenstern O., Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944. [Имеется перевод:

Фон Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение.— М.: Наука, 1970.]
59. Weinstein A. A., Individual Preference Intransitivity, *Southern Econ. J.*, 34, 335—343 (1968).
60. Winkler R. L., The Assessment of Prior Distributions in Bayesian Analysis, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 62, 776—800 (1967).
61. Winkler R. L., The Quantification of Judgment, Some Methodological Suggestions, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 62. 1105—1120 (1967).
62. Wold H. O. A., A Synthesis of Pure Demand Analysis, I, II, III, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 26, 85—118, 220—263 (1943), 27, 69—120 (1944).
63. Yaari M. E., Convexity in the Theory of Choice Under Risk, *Quart. J. Econ.*, 79, 278—290 (1965).

III-4. Теория принятия решений

Р. Кини[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Что такое теория принятия решений?

Теория принятия решений представляет собой набор понятий и систематических методов, позволяющих всесторонне анализировать проблемы принятия решений в условиях неопределенности. Совершенствование процесса принятия решений — цель рассматриваемой теории. В основе логических построений теории принятия решений лежит ряд аксиом, сформулированных в разд. 2 настоящей главы. Если лицо, принимающее решение, рассматривает эти аксиомы как руководство к действию, то оно должно принимать решение, следуя методам теории принятия решений и результатам, полученным из теории. Другими словами, лицо, принимающее решение, должно либо отбросить аксиомы теории принятия решений, либо действовать в соответствии с ее методами.

В основе теории принятия решений лежит предположение о том, что выбор альтернатив *должен* определяться двумя факторами:

1) представлениями лица, принимающего решение о вероятностях различных возможных исходов (последствий), которые могут иметь место при выборе того или иного варианта решения;

2) предпочтениями, отдаваемыми им различным возможным исходам. Оба фактора формально входят в теорию принятия решений, и чтобы их учесть, потребуется представить в виде цифр а) суждения о возможных последствиях (опираясь на понятие субъективной вероятности) и б) высказывания о предпочтениях (используя теорию полезности). «Разделяй и властвуй» — вот девиз теории принятия решений. Согласно методике этой теории, рассматриваемую проблему необходимо разбить на части, которые следует изучать и анализировать отдельно, а затем построить общую модель для принятия решений.

Для удобства изложения выделим четыре важных этапа процесса принятия решений.

1. *Определение альтернативных способов действия.* Должен быть задан подходящий набор целей и указаны соответствующие им меры эффективности; это дает возможность определить степень, с которой заданные цели могут быть достигнуты с помощью различных способов действия. Для каждого способа действия возможные исходы описываются в единицах принятых мер эффектив-

---

[1)] R. L. Keeney, Woodward-Clyde Consultants.

ности. Кроме того, необходимо указать, как изучаемый процесс (задача) развивается во времени, и описать способ сбора информации.

2. *Описание вероятностей возможных исходов.* При этом требуется, чтобы неопределенность, связанная с альтернативными решениями, была выражена численно через распределение вероятностей. В результате такой операции становится известной вероятность каждого возможного исхода для каждого принятого решения.

3. *Ранжировка предпочтений возможных исходов через их полезность.* Для этого выбирают меру эффективности, а затем с ее помощью представляют в числовой форме как отношение лица, принимающего решение, к последствиям (исходам), так и вероятности возможных исходов.

4. *Рациональный синтез информации, полученной на первых трех этапах.* Следует проанализировать и эффективно использовать всю полученную информацию, для того чтобы решить, какой из возможных альтернатив следует отдать предпочтение. Данный этап включает также анализ чувствительности.

Эти этапы являются основой подхода к принятию решений с точки зрения здравого смысла. Отличительной чертой процесса принятия решений является степень формализации каждого этапа.

1.2. Значение теории принятия решений

Теория принятия решений предписывает нормы поведения лицу, принимающему решение, которым он должен следовать, чтобы не вступить в противоречие со своими собственными суждениями и предпочтениями. Теория не дает метода описания того, как фактически отдельные лица должны себя вести. Она помогает лицу, принимающему решение, вооружая методологией для принятия сложных решений, которые включают элементы субъективизма, но... не заменяет его. Характерно, что с ростом сложности задачи уменьшается способность человека к неформальной обработке всей информации в соответствии с его собственными суждениями и предпочтениями. В такой ситуации теория принятия решений имеет преимущества перед другими аналитическими подходами, поскольку включает в формализованном виде многие субъективные аспекты проблемы. Первая попытка применения теории принятия решений может потребовать значительных усилий, но они того же порядка, что для любого метода анализа сложной ситуации. При этом в основном следует ограничиться изучением самой теории. «Однако, если теория принятия решений будет подробно изложена и представлена на обсуждение, она послужит хорошей основой для комментариев и критических замечаний, изменений и улучшений». (Из работы [41].)

1.3. Круг задач, стоящих перед теорией принятия решений

Типичные задачи принятия решений имеют много характерных особенностей, которые можно проанализировать и лучше понять с помощью теории принятия решений. Перечислим основные из них.

1. *Многоцелевой характер.* В большинстве сложных задач приходится стремиться к достижению различных целей. Эти цели почти всегда противоречивы, т. е. продвижение по пути достижения некоторой цели обычно сопровождается ухудшением результатов по другим. Таким образом, лицо, принимающее решение, неизбежно оказывается перед необходимостью выбора между противоречивыми целями.

2. *Воздействие фактора времени.* Все важные последствия решения задачи не проявляются сразу, и нельзя указать конкретный момент времени, когда можно наблюдать то или иное последствие. Например, при производстве нового товара иногда приходится рисковать значительными суммами в течение многих лет.

3. *Неформализуемые понятия.* Такие понятия, как добрая воля, престиж, волнение, шутка, страдание, политические действия и т. д., являются некоторыми примерами очень важных неформализуемых понятий, которые существенно усложняют задачу.

4. *Неопределенность.* Как уже отмечалось ранее, маловероятно, что в момент принятия решения (т. е. выбора альтернативного действия) известны последствия каждой из альтернатив. Такое утверждение становится особенно убедительным в свете вышеописанных особенностей задачи.

5. *Возможности получения информации.* Часто удается получить некоторую информацию, помогающую решить, какую из альтернатив следует выбрать. Например, можно проанализировать рыночную конъюнктуру, чтобы оценить спрос на новый вид продукции; провести медицинские обследования, которые облегчат диагностику заболевания и последующее лечение; собрать данные сейсморазведки, чтобы решить, стоит ли бурить скважину на данном участке. Однако получение такой информации может потребовать больших затрат времени и денег, и к тому же она может быть не вполне достоверной.

6. *Динамические аспекты процесса принятия решений.* После того как некоторое решение выработано (выбрана альтернатива), может оказаться, что задача не исчерпана до конца и потребуется принять очередное решение через несколько лет. Сегодняшнее решение может «захлопнуть дверь» перед некоторыми возможными действиями и «распахнуть ее пошире» перед другими. Важно распознать заранее такие динамические аспекты проблемы и увидеть, какие возможности могут открыться в будущем благодаря данному решению.

7. *Влияние решений на группы.* Некоторая выбранная альтернатива может повлиять на большое количество различных групп, особенно это относится к правительственным решениям. Очевидно, что в такой ситуации были бы полезны любые сведения, способные оказать помощь лицу, ответственному за принятие решения.

8. *Коллективное принятие решений.* Часто ответственность за выбор альтернативы несет не отдельное лицо, а целая группа. Фактически для определенного круга задач нельзя четко разграничить функции и ответственность лиц, принимающих решение по некоторому кругу вопросов.

Многие важные задачи не обладают всеми перечисленными особенностями, но часто их оказывается вполне достаточно, чтобы сделать задачу трудноразрешимой. Теория принятия решений позволяет проводить анализ всех этих вопросов независимо и дает схему для последующего синтеза информации с целью выработки наилучшего способа действия.

1.4. История развития теории принятия решений

Трудно проследить весь путь развития теории принятия решений от ее возникновения до наших дней, поскольку за это время изменялись как содержание теории, так и название. В основу этой теории положена концепция, связывающая такие понятия, как субъективная вероятность и полезность; впервые в работе [64] предложено развивать теорию принятия решений на основе этих двух понятий. Большим вкладом в изучение проблемы неопределенности явилась работа [9], посвященная структуре субъективной вероятности. Современная теория полезности для принятия решений в условиях неопределенности разработана независимо двумя авторами — фон Нейманом и Моргенштерном [77]. Они постулировали ряд аксиом, похожих на аксиомы следующего раздела (используя только объективные вероятности), и показали, что каждому возможному исходу можно поставить в соответствие некоторую полезность. В соответствии с их аксиомами лицо, принимающее решение, должно всегда выбирать альтернативу с максимальной ожидаемой полезностью. Этот результат часто называют гипотезой ожидаемой полезности.

В 1950 г. появилась классическая работа Вальда [78] по статистическим проблемам принятия решений, где доказан ряд важных результатов статистической теории принятия решений на основе теорем теории игр. Хотя вместо теории полезности автор использовал критерий ожидаемых потерь, понятие «полезность» легко вводится в его теоретическую схему при помощи небольшой модификации. Упомянутая работа проливает свет на одну сложную проблему, а именно как численно выразить неформальную

информацию в модели мира. Школа ученых по статистике и теории принятия решений, куда входят Маршак, Чернов и Рубин, отстаивает использование субъективной вероятности в качестве инструмента для решения задач принятия решений, поставленных в работе [78]. Изучению тех же вопросов посвящена работа [4], где понятия «полезность» и «субъективная вероятность» объединены в согласованную схему для решения этих задач. В книге [66] заложены строгие философские основы и предложена аксиоматическая схема подхода.

После создания основ теории многие исследователи начали применять ее к хорошо сформулированным с математической точки зрения задачам, включающим различные неопределенности и возможности для получения выборки или экспериментирования. Результаты этих исследований, основанные на работах предыдущих авторов, образовали направление, известное как байесовская, или статистическая, теория принятия решений [60, 63, 67]. В начале 60-х годов несколько ученых этого направления, главным образом из Harvard Business School, вместе со своими коллегами начали использовать упомянутые теоретические работы для анализа реальных деловых проблем, которые включали неопределенности различного рода, причем иногда была возможность получения выборки и проведения эксперимента, а иногда такая возможность отсутствовала. Результатом работ явилось создание прикладной теории статистических решений. Однако когда стало очевидно, что прикладная теория статистических решений пригодна для анализа широкого класса задач принятия решений [69], то стало ясно, что название теории должно лучше отражать ее прикладной характер. Так, в 1966 г. в литературе и появился термин *теория принятия решений* [29].

Большой вклад в эту теорию внесли работы ученых, занятых изучением поведения людей, принимающих решения. Эти работы охватывают промежуток времени свыше 25 лет. К наиболее ранним работам относятся [8, 12, 23, 53], где предложены оценки предпочтений и суждений. По данной тематике написаны два прекрасных обзора [15, 72].

Разработаны процедуры, позволяющие лучше анализировать и учитывать те характерные особенности задач, стоящих перед теорией принятия решений, которые были перечислены в предыдущем разделе. В качестве примеров можно указать работы по оценке функций полезности [59, 69], по оценке субъективных вероятностей [13, 69, 76], по проблемам коллективного принятия решения [1, 28], по теории предпочтений с набором признаков [18—20, 57, 35, 37, 62], по предпочтениям, зависящим от времени [42, 45, 52], и большое количество работ в области системного анализа, моделирования и вычислительных методов, способствующих развитию вероятностных моделей.

Наряду с теоретическими разработками совершенствовалось искусство применения теории принятия решений. Были созданы более совершенные системы программного обеспечения для решения сложных задач принятия решений [65, 70], а также процедуры приближенного анализа, которые позволяли экономить время и усилия [27, 31]. Возможно, более важно отметить, что быстро растет количество публикаций по приложениям теории принятия решений; некоторые из них упоминаются в следующем разделе.

1.5. Применение теории принятия решений

Задачи нефтяной и газовой промышленности одними из первых были исследованы с помощью теории принятия решений [26, 34]. Однако по причинам секретности многие результаты применения теории принятия решений не опубликованы. К счастью, основное содержание этих работ отражено в виде анализа «воображаемых» случаев или при рассмотрении некоторых примеров. В работах [48, 49] описаны приложения теории принятия решений для анализа капиталовложений, а в [29] обсуждаются проблемы принятия решений о выпуске нового вида продукции. В работе [29] приведены различные примеры приложений теории принятия решений, представляющие опыт начала 60-х годов. В работах [6, 55] дается обзор приложений теории принятия решений за весь период 60-х годов.

В статье [50] приводятся результаты решения трех прикладных задач с помощью теории принятия решений: выпуск новой продукции, американские исследования Марса с помощью автоматических станций и возможности использования ядерной энергии в энергетической системе Мексики. Анализу последнего вопроса посвящен подробный отчет [74]. В работе [7] обсуждаются специальные примеры использования теории принятия решений в трех частных фирмах для анализа таких проблем, как приобретения и объединения, инвестиционная политика корпорации и производственное планирование. В статье [3] приводятся результаты неудачных примеров использования теории принятия решений и отмечаются трудности, которых следует остерегаться.

За последние годы опубликовано несколько исследований по задачам принятия решений на правительственном уровне. Среди них такие задачи, как обнаружение очагов возникновения ураганов, угрожающих побережью США [32], и создание столичного аэропорта в г. Мехико [10].

2. АКСИОМЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В этом разделе формулируются основные аксиомы теории принятия решений. Из приведенных аксиом следует принцип выбора действия. Он состоит в том, что нужно выбирать такую альтер-

нативу, которая максимизирует ожидаемую полезность. Если сформулированные аксиомы кажутся разумными при рассмотрении какой-либо конкретной проблемы, то такие понятия, как суждения и предпочтения, следует выразить в числовой форме в соответствии с аксиомами 4 и 5. Аксиомы 4 и 5 превращают теорию принятия решений в рабочий инструмент анализа сложных проблем (или, как говорят, эта теория становится операционной). В разделах 4 и 5 описываются процедуры, позволяющие получить необходимые числовые значения.

Прежде чем формулировать аксиомы теории принятия решений, введем обозначения и определения. *Простой лотереей* $L(x_1, p, x_2)$ назовем вероятностное событие, имеющее два возможных исхода x_1 и x_2, вероятности наступления которых обозначим соответственно через p и $(1-p)$. Символами $\succ$, $\sim$, $\succeq$ будем соответственно обозначать понятия «предпочтительнее», «равноценно», «равноценно или предпочтительнее». Например, если $x_1 \sim L(x_2, p, x_3)$, то исход x_1 равноценен лотерее, которая имеет исходы x_2 с вероятностью p или x_3 с вероятностью $(1-p)$. Теперь сформулируем ряд аксиом теории принятия решений, которые лишь слегка отличаются от формулировок, приведенных в [60].

Аксиома 1. *Существование относительных предпочтений.* Для любой пары исходов x_1 и x_2 их предпочтения будут таковы, что или $x_1 \sim x_2$, $x_1 \succ x_2$, или $x_2 \succ x_1$.

Аксиома 2. *Транзитивность.* Для любых лотерей L_1, L_2 и L_3 справедливо следующее:

(а) если $L_1 \sim L_2$ и $L_2 \sim L_3$, то $L_1 \sim L_3$;

(б) если $L_1 \succ L_2$ и $L_2 \sim L_3$, то $L_1 \succ L_3$ и т. д.

Поскольку исход можно интерпретировать как вырожденный случай лотереи (т. е. $p = 1$), то аксиомы 1 и 2 вместе означают, что лицо, принимающее решение, может провести ранжировку относительного предпочтения различных возможных исходов. Эти аксиомы не требуют стационарности ранжировки во времени и не утверждают, что лицо, принимающее решение, может объяснить свои предпочтения. Обозначим через x^0 исход, который не является более предпочтительным, чем любой другой исход, а через x^* — исход не менее предпочтительный, чем любой другой. Таким образом, единственная возможность состоит в том, что x^0 и x^* означают соответственно наименее и наиболее предпочтительные исходы, хотя они могут представлять собой гипотетические исходы, такие, что $x^* \succ x$ и $x \succ x^0$ для всех допустимых x. Продолжим изложение аксиом.

Аксиома 3. *Сравнение простых лотерей.* Если для лица, принимающего решения, $x_1 \succ x_2$, то

(а) $L_1(x_1, p_1, x_2) \succ L_2(x_1, p_2, x_2)$ при $p_1 > p_2$;
(б) $L_1(x_1, p_1, x_2) \sim L_2(x_1, p_2, x_2)$ при $p_1 = p_2$.

Аксиома 4. *Численная оценка предпочтений.* Каждому возможному исходу x лицо, принимающее решение, может поставить в соответствие число $\pi(x)$ (где $0 \leqslant \pi(x) \leqslant 1$), такое, что $x \sim L(x^*, \pi(x), x^0)$.

Аксиомы 3 и 4 определяют для лица, принимающего решение, меру относительного предпочтения различных исходов. Величина $\pi(x)$, называемая вероятностью равноценности, является такой мерой.

Аксиома 5. *Численная оценка неопределенности суждений.* Каждому возможному событию E, которое может влиять на исход решения, можно поставить в соответствие число $P(E)$, где $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$, такое, что становятся равноценными лотерея $L(x^*, P(E), x^0)$ и ситуация, при которой лицо, принимающее решение, получает x^*, если происходит событие E, и x^0, если событие E не происходит. Значение $P(E)$ определяется лицом, принимающим решение.

Для того чтобы получить достаточно приемлемые оценки вероятностей событий, возможно, потребуется просмотреть большое число выборок. Однако, как указывалось выше, для многих важных проблем это неосуществимо. Аксиома 5 дает механизм получения вероятностей суждений для обеих ситуаций. Поскольку вероятности $P(E)$ удовлетворяют аксиомам теории вероятностей, все результаты этой теории можно применить для анализа проблем.

Аксиома 6. *Возможность замены.* Если модифицировать задачу принятия решения путем замены одного исхода (или лотереи) другим исходом (или лотереей), которые равноценны для лица, принимающего решение, то обе задачи принятия решения (старая и модифицированная) будут равноценны для этого лица.

Аксиома 7. *Эквивалентность условного и безусловного предпочтений.* Пусть L_1 и L_2 — две лотереи, возможные только при наступлении события E. Если известно, наступит событие E или нет, то лицо, принимающее решение, должно иметь те же предпочтения между L_1 и L_2, как и при отсутствии этой информации.

Как уже отмечалось, мера $\pi(x)$ описывает относительные предпочтения для x. Очевидно, что в разных ситуациях можно брать различные π-функции, поскольку граничные значения x^0 и x^* для измерения $\pi(x)$ являются достаточно произвольными. Однако, чтобы все возможные π-функции удовлетворяли предыдущим семи аксиомам, они должны сводиться одна к другой с помощью положительного линейного преобразования. Любое положительное

линейное преобразование π следующего вида:

$$u(x) = a + b\,\pi(x),\ b > 0, \tag{1}$$

будем называть шкалой полезности для исходов x. Если лицо, принимающее решение, опирается на данные аксиомы, ему надлежит всегда выбирать альтернативы так, чтобы максимизировать ожидаемую полезность. Согласно сформулированным аксиомам, не существует других процедур принятия решений.

Поскольку максимизация ожидаемой полезности эквивалентна максимизации ожидаемого значения π в (1), произвольный выбор x^* и x^0 не влияет на фактическое решение. Шкала полезности аналогична температурным шкалам; разные шкалы, которые получаются одна из другой с помощью положительного линейного преобразования, эквивалентны с позиции их использования для целей принятия решений.

3. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В этом разделе изложена методология применения теории принятия решений для анализа проблем принятия решений. По существу, мы проиллюстрируем четвертый этап процесса принятия решений, описанный в разд. 1, предполагая, что проблема уже сформулирована и определены полезности и вероятности суждений. Приведенный материал аналогичен результатам работ [30, 60, 75], хотя есть небольшие различия в формулировках.

Опишем сначала проблему в общих чертах. Лицо, принимающее решение, имеет возможность выбора решений. Предпочтительность выбора того или иного решения зависит от совокупности внешних условий. Например, целесообразность бурения нефтяной скважины зависит от того, есть нефть или нет нефти. Чтобы получить информацию о внешних условиях, лицо, принимающее решение, имеет возможность провести несколько различных экспериментов. Каждый эксперимент требует определенных денежных затрат. Исходы, представляющие интерес для данного лица и зависящие от внешних условий, реализуются в результате этих экспериментов и последующих решений. Однако в момент принятия решения неизвестно, какой исход фактически будет иметь место. Следовательно, хотелось бы, чтобы методология помогла ответить на следующие вопросы:

а) Какое решение является наилучшим при отсутствии экспериментов?

б) Следует ли лицу, принимающему решение, проводить эксперимент, и если да, то какой является наилучшим?

в) Какова должна быть максимальная плата, которую стоит платить за отдельный эксперимент?

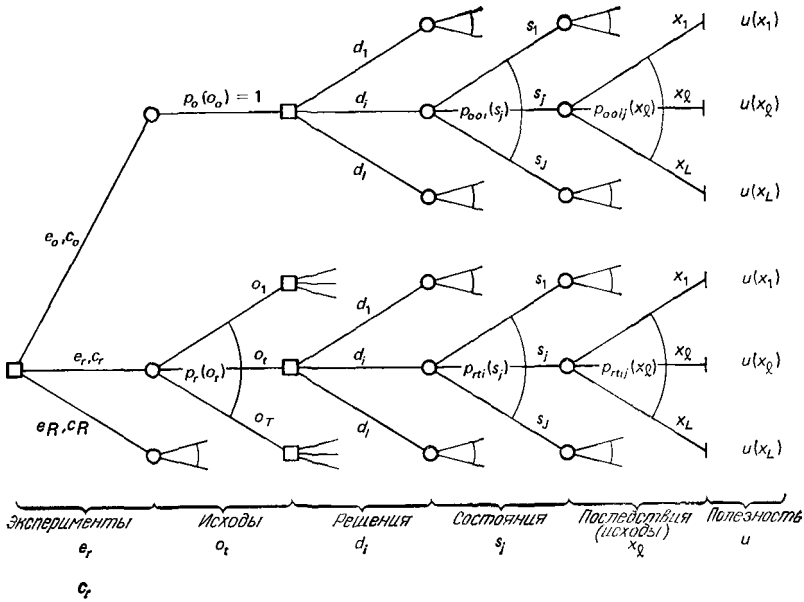


Рис. 1. Часть дерева решений.

г) Какова должна быть максимальная плата, которую стоит платить за некоторый объем экспериментальной информации?

На рис. 1 графически представлена задача принятия решений в виде так называемого дерева решений. Для иллюстрации введенных выше понятий рассмотрим типичную ветвь дерева. Двигаясь слева направо, лицо, принимающее решение, должно сначала либо выбрать эксперимент e_r стоимостью c_r, либо не проводить экспериментов, что обозначается через e_0, а соответствующие затраты (нулевые) — через c_0. При условии выбора данного эксперимента наблюдается исход o_t. Эксперимент e_r приводит к различным исходам, вероятности появления которых описываются с помощью распределения условных вероятностей p_r. Если исход известен, должно быть выбрано следующее решение d_i. После такого выбора наличие внешних условий s_j задается распределением условных вероятностей p_{rti}, где индекс r относится к эксперименту, t обозначает исход, а i — решение. В результате всех этих шагов получается исход x. Вероятность различных исходов численно выражается через распределение условных вероятностей p_{rtij}, где индекс j относится к внешним условиям. Относительная предпочтительность возможных исходов задается функцией полезности $u(x)$.

Хотя обозначения достаточно громоздки, есть простой прием для анализа дерева решений. Заметим, что на рис. 1 имеется только

два типа узлов: узлы решений, обозначенные квадратиками, и узлы возможностей, обозначенные кружками. Начиная движение справа, можно продвигаться по дереву в обратном направлении, используя принцип, согласно которому следует максимизировать ожидаемую полезность. В любом узле возможностей с помощью полученного для данного узла распределения вероятностей вычисляется ожидаемая полезность, соответствующая рассматриваемому узлу. Для любого узла решений лицо, принимающее решение, выбирает альтернативу, которая приводит к наибольшей ожидаемой полезности, и приписывает полученную полезность узлу решений.

3.1. Анализ общей задачи принятия решений

Чтобы пояснить метод, исследуем дерево решений, представленное на рис. 1. Обозначим, например, через $\bar{u}_{rtij}$ ожидаемую полезность проведения эксперимента e_r при наблюдаемом исходе o_t, выбранном решении d_i и внешних условиях s_j, а через $\bar{u}_{rt}$ — ожидаемую полезность выбранного эксперимента e_r и наблюдаемого исхода o_t. Очевидно, что в принятых обозначениях $\bar{u}_{rtijl}$ является функцией полезности $u(x_l)$ в силу ее определения. Тогда

$$\bar{u}_{rtij} = \int_x u(x_l)\, p_{rtij}(x_l), \tag{2}$$

где $\int_x$ означает суммирование или интегрирование по x соответственно для дискретных или непрерывных задач. Аналогично ожидаемая полезность выбранного эксперимента e_r, наблюдаемого исхода o_t и выбранного решения d_i равна

$$\bar{u}_{rti} = \int_x \bar{u}_{rtij} p_{rti}(s_j). \tag{3}$$

В узле решений выбирается решение d_i, приводящее к максимальной ожидаемой полезности. Следовательно,

$$\bar{u}_{tr} = \max_{d_i} \bar{u}_{rti}. \tag{4}$$

Сделав еще один шаг в обратном направлении (справа налево), получим выражение для ожидаемой полезности выбранного эксперимента e_r:

$$\bar{u}_r = \int_0 \bar{u}_{rt} p_r(o_t). \tag{5}$$

Таким образом, наилучшим является эксперимент e_{r*}, который позволяет получить максимальное значение ожидаемой полезности, определяемое из соотношения

$$\bar{u}_{r*} = \max_{e_r} \bar{u}_r.$$

Пусть выбран эксперимент r^* и реализовался исход o_t; тогда оптимальное решение d_{i*} определяется с помощью выражения

$$\bar{u}_{r*ti*} \equiv \max_{d_i} \bar{u}_{r*ti}.$$

Желательно, чтобы в результате применения теории принятия решений была выработана полная стратегия, указывающая, какой выбор должен быть сделан в каждом узле решений. В принципе такую стратегию несложно получить, если следовать аксиомам теории принятия решений. Любую задачу принятия решений можно представить последовательностью узлов решения и узлов возможностей. Следовательно, используя описанные выше процедуры — вычисление ожидаемых полезностей в узлах возможностей и максимизацию ожидаемой полезности в узлах решений,— можно исследовать любую задачу.

3.2. Выбор стратегии принятия решения

Вернемся к четырем вопросам, поставленным в начале разд. 3.

1. Оптимальная стратегия при отсутствии экспериментов. Ожидаемая полезность начального эксперимента e_r при наблюдаемом исходе o_t и принятом решении d_i есть величина $\bar{u}_{rti}$, определяемая формулой (3). Оптимальной стратегией при отсутствии экспериментов является решение d_i, максимизирующее $\bar{u}_{rti}$ при $r = 0$. Напомним, что e_0 означает отсутствие экспериментов, и с помощью обозначения $t = 0$ можно указывать, что никакой информации не получено. Следовательно, $\bar{u}_{00i}$, по определению, ожидаемая полезность выбранного решения d_i при отсутствии экспериментов. Оптимальным решением при отсутствии экспериментов будет d_i^*, определяемое из формулы

$$\bar{u}_{00i*} \equiv \max_{d_i} \bar{u}_{00i*} \tag{6}$$

Заметим, что, по определению, $u_0 = \bar{u}_{00i*}$.

2. Выбор эксперимента. Из уравнения (5) оптимальный эксперимент e_{r*} определяется как

$$\bar{u}_{r*} \equiv \max_{e_r} \bar{u}_r. \tag{7}$$

Если $r^* = 0$, то e_0 — оптимальная стратегия, и лучше всего экспериментов не проводить.

3. Ожидаемая стоимость получения информации. Напомним, что стоимость c_r включает затраты на проведение эксперимента и обработку информации. Вопрос о том, в какую сумму обходится эксперимент e_r, является очень важным. Эксперимент e_r стоимостью c_r следует выбирать только в том случае, если ожидаемая полезность этого эксперимента больше, чем ожидаемая полезность при отсутствии экспериментов, т. е. если $\bar{u}_r > \bar{u}_0$, то для эксперимента e_r оправданы затраты c_r. При монотонном возрастании стоимости c_r эксперимента e_r его ожидаемая полезность $\bar{u}_r$ падает. Это следует из уравнения (2), поскольку вероятности больших затрат, входящие в $p_{rtij}(x)$, увеличиваются с ростом c_r. Такая тенденция уменьшения ожидаемой полезности наблюдается для величин $\bar{u}_r$ из (5), которые связаны с формулами (3) и (4). Пусть c_r^* — некоторая стоимость эксперимента e_r, такая, что

$$\bar{u}_r = \bar{u}_0. \tag{8}$$

Затраты c_r^* называются ожидаемой стоимостью эксперимента e_r. Если $c_r < c_r^*$, то лучше провести эксперимент e_r, чем вообще отказаться от экспериментов. Если $c_r > c_r^*$, то лицу, принимающему решение, целесообразнее отказаться от экспериментов и не проводить эксперимент e_r.

4. Ожидаемая стоимость точной информации. Часто оказывается достаточно трудно вычислить ожидаемую стоимость информационной выборки. Наш интерес к информации объясняется тем, что из ее анализа мы черпаем сведения о вероятностях различных возможных исходов.

Если эксперимент e_r дает сведения только о внешних условиях s_j и если, по нашим подсчетам, только точные сведения о s_j стоят 10 000 долл., то очевидно, что за эксперимент e_r можно уплатить не более 10 000 долл. Иногда удается достаточно легко подсчитать ожидаемую ценность такой точной информации и использовать ее для отбраковки некоторых потенциально возможных экспериментов.

Вспомним задачу о бурении нефтяных скважин (см. разд. 3), где интерес представляют две ситуации: «есть нефть» и «нет нефти». Чтобы получить сведения о наличии нефти, можно было бы провести эксперименты. Однако в общем случае полученные данные могут оказаться неточными. Если есть возможность определить ту максимальную сумму, которую стоило бы заплатить за истинное знание внешних условий, то, очевидно, было бы нецелесообразно платить больше этой величины за любую информацию, полученную на основе экспериментов.

Предположим, что затратив c_R, можно провести эксперимент e_R, который даст точную информацию. Такой эксперимент покажет,

каковы действительные внешние условия, Пусть s_j — параметр, описывающий внешние условия; тогда оптимальное решение, обозначаемое через $d_{i^*(j)}$, определяется как

$$\bar{u}_{i^*(j)} = \max_{d_i} \bar{\bar{u}}_{i(j)}, \tag{9}$$

где $\bar{\bar{u}}_{i(j)}$ — ожидаемая полезность решения d_i при данном s_j. Поскольку мы предполагаем, что не получили никакой информации, то $\bar{\bar{u}}_{i(j)}$ равно $\bar{u}_{00ij}$. Распределение вероятностей $p_{00i}(s_j)$ показывает вероятность наличия внешних условий s_j, если проведен эксперимент e_R. Таким образом, ожидаемая полезность получения точной информации находится по формуле

$$\bar{u}_R = \int_s \bar{\bar{u}}_{i^*(j)} p_{00i}(s_j). \tag{10}$$

Как и для случая выборочной информации, ожидаемая полезность точной информации уменьшается с увеличением ее стоимости. Рассмотрим некоторое значение затрат c_{R^*}, при котором ожидаемая полезность точной информации равна ожидаемой полезности в условиях отсутствия информации, т. е. выполняется равенство

$$\bar{u}_{R^*} = \bar{u}_0. \tag{11}$$

Такие затраты c_{R^*} называются ожидаемой стоимостью точной информации. Данная величина представляет собой максимальную сумму, которую следует платить за точные сведения, и является, следовательно, верхней границей целесообразных затрат, предназначенных на сбор информации.

В сложных задачах для описания внешних условий может потребоваться большое количество различных признаков, или характеристических показателей, т. е. такое описание может оказаться многомерным. Используя идеи, аналогичные изложенным выше, можно определить ожидаемую стоимость точной информации для одной или более координат.

3.3. Гарантированный эквивалент

Напомним, что полезность представляет собой некоторую совокупность субъективных предпочтений по нескольким критериям эффективности, причем шкала полезности является произвольной. В силу этих причин полезность трудно интерпретировать непосредственно. Когда лицо, принимающее решение, хочет провести качественное сравнение двух альтернатив с ожидаемыми полезностями u_1 и u_2 соответственно, приходится рассматривать исходы этих альтернатив. Гарантированный эквивалент альтерна-

тивы, имеющей полезность u_i, есть некоторый исход x_i, такой, что

$$u(x_i) = u_i. \tag{12}$$

Таким образом, если x_1 и x_2 являются гарантированными эквивалентами альтернатив 1 и 2 соответственно, то сравнение x_1 и x_2 должно дать некоторое представление об относительных последствиях выбранных альтернатив. Далее, если x_1 и x_2 выбраны так, что они совпадают по всем критериям (мерам), кроме, скажем, критерия стоимости, то различие в стоимости двух гарантированных эквивалентов может дать ясную картину того, до какой степени одна из альтернатив предпочтительнее другой.

4. ЧИСЛОВАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СУЖДЕНИЙ

Рассмотрим некоторое событие E. У лица, принимающего решение, может быть некоторое представление о вероятности $p(E)$ наступления события E. Такая вероятность $p(E)$ определяется пятой аксиомой теории принятия решений в разд. 2 настоящей главы. Будем в дальнейшем называть ее субъективной вероятностью. Эта вероятность отражает степень уверенности лица, принимающего решения, в том, что событие E наступит, и в ее основе лежит готовность данного лица действовать в соответствии с этой уверенностью. Лицо, принимающее решение, может указать свои субъективные вероятности для различных возможных событий на основе многочисленных соображений. Сюда входят знания о физических явлениях, эмпирические данные, результаты моделирования взаимосвязи различных факторов и экспертные суждения многих лиц, главным образом специалистов в рассматриваемой области. Одним из экспертов является лицо, принимающее решение.

4.1. Вероятность, основанная на физических явлениях

В некоторых ситуациях можно предположить, что все возможные события некоторого эксперимента равновероятны. Поэтому если существует N возможных событий, то вероятность каждого из них равна $1/N$. Основываясь на таком предположении, мы обычно приписываем вероятность $\frac{1}{2}$ выпадению герба на правильной монете и вероятность $\frac{1}{6}$ выпадению шестерки на игральной кости. Вероятности, которые можно проверить исчерпывающими экспериментами, часто называют объективными вероятностями. Большинство людей обычно согласны с такими вероятностями.

Если некоторое лицо принимает их как руководство к действию, объктивные вероятности, по определению, являются также и субъективными вероятностями.

4.2. Вероятность, основанная на имеющихся данных и результатах моделирования

Если имеются данные о возможности наступления интересующих нас событий, то их можно использовать для формирования суждений о вероятностях событий. Пусть E_1, E_2, ..., E_n — полный набор взаимоисключающих событий. Если в каждом из N испытаний наблюдалось одно из событий: или E_1, или E_2..., или E_n, причем N_i раз наблюдалось событие E_i, то вероятность E_i равна N_i/N. Например, если среди последних 25 000 звонков о пожаре в городе 10 000 оказались ложными, то субъективно можно положить, что вероятность ложного сигнала о пожаре равна 0,4. В разд. 4.5 описывается способ взаимосвязи таких данных с оценками суждений.

В некоторых ситуациях имеющиеся данные можно уточнить и дополнить. Например, можно построить аналитическую или имитационную модель, чтобы выяснить влияние различных параметров на входе на важнейшие переменные на выходе. При помощи такой модели можно получать вероятности появления интересующих нас переменных на выходе, используя данные о вероятностях появления переменных на входе. В аналитических моделях применяется теория получения распределений вероятностей [11, 56], а при имитационном моделировании — метод Монте-Карло [24, 25].

4.3. Определение вероятности одиночного события

Вероятности интересующих нас событий часто трудно получить из-за недостатка статистических данных и сведений. Особенно это касается ситуаций, в которых приходится принимать единственные в своем роде стратегические решения. В таком случае необходимо выработать суждения либо о входных переменных модели, либо о самих представляющих интерес величинах. Чтобы проиллюстрировать это, предположим, что нас интересует событие E и ему приписана субъективная вероятность p (E), которая пока не определена.

Сначала построим две лотереи (рис. 2): $L_1 = (x^*, p, x^0)$ и L_2, которая имеет исход x^*, если осуществилось событие E, и исход x^0, если событие E не произошло. Исход x^* выбирается так, что он является более предпочтительным, чем x^0. Затем при фиксированном значении p лицу, принимающему решение, задается вопрос: «Какая лотерея более предпочтительна или они равноценны?» Если $L_1 \succ L_2$, то величину p уменьшают и повторяют воп-

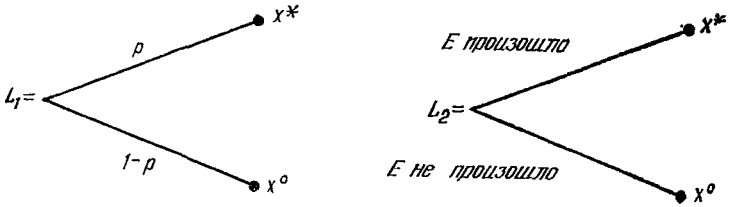


Рис. 2. Получение числовых значений субъективной вероятности наступления одиночного события.

рос. Если $L_2 \succ L_1$, то увеличивают p и снова повторяют вопрос. Через несколько итераций найдется такое значение p (обозначим его через p'), при котором L_2 равноценна L_2 ($L_1 \sim L_2$). Тогда субъективная вероятность события E равна p' (т. е. вероятность события, определенная на основе суждения лица, принимающего решение). Если E_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — полный набор всех взаимоисключающих событий, то $\sum_{i=1}^{n} p(E_i) = 1$. Оценки вероятностей, полученные на основе суждений некоторого лица, следует подставить в эту сумму и, если сумма не равна единице, то необходимо изменить рассматриваемые оценки. Интересное обсуждение указанных аспектов теории можно найти в работе [61].

4.4. Оценочные суждения о распределении вероятностей

Наиболее общим подходом к оценке распределения вероятностей величин, принимающих бесконечное количество значений, является так называемый дробный метод. Согласно этому методу, берут несколько точек функции распределения рассматриваемой величины и затем «подгоняют» кривую, оптимальным образом проходящую через эти точки.

Предположим, что мы хотим получить распределение вероятностей некоторой величины X; конкретные значения X обозначим через x. Например, X может быть доходом, а $x = 100\,000$ долл. Сначала попытаемся оценить дробь 0,5, т. е. такое значение $x_{0,5}$, при котором вероятность события ($X < x_{0,5}$) равна 0,5. Лицу, принимающему решение (или назначенному эксперту), задают вопрос: «При каком значении x равновероятно, что величина X будет больше или меньше этого значения?» Ответ на поставленный вопрос можно получить, используя итерационную процедуру, описанную в предыдущем разделе. В результате применения этой процедуры получается значение $x_{0,5}$. Затем задают следующий вопрос: «Предполагая, что величина X меньше значения $x_{0,5}$, какое значение x разделит интервал $[-\infty, x_{0,5}]$ на равновероятные

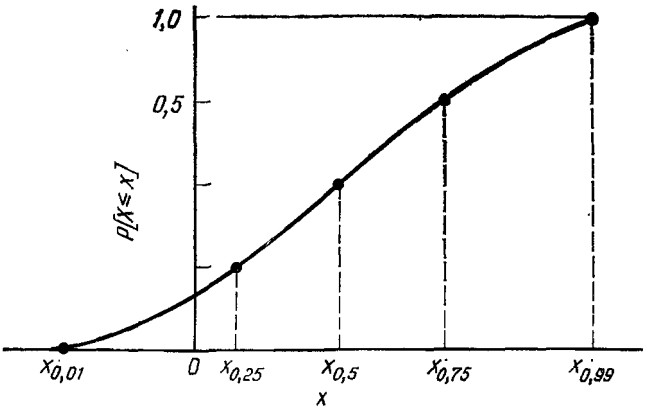


Рис. 3. Функция распределения вероятностей величины X.

части?» Ответ на этот вопрос есть $x_{0,25}$, т. е. дробь 0,25. Конечно, вероятность $(X < x_{0,25})$ должна быть равна 0,25. Аналогично получаем значение $x_{0,75}$. И наконец, попытаемся оценить значения $x_{0,01}$ и $x_{0,99}$, задавая, например, вопрос: «Какое значение x Вы бы выбрали, чтобы вероятность того, что величина X меньше этого x, составляла 0,01?» Ответом будет значение $x_{0,01}$.

Продолжая такое дробление, можно получить набор величин x_k, таких, что вероятность $(X \leqslant x_k)$ равна k, т. е.

$$P\ (X \leqslant x_k) = k. \tag{13}$$

Точки $(x_k,\ k)$ можно нанести на график, как показано на рис. 3, и гладкая кривая, соединяющая их, будет представлять функцию распределения вероятностей величины X. Продифференцировав эту функцию, получим плотность вероятности.

4.5. Использование экспертных суждений и выборочной информации

Часто бывает важно использовать совместно экспертные оценки и имеющиеся данные. Теорема Байеса дает соотношение, позволяющее уточнить вероятностные оценки с учетом полученной дополнительной информации. Заметим, что все вероятностные оценки задаются либо в виде функции распределения вероятностей событий $p\ (E)$ в дискретном случае, либо в виде плотности вероятности $f\ (x)$ в непрерывном случае.

Для дискретного случая теорема Байеса имеет вид

$$p'\ (E) = P\ (E \mid S) = \frac{P\ (S \mid E)\ p\ (E)}{\sum\limits_{E} P\ (S \mid E)\ p\ (E)}, \tag{14}$$

где S — информационная выборка (т. е. данные), $P(E \mid S)$ — вероятность события E при данном S, а $P(S \mid E)$ — вероятность S при данном E. Функции $p(E)$ и $p'(E)$ означают соответственно априорную и апостериорную вероятности для дискретного случая.

Аналогично для непрерывного случая теорема Байеса имеет вид

$$f'(x) = \frac{f_x(S \mid x)\, f(x)}{\int\limits_x f_x(S \mid x)\, f(x)\, dx}, \tag{15}$$

где $f_x(S \mid x)$ — плотность вероятности для информационной выборки S при заданном x, $f'(x)$ — апостериорная плотность вероятности при данном S, а $f(x)$ — априорная плотность вероятности. В следующем разделе предлагаются методы упрощения формул (14) и (15).

4.6. Практические соображения при оценке экспертных вероятностей

Поскольку экспертные оценки вероятностей, сделанные одним человеком, не всегда являются логически согласованными (после его первой попытки), исследователь должен обнаружить внутренние несоответствия и указать на них данному эксперту [61, 69]. Недавно в работе [76] отмечалось, что люди систематически используют эвристические соображения при оценке неизвестных величин. Первым шагом на пути создания процедур для устранения личных предубеждений является их изучение. И наконец, прежде чем полагаться на суждения экспертов, следует проверить их откровенность и правдивость. Указанные соображения привели к понятию функций вознаграждения (или правилам ранжирования), когда высказыванию каждого из экспертов приписывается некоторое количество очков [80].

Трудность использования экспертных оценок вероятностей связана с тем, что полученные результаты требуют достаточно громоздкой процедуры обработки и не могут быть использованы непосредственно. К счастью, некоторые результаты теории статистических решений сильно упрощают как сам процесс оценок, так и последующий анализ. Основная идея состоит в выборе $p(E)$ или $f(x)$ из определенного класса функций, с которыми проще работать.

Для примера возьмем функцию $f(x)$, хотя те же идеи применимы и для $p(E)$. Было бы очень хорошо, если бы функция $f(x)$ принадлежала к классу распределений вероятностей, зависящих

от небольшого числа параметров, которые обозначим через λ. Тогда можно записать $f(x/\lambda)$, и для того, чтобы полностью определить функцию f, требуется оценить только величины λ. Например, если функция относится к классу нормальных распределений, то она полностью определяется средним значением и дисперсией. Обычно намного легче оценить эти два параметра, чем получить все распределение вероятностей, как описывалось в разд. 4.4. Пусть класс функций достаточно полный в том смысле, что широкий диапазон суждений можно выразить при помощи некоторой функции из этого класса. Тогда, видимо, мы не сделаем большой ошибки, если сначала предположим, что неопределенность в суждениях можно описать некоторой функцией из того же класса.

Другим преимуществом при выборе функции из заданного класса является то, что такую функцию относительно просто изменить при помощи теоремы Байеса. Например, для некоторых классов функций и некоторых методов выборки апостериорная плотность вероятности $f'(x)$ [формула (15)] может быть функцией из того же класса, что и априорная плотность вероятности $f(x)$. В таком случае плотности могут быть записаны соответственно как $f(x \mid \lambda')$ и $f(x \mid \lambda)$. Далее, $f'(x)$ можно найти путем простого пересчета λ в λ' на основе дополнительных данных. В работе [60] описаны соответствующие теоретические построения, а также рассмотрено много конкретных примеров.

5. ОЦЕНКА ПОЛЕЗНОСТИ

В данном разделе предполагается, что существует единственная мера эффективности X, относительно которой необходимо оценить предпочтения лица, принимающего решение. Нужно оценить полезность $u(x)$ каждого возможного исхода $x_1, x_2, \ldots$. Если множество исходов дискретно, то искомые полезности можно непосредственно оценить, определяя вероятности равноценности исходов $\pi(x)$ на основе аксиомы 4. Однако, поскольку число возможных исходов обычно велико, необходимо (и проще) оценить функцию полезности $u(x)$. Метод такой оценки иллюстрируется в следующих разделах.

Для упрощения дальнейшего изложения разобьем всю процедуру оценки функций полезности на пять этапов:

1) предварительный анализ для фактической оценки;
2) определение соответствующих качественных параметров;
3) формирование количественных ограничений;
4) выбор функции полезности;
5) проверка на согласованность.

5.1. Предварительные процедуры для фактической оценки полезности

Оценка функций полезности, по-видимому, скорее искусство, чем наука. Успех в данной области тесно связан со способностью исследователя вступать в контакт с лицом, принимающим решение. Исследователь должен доказать этому лицу важность таких оценок, заручиться его поддержкой и сделать удобной процедуру оценивания.

Прежде чем приступать к оценке функции полезности, следует обсудить концепцию теории принятия решений. Для лица, принимающего решение, должно быть совершенно ясно, что интересующие его предпочтения являются его субъективными чувствами и что не существует совершенно объективных предпочтений. В тех случаях, когда лицо, принимающее решение, чувствует некоторую неловкость при сообщении о своих субъективных чувствах, было бы очень хорошо, если бы оно изменило свое мнение. Последнее условие является необходимым для корректного анализа проблемы. В этом и состоит одна из целей теории принятия решений — требовать, чтобы лицо, принимающее решение, сформулировало свои предпочтения в надежде, что оно сопоставит их между собой и скорректирует свое мнение.

5.2. Определение соответствующих качественных параметров

Нас интересуют такие качественные характеристики, как монотонность и отношение лица, принимающего решение, к риску. Достаточно просто можно установить, выполняется ли условие монотонности. Спросим лицо, принимающее решение, что оно больше предпочитает: x_1 или x_2 (где $x_2 > x_1$). Вероятно, эксперт ожидал бы ответа на этот вопрос, основываясь на собственной оценке исходов (последствий). Если x_2 предпочтительнее, то он склонился бы к мнению, что предпочтения монотонно возрастают на множестве свойств (признаков) X. А затем (чтобы окончательно удостовериться) ему следует спросить, всегда ли большее значение x предпочтительнее меньшего.

Допустим, что предпочтения монотонно возрастают в X, как, например, предполагается в случае прибыли. Тогда будем говорить, что некий субъект *уклоняется от риска*, если для любых значений x_1 и x_2 сумма $(x_1 + x_2)/2$ предпочтительнее лотереи $L_1\left(x_1, \frac{1}{2}, x_2\right)$, которая имеет исходы x_1 и x_2 с одинаковой вероятностью. Отметим, что величина $(x_1 + x_2)/2$ представляет собой математическое ожидание лотереи L (в противоположность полезности). Кроме того, будем говорить, что субъект *стремится к риску*, если он предпочитает лотерею L_1 по сравнению с величи-

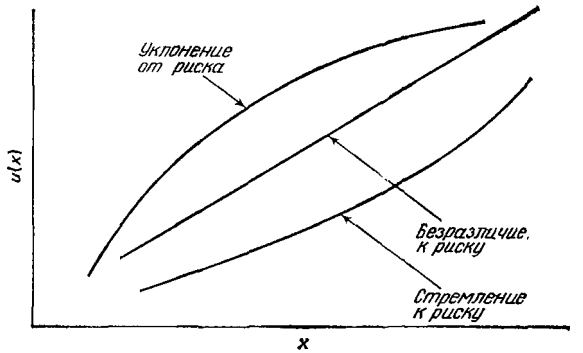


Рис. 4. Отношение к риску.

ной $(x_1 + x_2)/2$ при всех значениях x_1 и x_2. И наконец, субъект *безразличен* (нейтрален) к риску, если ему безразлично, что он получит: лотерею L или величину $(x_1 + x_2)/2$ для любых x_1 и x_2. Приведенные характеристики отношения к риску удобно использовать для описания областей и функций полезности (рис. 4). Функция полезности вогнута, выпукла или линейна соответственно, если лицо, принимающее решение, уклоняется от риска, стремится к нему или безразлично.

Для выяснения отношения к риску можно разделить область возможных значений X на четыре равные части с исходами, обозначаемыми через x_0, x_1, x_2, x_3 и x_4. Затем следует спросить у лица, принимающего решение, что для него предпочтительнее: лотереи $L\left(x_i, \frac{1}{2}, x_j\right)$, $i = 0, 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$; $j > i$, или соответствующие математические ожидания данных лотерей $(x_i + x_j)/2$. Если все ответы демонстрируют одно и то же отношение к риску, то следует предположить, что такое отношение к риску у данного лица преобладает.

Существуют более тонкие характеристики риска, для описания которых требуется понятие гарантированного эквивалента. *Гарантированным эквивалентом* лотереи $L(x_1, p, x_2)$ называется величина $\hat{x}$, которую лицо, принимающее решение, считает равноценной L. *Премия за риск* определяется как математическое ожидание выигрыша минус гарантированный эквивалент.

Предположим, что лицо, принимающее решение, уклоняется от риска, а $\hat{x}$ и r — гарантированный эквивалент и премия за риск соответственно для лотереи $L\left(x_1, \frac{1}{2}, x_1 + h\right)$, где h — положительная величина. Тогда, очевидно, $r = (x_1 + h/2) - \hat{x}$. Говорят, что имеет место постоянное уклонение от риска, если премия за риск в лотерее L не зависит от величины x_1. В этом случае

при возрастании x_1 на некоторую величину k гарантированный эквивалент должен увеличиться на ту же величину k. Как показано в работе [59], если наблюдается постоянное уклонение от риска, то функция полезности будет иметь вид

$$u(x) = a + b(-e^{-cx}),\ b > 0, \tag{16}$$

где a и b – произвольный набор скалярных констант.

Если для приведенной выше лотереи премия за риск уменьшается (возрастает) по мере возрастания x_1, то говорят, что имеет место *уменьшение уклонения от риска* (*уклонение от риска возрастает*). В работе [59] рассматриваются классы функций полезности, которые отражают эти типы отношения к риску. Если известно отношение к риску лица, принимающего решение, то можно полностью охарактеризовать его индивидуальные предпочтения, оценив те несколько параметров, которые входят в уравнение (16).

5.3. Формирование количественных ограничений

Под формированием количественных ограничений будем понимать определение (вычисление) нескольких точек на кривой, описывающей функцию полезности лица, принимающего решение. Следуя аксиоме 4, выберем x^* и x^0, такие, что x^* по крайней мере так же предпочтителен, как любые другие исходы, каждый из которых в свою очередь не менее предпочтителен, чем x^0. Затем можно произвольным образом назначить конкретные значения полезности двум данным исходам при условии, что $u(x^*) > u(x^0)$. Далее мы хотим получить значение x (назовем его x_1), такое, что исход x_1 равноценен лотерее $L_1\left(x^*, \frac{1}{2}, x^0\right)$ с точки зрения лица, принимающего решение. Тогда, поскольку полезности такого исхода и лотереи L_1 должны быть равны, можно записать

$$u(x_1) = \frac{1}{2}u(x^*) + \frac{1}{2}u(x^0). \tag{17}$$

Уравнение (17) дает третью точку на графике функции полезности (рис. 5). Аналогично используя экспертные оценки гарантированных эквивалентов x_2 и x_3 для соответствующих лотерей $L_2(x^*, \frac{1}{2}, x_1)$ и $L_3(x_1, \frac{1}{2}, x^0)$, получим значения полезности еще для двух точек:

$$u(x_2) = \frac{1}{2}u(x^*) + \frac{1}{2}u(x_1) \tag{18}$$

$$u(x_3) = \frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}u(x^0). \tag{19}$$

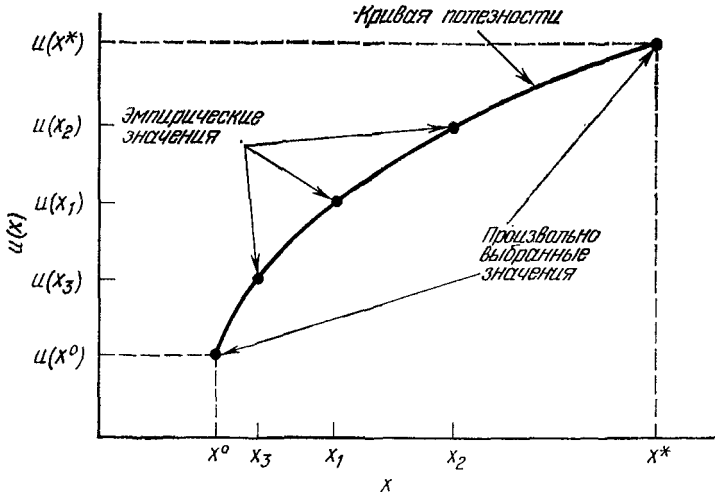


Рис. 5. Функция полезности.

С помощью такого метода всегда можно получить по известным значениям полезности двух исходов значение полезности третьего исхода.

Очень важным является вопрос о том, как найти значение гарантированных эквивалентов. Для получения гарантированного эквивалента требуется процедура взаимодействия исследователя с лицом, принимающим решение (экспертом). Эксперт должен сделать несколько выборов между предлагаемой ему лотереей и предлагаемыми исходами. Например, выбираем исход x_a и спрашиваем эксперта: «Исход x_a предпочтительнее лотереи L_1?» Независимо от ответа нужно знать, как следует изменить значение x (увеличить или уменьшить), чтобы найти искомый гарантированный эквивалент x_1. Предположим, что заранее было очевидно, что истинное x_1 должно быть больше, чем x_a. Тогда следовало бы выбрать x_b, такое, что $x_b > x_a$, и спросить эксперта, что предпочтительнее: x_b или L_1? После ответа снова нужно знать, как следует изменить значение x (увеличить или уменьшить). Такой интерактивный процесс (взаимодействие с экспертом) сходится постепенно к исходу x_1, равноценному лотерее L_1, т. е. к гарантированному эквиваленту.

В работе [69] выдвигаются два важных прагматических соображения, которые следует иметь в виду при оценке полезности исходов. Во-первых, исходы, предлагаемые эксперту в качестве вопросов, должны иметь содержательный смысл. Во-вторых, диапазон предлагаемых исходов простых лотерей должен быть достаточно широк, т. е. необходимо, чтобы исходы отличались друг

от друга. Если эти два соображения не учитываются, то ответы лица, принимающего решение, приносят мало пользы для определения предпочтений.

5.4. Выбор функции полезности

Предположим, что можно найти некоторое параметрическое семейство функций полезности, которые обладают определенными заранее установленными свойствами. Обозначим такое семейство функций полезности через $u(x \mid \lambda)$, где λ — параметры. Тогда выбор соответствующей функции полезности сводится к выбору значений параметров. Это проще и удобнее, чем определять полностью функцию полезности. Кроме того, параметрическое задание функции полезности позволяет провести анализ чувствительности без излишних вычислений. Мы полагаем, что достаточно было бы трех параметров, чтобы описать большинство ситуаций, поскольку тремя или меньшим количеством параметров можно моделировать широкий диапазон характеристик отношения к риску.

Используя параметрическую форму записи и предыдущие оценки отдельных частей кривой полезности [например, (17)], можно записать уравнение

$$u(x_1|\lambda) = \frac{1}{2} u(x^*|\lambda) + \frac{1}{2} u(x^0|\lambda), \qquad (20)$$

где число неизвестных равно числу параметров. Используя значения гарантированных эквивалентов, полученных экспертным путем, запишем столько уравнений, сколько неизвестных, и разрешим их относительно параметров, чтобы иметь возможность построить функцию полезности, как показано на рис. 5.

Для проверки внутренней совместимости смешанного набора качественных и количественных ограничений, налагаемых на функцию полезности, разработан метод, описанный в [52]. Те же идеи использованы в работе [70], где приводится ряд программ для выбора функции полезности, которая описывает отношение лица, принимающего решение, к риску и соответствует его эмпирическим оценкам предпочтений.

5.5. Проверка на согласованность

Существует большое число способов, которые можно использовать для обнаружения ошибок функции полезности, построенной по ответам эксперта. Под *ошибкой* мы понимаем ситуацию, когда функция полезности неадекватно отражает истинные предпочтения эксперта. Можно использовать, например, перекрестную проверку, чтобы установить, выполняются ли для конкретного

лица определенные качественные характеристики, такие, как уклонение от риска. Один из обычно применяемых тестов включает вопрос о том, как распределяются предпочтения между лотереей и некоторым исходом или между двумя лотереями. В обоих случаях ожидаемая полезность предпочитаемой ситуации, вычисленная на основании функции полезности эксперта, должна быть больше для этой ситуации, чтобы не возникло противоречия. Как только исследователь почувствует неуверенность относительно некоторых аспектов функции полезности эксперта, ему следует их проверить еще раз и сделать соответствующие исправления.

Одна из наиболее общих и существенных ошибок, которые обычно делаются при оценке функций полезности, связана с подбором параметров при использовании очень узких диапазонов изменения гарантированных эквивалентов лотерей. Например, предположим, что лицо, принимающее решение, считает гарантированный эквивалент лотереи $L\left(200, \frac{1}{2}, 0\right)$ равным 80, и пусть функция полезности для стратегии постоянного уклонения от риска определяется, исходя из этого. Экстраполяция гарантированного эквивалента, основанная на результирующей функции полезности, даст значение гарантированного эквивалента для лотереи $L\left(1000, \frac{1}{2}, 0\right)$, которое будет много меньше, чем эмпирическая оценка эксперта. Из функции полезности мы можем получить, что гарантированный эквивалент равен 250, а эксперт может указать некоторую величину, равную 400 или даже более. Во избежание таких несоответствий следует подбирать параметры на основе лотерей с диапазоном изменения гарантированных эквивалентов, соответствующим изучаемой проблеме.

6. УСПЕХИ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Специалист по теории принятия решений часто сталкивается с тремя очень важными проблемами: наличием большого числа признаков; изменением предпочтений во времени; коллективным принятием решений. При некоторых условиях каждую из этих проблем можно моделировать, представляя исходы в виде N-мерного вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, где x_n означает произвольный уровень (меру эффективности) показателя X_n. Опять, после того как аксиомы теории принятия решений одобрены, лицо, принимающее решение, должно выбрать альтернативы, которые максимизируют ожидаемую полезность. Дополнительные трудности возникают при попытке построить необходимое распределение субъективных вероятностей каждой альтернативы (в общем случае нужно построить N-мерные функции распределения вероятностей), а также функцию полезности $u(x)$ для N показателей.

Часто хорошо сконструированная вычислительная модель мо-

жет оказать помощь при оценке вероятностей исходов каждой альтернативы [30]. Если требуется эмпирическая оценка, то можно воспользоваться методами, аналогичными тем, которые использовались в одномерном случае и описаны в четвертом разделе данной главы [37]. Поскольку формализация структуры предпочтений более специфична для теории принятия решений, чем для вероятностного анализа, то кратко рассмотрим необходимые построения.

6.1. Задача с большим числом признаков

При наличии соответствующей возможности задачу непосредственной оценки предпочтений для N признаков желательно разбить на ряд меньших подзадач, в которых можно проводить оценки относительно подмножеств (поднаборов) признаков, а уже затем объединить полученные оценки. Например, очень удобно, если бы было справедливо аддитивное представление функции полезности

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} k_n u_n(x_n), \tag{21}$$

где u_n — функция полезности для отдельного характерного признака X_n, а k_n — скалярная константа. В более общем случае желательно подобрать простую функцию f, такую, что

$$u(\mathbf{x}) = f[u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_N(x_N)]. \tag{22}$$

В этом случае нам бы удалось свести задачу оценки предпочтений к решаемой задаче.

Обычная процедура в рассматриваемой ситуации состоит в том, что исследователь делает различные независимые предположения, которые подразумевают конкретную функциональную зависимость для f. Затем для каждой конкретной задачи эти предположения следует сначала, конечно, проверить. Простое обсуждение трех основных типов допущений, используемых в таких ситуациях, можно найти в работе [38]. В книге [47] и в разд. 4 гл. III-3 приводится обзор основных результатов и библиография по соответствующим вопросам. Из недавних исследований упомянем работы [5, 16, 20, 33, 39, 44].

6.2. Изменение предпочтений во времени

Основной вопрос, касающийся изменения предпочтений во времени, можно сформулировать следующим образом: «Каким образом полезность исхода $\mathbf{x}^{t_0}$ в настоящий момент времени t_0 связана с полезностью исхода $\mathbf{x}^{t_i}$ в некоторый другой (будущий) момент времени t_i?» Предположим, что весь интересующий нас период времени разбит на отдельные интервалы (т. е. время дис-

кретно). Обозначим через $\mathbf{x}^t = (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_N^t)$ исход в момент времени t; тогда полный набор исходов можно описать как $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^t)$. Цель состоит в том, чтобы оценить функцию полезности $u(\mathbf{x})$.

Частным случаем, когда предпочтения изменяются во времени, является ситуация, при которой исход $\mathbf{x}^t$ представляет собой только некоторую сумму денег. В такой ситуации, казалось бы, можно использовать дисконтирование, чтобы получить величину чистого дохода, которая в свою очередь может служить некоторой оценочной мерой. Однако дисконтирование мало оправдано в общем случае и даже в случае денежного выражения исходов, как показано в работе [51].

Если рассматривать задачу с предпочтениями, изменяющимися во времени, как многопараметрическую, то для ее решения можно использовать соответствующие результаты предыдущего раздела. В работе [51] такой подход применяется в случае $N=1$, т. е. когда X_1^t есть потребление в момент t. В работе [2] при аналогичных предположениях рассмотрен случай с одним периодом времени. Совершенно другой метод для случая с одним периодом времени изучался в [45]; задачи со многими периодами времени описаны в работах [42, 43, 58]. Авторы совершенно исключили неопределенность и ввели предположения о стационарности, чтобы получить величину чистого дохода в настоящий момент времени для каждого возможного исхода в будущем. Затем можно оценить функцию полезности для текущего периода времени с учетом отношения к риску лица, принимающего решение.

6.3. Коллективное принятие решений

В том случае, когда несколько лиц совместно принимают решение по одному вопросу, для каждого из них было бы полезно провести свой анализ. Сравнение полученных результатов позволит обнаружить различия и совпадения в мнениях членов коллектива. Например, может существовать согласие в мнениях относительно воздействия различных альтернатив, но при оценке их величины могут возникнуть разногласия. Констатация таких расхождений в мнениях должна явиться основой для проведения конструктивного обсуждения. Сама модель может служить механизмом для определения наилучшего решения, поскольку она дает методологию исследования предложенных компромиссных решений и указывает области, в которых они могут быть неустойчивы. Как отмечалось в работе [61], аксиомы теории принятия решений неприменимы в случае коллективного решения. Тем не менее они могут подходить для некоторых ситуаций. Если признак X_n в многофакторной проблеме интерпретировать как индикатор предпочтения n-го члена группы, то, как показано в работах [25, 40],

можно получить функцию полезности для группы, объединяющую функции полезности отдельных членов коллектива.

Проблеме объединения индивидуальных предпочтений в групповое посвящено много чрезвычайно интересных работ. Возможно, самой известной является работа [1]. В ней доказывается, что не существует общей процедуры групповой ранжировки по результатам индивидуальных ранжировок, удовлетворяющей пяти разумным допущениям. В работах [19, 22] постулируются условия, при выполнении которых порядковая групповая функция полезности (ранжировка исходов с точки зрения группы) может быть записана в виде суммы порядковых функций полезности членов данной группы. Влияние неопределенности и отношения к риску рассматривались в работе [54], где предлагалось ввести так называемое решение арбитража. Одна из основных трудностей при групповом принятии решения состоит в сравнении индивидуальных предпочтений [46]. В статье [71] показано, что для групповых решений можно получить ряд важных результатов без полного сравнения полезностей. В статье [73] представлена интересная попытка получения функции полезности по результатам анализа ответов всех членов группы.

7. БУДУЩЕЕ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В настоящее время многие специальные приемы и методы теории принятия решений развиты до такой степени, что позволяют охватить большинство трудных вопросов, которые возникают при анализе сложных проблем. Для создания гарантий необходимо разрабатывать более совершенные методологические процедуры, относящиеся к многофакторным предпочтениям, групповым действиям, оценке информации, программному обеспечению и т. д. Нужно стремиться к тому, чтобы успешно применять теорию для решения актуальных проблем, и использовать накопленный опыт для совершенствования «искусства» применения. Проделанная работа будет ненапрасной, поскольку в теории принятия решений заложены возможности, реализация которых позволит значительно улучшить процесс принятия решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arrow K. J., Social Choice and Individual Values, Wiley, New York, 1951, 1963.
2. Bell D. E., Evaluating Time Streams of Income, *Omega*, 2, 691—699 (1974).
3. Bernhardt K. L., American Auto Inc., Case Study of a False Start in PDA, Marketing Science Institute, 1972.
4. Blackwell D., Girshick M. A., Theory of Games and Statistical Decisions, Wiley, New York, 1954. [Имеется перевод: Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений.— М.: ИЛ, 1958.]

5. Boyd D., Interactive Preference Assessment for Decisions with Multi-Attribute Outcomes, Fourth Research Conference on Subjective Probability, Utility, and Decision Making, Rome, Italy, 1973.
6. Brown R. V., Do Managers Find Decision Theory Useful? *Harvard Bus. Rev.*, **48**, 78—89 (1970).
7. Brown R. V., *Marketing Applications of Personalist Decision Analysis*, Marketing Science Institute, 1971.
8. Davidson D., Suppes P., Siegel S., Decision Making, An Experimental Approach, Stanford University Press, Stanford, California, 1957.
9. DeFinetti B., La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives, *Annales de l'Institut Henri Poincare*, **7**, 1—68 (1937); English translation by H. E. Kyburg, Jr., in H. E. Kyburg, Jr. and H. E. Smokler, Eds., Studies in Subjective Probability, Wiley, New York, 1964.
10. De Neufville R., Keeney R. L., Use of Decision Analysis in Airport Development for Mexico City, in Analysis of Public Systems, Drake A. W., Keeney R. L., Morse P. M., Eds., MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
11. Drake A. W., Fundamentals of Applied Probability Theory, McGraw-Hill, New York, 1967.
12. Edwards W., The Theory of Decision Making, *Psychological Bull.*, **51**, 380—417 (1954).
13. Edwards W., Conservatism in Human Information Processing, in Formal Representations of Human Judgment, B. Klein-Muntz, Ed., Wiley, New York, 1968.
14. Fellner W., Probability and Profit, A Study of Economic Behavior Along Bayesian Lines, Richard D. Irwin, Homewood, Illinois, 1965.
15. Fischer G. W., Edwards W., Technological Aids for Inference, Evaluation, and Decision Making, A Review of Research and Experience, Engineering Psychology Laboratory, University of Michigan, 1973.
16. Fischer G. W., Multidimensional Utility Models for Riskless and Risky Decision Making, Theory and Experimental Application, Duke University, Durham, North Carolina, 1973.
17. Fishburn P. C., Decision and Value Theory, Wiley, New York, 1964.
18. Fishburn P. C., Independence in Utility Theory With Whole Product Sets, *Operations Res.*, **13**, 28—45 (1965).
19. Fishburn P. C., Preferences, Summation, and Social Welfare Functions, *Management Sci.*, **16**, 179—186 (1969).
20. Fishburn P. C., Von Neumann-Morgenstern Utility Functions on Two Attributes, *Operations Res.*, **22**, 35—45 (1974).
21. Fishburn P. C., Value Theory (см. стр. 448 в этой книге).
22. Fleming M., A Cardinal Concept of Welfare, *Quart. J. Econ.*, 66., 366—384 (1952).
23. Friedman M., Savage L. J., The Expected-Utility Hypothesis and the Measurability of Utility, *J. Pol. Econ.*, **60**, 463—474 (1952).
24. Gaver D. P., Simulation, Theory (см. стр. 630 в этой книге).
25. Gordon G., Simulation, Computation (см. стр. 655 в этой книге).
26. Grayson C. J., Decision Under Uncertainty, Drilling Decisions by Oil and Gas Operators, Division of Research, Harvard Business School, Boston, Massachusetts, 1960.
27. Hammond J. S., Simplifying the Choice Between Uncertain Prospects With Nonlinear Utility, *Management Sci.*, 1974.
28. Harsanyi J. C., Cardinal Welfare Individualistic Ethics, and Interpersonal Comparisons of Utility, *J. Pol. Econ.*, **63**, 309—321 (1955).
29. Howard R. A., Decision Analysis, Applied Decision Theory, Proc. Fourth Int. Conf. on Operational Res., Boston, Massachusetts, 1966.
30. Howard R. A., The Foundations of Decision Analysis, *IEEE Systems Sci. and Cybernetics*, SSC-4, 211—219 (1968).

31. Howard R. A., Proximal Decision Analysis, *Management Sci.*, 17, 507—541 (1971).
32. Howard R. A., Matheson J. E., North D. W., The Decision to Seed Hurricanes, *Sci.*, 176, 1191—1202 (1972).
33. Huber G. P., Development of Multi-Attribute Utility Models, A Review of Field and Field-Like Studies, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, 1973.
34. Kaufman G. M., Statistical Decision and Related Techniques in Oil and Gas Exploration, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
35. Keeney R. L., Quasi-Separable Utility Functions, *Nav. Res. Log. Quart.*, 15, 551—565 (1968).
36. Keeney R. L., Utility Independence and Preference for Multiattributed Consequences, *Operations Res.*, 19, 875—893 (1971).
37. Keeney R. L., A Decision Analysis with Multiple Objectives. The Mexico City Airport, *Bell J. Economics Management Sci.*, 4, 101—117 (1973).
38. Keeney R. L., Concepts of Independence in Multiattribute Utility Theory, in Multiple Criterion Decision Making, J. Cochrane and M. Zeleny, Eds., University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina, 1973.
39. Keeney R. L., Multiplicative Utility Functions, *Operations Res.*, 22, 22—34 (1974).
40. Keeney R. L., Kirkwood C. W., Group Decision Making Using Cardinal Social Welfare Functions, Technical Report 83, Operations Research Center, MIT, 1973.
41. Keeney R. L., Raiffa H., A Critique of Formal Analysis in Public Decision Making, in Analysis of Public Systems, Drake A. W. Keeney R. L., Morse P. M., Eds., MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
42. Koopmans T. C., Stationary Ordinal Utility and Impatience. *Econometrica*, 28, No. 2, 287—309 (1960).
43. Koopmans T. C., Diamond P. A., Williamson R. E., Stationary Utility and Time Perspective, *Econometrica*, 32, Nos. 1—2, 82—100 (1964).
44. Krantz D. H., Luce R. D., Suppes P., Tversky A., Foundations of Measurement, Vol. 1, Academic Press, New York, 1971.
45. Lancaster K. J., An Axiomatic Theory of Consumer Time Preference, *Int. Econ., Rev.*, 4, 221—231 (1963).
46. Luce R. D., Raiffa H., Games and Decisions, Wiley, New York, 1957. [Имеется перевод: Льюс Р. Д., Райфа Г. Игры и решения.— М.: ИЛ, 1961.]
47. MacCrimmon K. R., An Overview of Multiple Objective Decision Making, in Multiple Criteria Decision Making, J. L. Cochrane and M. Zeleny, eds. University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina, 1973.
48. Magee J. F., Decision Trees for Decision Making, *Harvard Bus. Rev.*, 42, No. 4, 126—138 (1964).
49. Magee J. F., How to Use Decision Trees in Capital Investment. *Harvard Bus. Rev.*, 42 No. 5, 79—96 (1964).
50. Matheson J. E., Decision Analysis Practice, Examples and Insights. Proc. Fifth Int. Conf. on Operational Res., Venice, Italy, 1969.
51. Meyer R. E., On the Relationship Among the Utility of Assets, the Utility of Consumption and Investment Strategy in an Uncertain But Time Invariant World, Proc. Fifth Int. Conf. on Operational Res., Venice, Italy, 1969.
52. Meyer R. E., Pratt J. W., The Consistent Assessment and Fairing of Preference Functions, *IEEE Systems Sci. and Cybernetics*, SSC-4, No. 3, 270—278 (1968).
53. Mosteller F., Nogee P., An Experimental Measurement of Utility, *J. Pol. Econ.*, 59, 371—404 (1951).
54. Nash J. F., The Bargaining Problem, *Econometrica*, 18, 155—162 (1950).
55. Newman J. W., Management Applications of Decision Theory, Harper and Row, New York, 1971.

56. Parzen E., Modern Probability Theory and Its Applications, Wiley, New York, 1960.
57. Pollak R. A., Additive von Neumann-Morgenstern Utility Functions, *Econometrica*, 35, 485—494 (1967).
58. Pollard A. B., A Normative Model for Joint Time/Risk Preference Decision Problems, Stanford Research Institute, 1969.
59. Pratt J. W., Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 32, 122—136 (1964).
60. Pratt J. W., Raiffa H., Schlaifer R., Introduction to Statistical Decision Theory, McGraw-Hill, New York, 1965.
61. Raiffa H., Decision Analysis, Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.
62. Raiffa H., Preferences for Multi-Attributed Alternatives, Memorandum RM-5868-DOT RC, the RAND Corporation, Santa Monica, California, 1969.
63. Raiffa H., Schlaifer R. O., Applied Statistical Decision Theory, Harvard Business School, Division of Research, Boston, Massachusetts, 1961.
64. Ramsey F. P., Truth and Probability, in The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, by F. P., Ramsey, Harcourt Brace, Co., New York, 1931. Reprinted in Studies in Subjective Probability, H. E. Kyburg and H. E. Smokler, Eds., Wiley, New York, 1964.
65. Rousseau W. R., Matheson J. E., Computer Programs for Decision Analysis. Stanford Research Institute, 1967.
66. Savage L. J., The Foundations of Statistics, Wiley, New York, 1954, Second Ed., Dover, New York, 1972.
67. Schlaifer R. O., Probability and Statistics for Business Decisions, McGraw-Hill, New York, 1959.
68. Schlaifer R. O., Manual of Cases on Decision Under Uncertainty with Analyses and Teaching Notes, McGraw-Hill, New York, 1968.
69. Schlaifer R. O., Analysis of Decisions Under Uncertainty, McGraw-Hill, New York, 1969.
70. Schlaifer R. O., Computer Programs for Elementary Decision Analysis, Division of Research, Harvard Business School, 1971.
71. Sen A., Interpersonal Aggregation and Partial Comparability, *Econometrica*, 30, 393—409 (1970).
72. Slovic P., Lichtenstein S., Comparison of Bayesian and Regression Approaches to the Study of Information Processing in Judgment, *Organizational Behav. and Human Per.*, 6, 649—744 (1971).
73. Spetzler C. S., The Development of a Corporate Risk Policy for Capital Investment Decision, *IEEE Systems Sci. and Cybernetics*, SSC-4, 279—300 (1968).
74. Stanford Research Institute, Decision Analysis of Nuclear Plants in Electrical Systems Expansion, Report on Project 6496, Menlo Park, California, 1968.
75. Tribus M., Rational Descriptions, Decisions and Designs, Pergamon Press, New York, 1969.
76. Tversky A., Kahneman D., Judgment Under Uncertainty, Heuristics and Biases, The Hebrew University, Jerusalem, Israel, 1973.
77. Von Neumann J., Morgenstern O., Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944. [Имеется перевод: фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение.— М.: Наука, 1970.]
78. Wald A., Statistical Decision Functions, Wiley, New York, 1950. [Имеется перевод: Вальд А. Статистические решающие функции.— В кн. Позиционные игры.— М.: Наука, 1967, с. 300—544.]
79. Winkler R. L., The Quantification of Judgment, Some Methodological Suggestions, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 62, 1105—1120 (1967).
80. Winkler R. L., Scaring Rules and the Evaluation of Probability Assessors, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 64, 1073—1078 (1969).

III-5. Теория игр и игровое моделирование

Г. Оуэн[1)]

НЕКОТОРЫЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Теория игр впервые была систематически изложена Нейманом и Моргенштерном только в 1944 г., хотя отдельные результаты были опубликованы еще в 20-е годы [8]. Нейман и Моргенштерн написали оригинальную книгу, которая содержала главным образом экономические примеры, поскольку экономическому конфликту легче всего придать численную форму. Во время второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней математический аппарат для исследования стратегических решений. Затем главное внимание снова стало уделяться экономическим проблемам. Тем не менее сейчас ведется большая работа, направленная на расширение сферы применения теории игр. Среди социальных наук аппарат теории игр используется главным образом в психологии для анализа торговых сделок и переговоров, а также для изучения принципов формирования коалиций.

1. ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ И НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ИГРЫ

В позиционной игре n лиц разрешенные ходы указаны в их логической последовательности. Каждый ход производится либо игроком (личный ход), либо выбирается случайным образом (случайный ход). В первом случае игрок выбирает ход, имея полную информацию, во втором случае задается распределение вероятностей ходов. В каждой окончательной позиции игры значение платежа или исхода можно выразить при помощи вектора $(p_1, \ldots, p_n)$, где p_i — выигрыш i-го игрока при данном исходе.

В общем случае позиционная игра может быть представлена в виде дерева с выделенным узлом (называемым начальной позицией игры). Каждый узел представляет определенную позицию игры; каждая дуга — ход в игре. Информация задается при помощи *информационных множеств*. Две позиции принадлежат одному и тому же информационному множеству, если один и тот же игрок, которому следует ходить в каждой из этих позиций, не может отличить одну позицию от другой.

Стратегия представляет собой некоторое правило, описывающее действия игрока, т. е. указывает, какую альтернативу следует

[1)] Guillermo Owen, Rice University.

выбирать в каждом информационном множестве. Если игрок имеет k информационных множеств, в каждом из которых содержится соответственно $j_1, j_2, \ldots, j_k$ альтернатив, то игрок располагает $j_1, j_2, \ldots, j_k$ стратегиями игры.

Если стратегии n игроков обозначить через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, то исход игры определен, за исключением возможных случайных ходов. Поскольку вероятности случайных ходов полностью заданы, то ожидаемый выигрыш (проигрыш) каждого игрока при таком выборе стратегий также полностью определен. *Нормальной формой* игры называется функция, которая задает вектор математического ожидания выигрышей для каждой из n стратегий.

Таким образом, *нормальная форма* игры — это функция, которая ставит в соответствие каждому набору стратегий $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ вектор выигрышей $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. В таком контексте p_i означает выигрыш игрока i, если применяется данный набор стратегий.

Некоторый набор из n стратегий называется *равновесным*, если для каждого игрока i и для каждой стратегии s_i игрока i

$$p_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n) \geqslant p_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, s_i, \ldots, \sigma_n). \qquad (1)$$

Другими словами, если набор из n стратегий равновесный, то ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш, изменяя стратегию в одностороннем порядке. К сожалению, большинство игр не имеют равновесных наборов. Гарантировать существование равновесного n-набора можно, только располагая *полной информацией*; когда в окончательной позиции игры каждый игрок знает все свои ходы вплоть до этой позиции, игра имеет по крайней мере один равновесный набор (одну ситуацию равновесия).

Пример 1. Рассмотрим в качестве примера очень упрощенный вариант игры в покер. В начале игры каждый игрок делает единичную ставку на «кон». Колода карт (содержащая m «картинок» и n карт «без картинок») тасуется, и одна из карт сдается игроку P_1. Посмотрев на свою карту, игрок может спасовать или поставить некоторую сумму денег a.

Если игрок P_1 пасует, игра на этом прекращается; игрок выигрывает (ставку) единицу, если у него картинка, и проигрывает, если у него карта без картинки. Если P_1 увеличивает ставку, игрок P_2, пренебрегая картой игрока P_1, должен решить: пасовать ему или поднимать ставку (объявить игру)?

Если игрок P_2 пасует, P_1 выигрывает ставку (единицу). Если P_2 поднимает ставку, то карты открываются и игрок P_1 выигрывает $(1 + a)$, если у него «картинка», и проигрывает $(1 + a)$ при карте без картинки.

На рис. 1 эта игра представлена в виде дерева. Узлы от A до K обозначают позиции игры. Позиция A является случайной (полу-

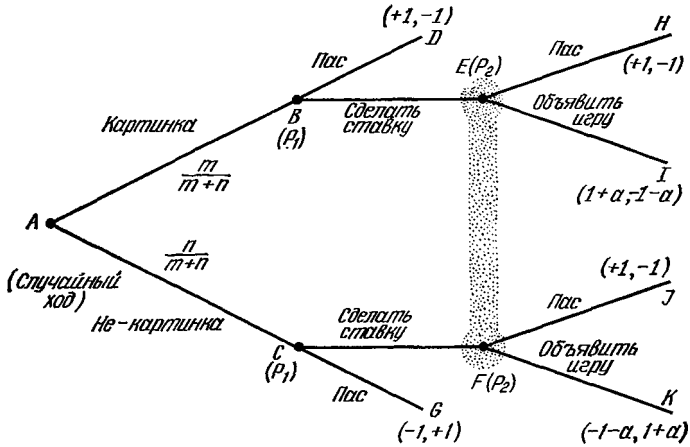


Рис. 1. Нормальная форма (дерево) упрощенного варианта игры в покер.

чение карт из перетасованной колоды), B и C принадлежат игроку P_1, а E и F — игроку P_2. Другие узлы (H, I, J, K) являются окончательными вершинами, для каждой из которых установлен вектор платежей, представляющий выигрыш каждого из игроков.

Игрок P_1 имеет два информационных множества — две вершины: B и C. Игрок P_2 имеет только одно информационное множество, содержащее как E, так и F, поскольку для игрока P_2 эти вершины неразличимы. (Напомним, что игрок P_1 делает ставку, зная исход случайного хода, т. е. знает карту, а P_2 должен сделать ставку или спасовать, не зная этой карты.)

Поскольку игрок P_1 имеет два информационных множества и по два выбора (пасовать или поднять ставку) для каждого случая. то он имеет $2 \cdot 2 = 4$ стратегии, которые можно обозначить через ВП (всегда поднимать ставку), ПК (поднимать, имея картинку), ПН (поднимать, не имея картинки) и П (всегда пасовать). Его противник имеет только одно информационное множество и два выбора в этом множестве. Следовательно, у него две стратегии, а именно ПС (поднимать ставку) или П (пасовать).

Для каждой стратегии можно подсчитать ожидаемые платежи. Так, если игрок P_1 выбирает ВП (всегда поднимать ставку) и игрок P_2 выбирает ПС (поднимать ставку), то P_1 выиграет сумму $(1 + a)$ с вероятностью $p = m/(m + n)$ и с вероятностью $(1 - p)$ потеряет сумму $(1 - a)$. Таким образом, математическое ожидание выигрыша игрока P_1 равно $(2p - 1)(1 + a)$. Таблицу математических ожиданий выигрыша для P_1 можно представить в матрич-

ной форме:

$$\begin{array}{c} \\ \text{ВП} \\ \text{ПК} \\ \text{ПП} \\ \text{П} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2p-1)(1+a) & 1 \\ 2p-1+ap & 2p-1 \\ (2p-1)a+p-1 & 1 \\ 2p-1 & 2p-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Очевидно, что математические ожидания выигрышей игрока P_2 те же, что и у игрока P_1, только со знаком «минус». Это *нормальная форма* игры.

2. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

2.1. Введение

В игре с нулевой суммой сумма платежей для любого исхода равна нулю. При $n = 2$ это означает, что вектор платежей всегда будет иметь вид $(a, -a)$, где a — платеж игроку I и соответственно $(-a)$ — платеж игроку II. Это означает, что платеж можно представить одним числом a, и будет понятно, что это сумма выигрыша игрока I и сумма проигрыша игрока II, т. е. игрок II платит эту сумму игроку I. (Отрицательная величина означает выигрыш для игрока II.)

Равновесие пары стратегий определяется здесь так же, как и в более общем случае игры n лиц, рассмотренном выше. Тот факт, что платеж описывается одной величиной (а не вектором), позволяет несколько упростить определение.

Определение. *Пусть* $(S_1, S_2; P)$ — *игра двух лиц с нулевой суммой. Тогда стратегии* $\sigma^* \in S_1$, $\tau^* \in S_2$ *находятся в равновесии, если*

$$P(\sigma^*, \tau) \geqslant P(\sigma^*, \tau^*) \geqslant P(\sigma, \tau^*) \tag{2}$$

при всех $\sigma \in S_1$, $\tau \in S_2$. *Ситуация равновесия пары стратегий известна так же, как седловая точка.*

Не существует, конечно, гарантии, что игра с произвольной матрицей имеет седловые точки. Если предположить, что в некоторой игре с нулевой суммой существует более одной седловой точки, то представляет интерес следующая теорема:

Теорема 1. Пусть (σ, τ) и (σ', τ') — седловые точки. Тогда (σ, τ') и (σ', τ) также являются седловыми точками и, кроме того, $P(\sigma, \tau) = P(\sigma', \tau')$.

Данную теорему лучше всего выразить кратко следующим образом: седловые точки взаимозаменяемы и эквивалентны. Отметим, что сформулированное свойство не обобщается на другие игры,

т. е. не выполняется для игр с ненулевой суммой или для игр трех (и более) лиц.

2.2. Матричные игры

Если множества стратегий S_1 и S_2 конечные, то нормальная форма игры может быть записана в виде матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$, где строки представляют стратегии игрока I, а столбцы — стратегии игрока II; a_{ij} — платеж (игрок II платит игроку I), если игрок I выбирает i-ю строку, а игрок II выбирает j-й столбец. (Общепринятое для матричной игры условие: игрок, выбирающий строку, максимизирует платеж, а игрок, выбирающий столбец, минимизирует платеж.)

Седловой точкой называется некоторый элемент a_{kl} матрицы $\mathbf{A}$, такой, что

$$a_{il} \leqslant a_{kl} \leqslant a_{kj} \tag{3}$$

при любых i, j. Таким образом, седловая точка является одновременно наименьшим элементом строки (k) и наибольшим элементом столбца (l).

Проверить существование седловой точки можно путем поиска элемента a_{kl}, удовлетворяющего условиям (3). Альтернативный метод основан на определении *нижнего выигрыша* V_{I} и *верхнего проигрыша* V_{II} для заданной матрицы игры $\mathbf{A} = (a_{ij})$, которые записываются следующим образом:

$$V_{\mathrm{I}} = \max_i \min_j a_{ij} \tag{4}$$

$$V_{\mathrm{II}} = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{5}$$

Легко видеть, что всегда $V_{\mathrm{I}} \leqslant V_{\mathrm{II}}$.

Теорема 2. Пусть a_{kl} — седловая точка игры с матрицей $\mathbf{A}$. Тогда $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}} = a_{kl}$. И наоборот, если $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}}$, то существует седловая точка a_{kl}.

Из теоремы следует, что можно искать седловую точку путем простой проверки справедливости равенства $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}}$. Если равенство выполняется, то обычно легко найти седловую точку, так как она будет находиться на пересечении некоторой строки и некоторого столбца, будучи соответственно максимальным элементом данного столбца.

Смешанные стратегии. Большинство матричных игр не имеют седловых точек. В такой ситуации игроку обычно важно, чтобы противник не угадал, какую стратегию он будет использовать. Для осуществления этого плана следует пользоваться смешанной стратегией. В сущности, смешанная стратегия (для одного игрока) представляет собой схему случайного выбора чистой стратегии.

Математически ее можно представить как вероятностное распределение на множестве чистых стратегий данного игрока.

Определение. *Пусть* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — *матрица игры размера* $m \times n$. *Тогда смешанная стратегия для игрока* I *представляет собой вектор* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, *удовлетворяющий условиям*

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \tag{7}$$

а смешанная стратегия для игрока II *есть вектор* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, такой, что

$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \tag{9}$$

По существу, определение имеет следующий смысл: когда игрок I использует смешанную стратегию $\mathbf{x}$, он применяет некоторый случайный способ выбора стратегии. При этом он выбирает i-ю строку с вероятностью x_i. Аналогично игрок II, используя смешанную стратегию $\mathbf{y}$, выбирает j-й столбец с вероятностью y_j. Эти две схемы рандомизации будем предполагать независимыми, так что вероятность, с которой игрок I выбирает i, тогда как игрок II выбирает j, равна $x_i y_j$. В этом случае платеж будет равен a_{ij}. Суммируя по всем i и j, найдем математическое ожидание выигрыша $\sum\sum a_{ij} x_i y_j$ или в матричных обозначениях: $\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{y}$.

Теперь можно определить седловую точку для смешанных стратегий: пара стратегий $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ есть седловая точка, если

$$\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{y}^* \leqslant \mathbf{x}^{*t} \mathbf{A} \mathbf{y}^* \leqslant \mathbf{x}^{*t} \mathbf{A} \mathbf{y} \tag{10}$$

при любых $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — два множества смешанных стратегий.

Теорема 3. Каждая матричная игра имеет по крайней мере одну седловую точку в смешанных стратегиях.

Эта теорема носит название теоремы о минимаксе и формулируется следующим образом: для любой матричной игры $\mathbf{A}$

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{y} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{y} = V. \tag{11}$$

Величина V обычно называется значением игры.

Определение. *Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая гарантирует ему (в смысле математического ожидания) выигрыш, равный значению игры. Таким образом,*

стратегия $\mathbf{x}^*$ *оптимальна для* I, *если*

$$\min_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{x}^{*t}\mathbf{A}\mathbf{y} = V, \tag{12}$$

и стратегия $\mathbf{y}^*$ *оптимальна для* II, *если*

$$\max_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{x}^{t}\mathbf{A}\mathbf{y}^* = V. \tag{13}$$

В данном случае будет также справедливо равенство

$$\max_i \left\{\sum a_{ij}y_j^*\right\} = \min_j \left\{\sum a_{ij}x_i^*\right\} = V. \tag{14}$$

Теорема о минимаксе гарантирует существование по крайней мере одной оптимальной стратегии для каждого из игроков. Легко видеть, что любая пара оптимальных стратегий является равновесной ситуацией, и, наоборот, если ($\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$) — седловая точка, то стратегии $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ оптимальны.

2.3. Вычисление оптимальных стратегий

Вообще говоря, оптимальные стратегии легко находятся для небольших игр, но вычисления становятся достаточно сложными с ростом числа стратегий. Для поиска оптимальных стратегий рекомендуется несколько методов.

Седловые точки. Простейший метод состоит в нахождении седловой точки для чистых стратегий. Если такая седловая точка существует, то две чистые стратегии, которые к ней приводят, являются оптимальными.

Доминирование строк и столбцов используется для уменьшения размерности игры. Обычно говорят, что k-я строка матрицы $\mathbf{A}$ доминирует i-ю строку (т. е. одна чистая стратегия доминирует другую), если

$$a_{ij} \leqslant a_{kj} \quad \text{при всех } j, \tag{15}$$

$$a_{ij} < a_{kj} \quad \text{по крайней мере при одном } j. \tag{16}$$

Аналогично l-й столбец доминирует j-й столбец, если

$$a_{il} \leqslant a_{ij} \quad \text{при всех } i, \tag{17}$$

$$a_{il} < a_{ij} \quad \text{по крайней мере при одном } i. \tag{18}$$

Смысл этого состоит в том, что доминирующая стратегия никогда не хуже, а в некоторых случаях лучше, чем доминируемая стратегия. Отсюда следует, что игроку нет необходимости использовать доминируемую стратегию. В самом деле, будут существовать оптимальные смешанные стратегии, при которых назначается нулевая вероятность использования доминируемых строк и столбцов, и при решении игры все доминируемые строки и столбцы

могут быть отброшены, что часто позволяет уменьшить размеры матрицы.

Пример 2. Рассмотрим игру со следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Третья строка доминирует вторую. Исключение второй строки приводит к матрице

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец в этой урезанной матрице доминирует второй, исключение второго столбца дает

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Если можно найти решение для полученной игры, то его легко использовать для решения исходной игры, просто приписав исключенным строкам и столбцам нулевые вероятности.

Для решения игр (2×2), $(2 \times n)$ и $(m \times 2)$ существуют простые процедуры, описание которых можно найти в книге [9]. Общие процедуры, позволяющие находить решения больших игр, будут рассмотрены ниже.

Фиктивная игра. Для больших игр предложено несколько методов. Мы остановимся на двух методах, одним из которых является метод *фиктивного разыгрывания.*

По существу, фиктивное разыгрывание является имитацией многократного повторения игры. При каждом разыгрывании игрок выбирает такую чистую стратегию, которая является наилучшей при наблюдаемом вероятностном распределении, используемом противником. Эмпирическое распределение, полученное таким образом, будет в пределе оптимальным.

Теперь изложим этот метод более строго. В соответствии с данной процедурой определяются две последовательности векторов $\{\mathbf{X}^q\}$, $\{\mathbf{Y}^q\}$ следующим образом:

$$X_i^0 = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{19}$$

$$Y_j^0 = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Далее действуют по индукции, а именно предполагают, что $\mathbf{X}^{q-1}$ и $\mathbf{Y}^{q-1}$ выбраны и

$$k(q) = \text{тому } i, \text{ которое максимизирует } \sum_j a_{ij} Y_j^{q-1},$$

$$l(q) = \text{тому } j, \text{ которое минимизирует } \sum_i a_{ij} X_i^{q-1}.$$

Если существует набор решений, при которых указанные выражения достигают максимума или минимума, то любую из этих стратегий (максимизирующую или минимизирующую) можно взять в качестве решения. При этом

$$X_i^q = \begin{cases} X_i^{q-1}, & \text{если } i \neq k(q), \quad (21) \\ X_i^{q-1} + 1, & \text{если } i = k(q), \quad (22) \end{cases}$$

$$Y_j^q = \begin{cases} Y_j^{q-1}, & \text{если } j \neq l(q), \\ Y_j^{q-1} + 1, & \text{если } j = l(q). \end{cases} \quad (23)$$

Две последовательности векторов определяют стратегии $\mathbf{x}^q$, $\mathbf{y}^q$:

$$\mathbf{x}^q = \frac{1}{q}\mathbf{X}^q, \quad \mathbf{y}^q = \frac{1}{q}\mathbf{Y}^q. \quad (24)$$

Очевидно, что при $q \geqslant 1$ стратегии $\mathbf{x}^q$ и $\mathbf{y}^q$ будут смешанными. Не существует никаких гарантий, что последовательность $\{\mathbf{x}^q\}$ или $\{\mathbf{y}^q\}$ сходится, но поскольку она лежит в компактном множестве стратегий, то она должна содержать сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 4. Предел — $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ — любой сходящейся последовательности $\{\mathbf{x}^q\}$ и $\{\mathbf{y}^q\}$ является оптимальной стратегией (т. е. $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ — оптимальные стратегии).

Данный метод обычно требует большого числа итераций, но итерации относительно простые. Существуют различные модификации метода. Например, можно положить, что $\mathbf{Y}^q$ зависит от $\mathbf{X}^q$, а не от $\mathbf{X}^{q-1}$.

Другим методом, который часто предлагают для решения матричных игр, является *линейное программирование*. В общем случае оптимальные стратегии $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ будут решениями двух задач линейного программирования:

$$\text{максимизировать } \lambda \quad (25)$$

$$\text{при ограничениях } \sum_i a_{ij}x_i - \lambda \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (26)$$

$$\sum_i x_i = 1, \quad (27)$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m \quad (28)$$

$$\text{и минимизировать } \mu \quad (29)$$

$$\text{при ограничениях } \sum_j a_{ij}y_j - \mu \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad (30)$$

$$\sum_j y_j = 1, \quad (31)$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n. \quad (32)$$

Две сформулированные задачи являются разрешимыми, взаимно-двойственными задачами. Из теории двойственности следует, что $\max \lambda = \min \mu = V$, где V — значение игры.

2.4. Игры с ограничениями

Представляют интерес игры с ограничениями на допустимые смешанные стратегии. В такой ситуации можно встретиться с платежной функцией следующего вида:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t\mathbf{C} + \mathbf{b}^t\mathbf{y} - \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{33}$$

а множества стратегий $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ определяются матричными неравенствами

$$\mathbf{x}^t\mathbf{D} \leqslant \mathbf{e}^t, \quad \mathbf{F}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{g}, \tag{34}$$

$$\mathbf{x} \geqslant 0, \qquad \mathbf{y} \geqslant 0. \tag{35}$$

Пример 3. В качестве тривиального примера рассмотрим игру в бейсбол, когда игрок должен выбрать: либо перебрасывать мяч другим игрокам, либо провести прямую проводку. Предположим, что любая комбинация стратегий возможна, так что в принципе может использоваться любая смешанная стратегия (x_1, x_2). Предположим, что игрок слегка повредил ногу, тогда тренер может посоветовать ему реже проводить прямую проводку. С формальной точки зрения это означает, что введено некоторое неравенство, которому должна удовлетворять стратегия, например $x_1 \leqslant 0{,}7$.

Пример 4. В качестве менее тривиального примера рассмотрим игру, в которой платежи определяются не одним числом, а вектором (a_{ij}, b_{ij}). Например, в бою a_{ij} может означать вероятность захвата укрепленного пункта, а b_{ij} — число жертв (потери). Командир может получить приказ: «Максимизировать вероятность захвата укрепленного пункта при условии, что потери (математическое ожидание потерь) не превысят 1000 человек». Тогда условие

$$\mathbf{x}^t\mathbf{B} \leqslant (1000, 1000, \ldots, 1000)$$

ограничило бы возможные смешанные стратегии командира.

Опять можно определить нижнее и верхнее значения цены игры следующим образом:

$$V_{\mathrm{I}} = \max_{x \in \mathbf{X}} \min_{y \in \mathbf{Y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{36}$$

$$V_{\mathrm{II}} = \min_{y \in \mathbf{Y}} \max_{x \in \mathbf{X}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{37}$$

Нет никаких гарантий, что значения V_{I} и V_{II} существуют, поскольку совсем не обязательно, чтобы множества $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ были компактными. Однако если существует хотя бы одно из значений V_{I} или V_{II}, то существует и другое, и они равны друг другу.

В частности, последнее будет иметь место, если не пусто и ограничено как множество **X**, так и **Y**. (Однако это не является необходимым условием.)

Ограниченные оптимальные стратегии **x** и **y** можно найти путем решения следующих линейных задач:

$$\text{максимизировать} \quad \mathbf{x}^t\mathbf{C} + \mathbf{u}^t\mathbf{g} \tag{38}$$

при ограничениях

$$\mathbf{x}^t\mathbf{A} + \mathbf{u}^t\mathbf{F} \leqslant \mathbf{b}^t, \tag{39}$$

$$\mathbf{x}^t\mathbf{D} \leqslant \mathbf{e}^t, \tag{40}$$

$$\mathbf{x},\ \mathbf{u} \geqslant 0 \tag{41}$$

$$\text{и минимизировать} \quad \mathbf{b}^t\mathbf{y} + \mathbf{e}^t\mathbf{v} \tag{42}$$

при ограничениях

$$\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{D}\mathbf{v} \geqslant \mathbf{C}, \tag{43}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{g}, \tag{44}$$

$$\mathbf{y},\ \mathbf{v} \geqslant 0. \tag{45}$$

Легко увидеть, что эти задачи являются взаимно-двойственными. Общее значение их функционалов будет равно значению игры с ограничениями.

2.5. Бесконечные игры

Если множества чистых стратегий игры бесконечны, то возникает значительно более сложная ситуация. Отсутствие свойства компактности у множеств чистых стратегий в общем случае приводит к тому, что теорема о минимаксе перестает быть справедливой. Это имеет место, например, в играх, у которых множества чистых стратегий несчетные.

Игры на квадрате. Интересная игра наблюдается в случае, когда множества чистых стратегий изоморфны единичному интервалу [0, 1]. Нормальная форма такой игры описывается функцией, определенной на единичном квадрате, откуда и происходит название «Игра на квадрате». Общий вид записи: $A(x, y)$, где x и y меняются в пределах $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Пример 5. Предположим, что две конкурирующие фирмы C_1 и C_2 хотят разделить свой рекламный бюджет между городами A и B. Пусть общая сумма денег фиксирована. Типичной стратегией C_1 является разделение бюджета на две части: x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ для города A и $(1 - x)$ для города B. Аналогично стратегия фирмы C_2 — это выделение части y $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ своего рекламного бюджета для города A и остальной части $(1 - y)$ для города B.

В качестве платежа выберем долю прибыли фирмы C_1, полученную от двух городов (общую прибыль можно считать фиксированной, чтобы игра была с нулевой суммой). Тогда платеж должен быть некоторой функцией, вероятно непрерывной, от двух переменных. Переменными являются стратегии x и y. Например, предположим, что вся прибыль составляет a и b долларов от городов A и B соответственно и что прибыль делится пропорционально количеству рекламы в данном городе. Доля прибыли фирмы C_1 будет определяться формулой

$$A(x, y) = \frac{ad_1x}{d_1x + d_2y} + \frac{bd_1(1-x)}{d_1(1-x) + d_2(1-y)},$$

где d_1 и d_2 — рекламные затраты фирм.

Для таких игр можно определить смешанные стратегии в виде распределений вероятностей F, G на единичном интервале. Математические ожидания выигрышей определяются обычно через интегралы Стилтьеса:

$$E[F, y] = \int_0^1 A(x, y)\, dF(x), \tag{46}$$

$$E[x, G] = \int_0^1 A(x, y)\, dG(y), \tag{47}$$

$$E[F, G] = \int_0^1 \int_0^1 A(x, y)\, dF(x)\, dG(y). \tag{48}$$

Используя формулы (46)—(48), можно определить V_{I} и V_{II}:

$$V_{\mathrm{I}} = \sup_F \inf_y E[F, y], \tag{49}$$

$$V_{\mathrm{II}} = \inf_G \sup_x E[x, G]. \tag{50}$$

В общем случае замена inf и sup на min и max недопустима, и нельзя приравнивать V_{I} и V_{II}. Существуют, однако, важные случаи, когда это можно делать.

Теорема 5. Пусть функция $A(x, y)$ непрерывна на квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тогда

$$V_{\mathrm{I}} = \max_F \min_y E[F, y], \tag{51}$$

$$V_{\mathrm{II}} = \min_G \max_x E[x, G] \tag{52}$$

и, кроме того, $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}}$.

К сожалению, не существует аналитических методов решения таких задач (игр); единственный известный метод состоит в аппро-

ксимации непрерывной игры посредством конечной игры, матрица которой $(\mathbf{A})^n$ состоит из элементов $(a_{ij}^{(n)})$, определяемых следующим образом:

$$a_{ij}^{(n)} = A\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right), \; i = 1, \ldots, n. \qquad (53)$$
$$j = 1, \ldots, n.$$

Для каждого n получается игра с матрицей $(n \times n)$. Если $\mathbf{r}^{(n)} = (r_1^{(n)}, \ldots, r_n^{(n)})$ является стратегией для I в $\mathbf{A}^{(n)}$, то вектор $\mathbf{r}^{(n)}$ можно использовать для определения стратегии $F^{(n)}$ в непрерывной игре, а именно

$$F^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{[nx]} r_i^{(n)}. \qquad (54)$$

Аналогично по стратегии $\mathbf{s}^{(n)}$ для II можно определить стратегию $G^{(n)}$ в непрерывной игре. Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 6. Если игра $\mathbf{A}^{(n)}$ имеет значение v_n и оптимальные стратегии $\mathbf{r}^{(n)}$ и $\mathbf{s}^{(n)}$, то последовательность v_n сходится в пределе к V и из последовательностей $F^{(n)}$ и $G^{(n)}$ можно выделить сходящиеся подпоследовательности, имеющие пределы F^* и G^*. Предел V является значением непрерывной игры A, а F^*, G^* — оптимальные стратегии для A.

Игры с выбором момента времени. Существует класс игр, которые имеют платежную функцию, разрывную на главной диагонали квадрата. Рассмотрим игру с функцией выигрыша $A(x, y)$ (обычно называемой «ядром») вида

$$A(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & \text{если } 0 \leqslant x < y \leqslant 1, \\ L(x, y), & \text{если } 1 \geqslant x > y \geqslant 0, \\ \varphi(x), & \text{если } x = y, \end{cases} \qquad (55)$$

где K и L имеют непрерывные вторые производные на интервалах $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$ соответственно, а функция φ непрерывна на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$. Разрыв функции выигрыша означает, что оптимальные стратегии могут не существовать. С другой стороны, именно разрывность позволяет во многих случаях проводить аналитические расчеты.

Пример 6. Два дуэлянта движутся навстречу друг другу, у каждого из них пистолет заряжен только одной пулей. Они начали двигаться в момент $t = 0$ и встретятся в момент $t = 1$ (если только один из них не застрелит другого). Каждый из них может выстрелить, когда пожелает. Если при этом одному из дуэлянтов удастся поразить противника, а самому остаться невредимым, то он является победителем и дуэль немедленно прекращает-

ся. Если оба промахнутся, дуэль окончится вничью. Если оба стреляют одновременно и каждый поражает противника, то дуэль также считается окончившейся вничью.

Если D_1 производит выстрел в момент x, а D_2 — в момент y (при условии $x < y$), то D_1 выиграет с вероятностью p_x и проиграет с вероятностью $(1 - p_x)\, q_y$, где p_x и q_y определяются меткостью противников (т. е. выстрел D_1 в момент x будет успешным с вероятностью p_x, а выстрел D_2 в момент y будет успешным с вероятностью q_y). Таким образом, математическое ожидание выигрыша равно $p_x - q_y + p_x q_y$. С другой стороны, если $x > y$, то математическое ожидание выигрыша будет $p_x - q_y - p_x q_y$ (обратите внимание на изменение знаков). Окончательно, если $x = y$, то математическое ожидание выигрыша равно $p_x - q_x$. Таким образом,

$$A(x, y) = \begin{cases} p_x - q_y + p_x q_y, & \text{если } x < y, \\ p_x - q_x, & \text{если } x = y, \\ p_x - q_y - p_x q_y, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Короче говоря, широкий класс таких игр имеет оптимальные стратегии следующего вида: скачок величины α в нуле, далее положительная плотность вероятности f внутри интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$ и еще один скачок величины β в единице. (Это наиболее общая форма, а в зависимости от специфики рассматриваемой игры ее стратегия может не иметь одной или двух из описанных особенностей.) Оптимальная стратегия F для D_1 имеет вид

$$F = \{\alpha I_0,\ f_c,\ \beta I_1\}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\{L(y, y) - K(y, y)\}\, f(y) - \int_a^y K_2'(x, y)\, f(x)\, dx - \int_y^1 L_2'(x, y)\, f(x)\, dx = \\ = \alpha K_2(0, y) + \beta L_2(1, y) \tag{56}$$

при всех y, $a \leqslant y \leqslant 1$. (Штрихи означают частные производные.)

Аналогично оптимальная стратегия G для D_2 будет иметь вид

$$G = \{\gamma I_0,\ g_c,\ \delta I_1\}$$

и удовлетворять уравнению

$$\{K(x, x) - L(x, x)\}\, g(x) - \int_a^x L_1'(x, y)\, g(y)\, dy - \int_x^1 K_1'(x, y)\, g(y)\, dy = \\ = \gamma L_1(x, 0) + \delta K_1(x, 1). \tag{57}$$

Кроме того, F и G должны удовлетворять обычным условиям, а именно быть стратегиями и гарантировать получение значения

игры v. Все вышесказанное порождает набор условий для α, β, γ, δ, c, v, f и g, которые можно (а иногда нельзя) легко разрешить.

Следует отметить, что не все игры с платежной функцией (ядром), вид которой обсуждался выше, имеют решения такого типа. Достаточным условием существования такого решения является следующее: $K(x, y)$ и $L(x, y)$ строго монотонно возрастают по x и строго монотонно убывают по y, $\varphi(0)$ лежит между $K(0, 0)$ и $L(0, 0)$, а $\varphi(1)$ — между $K(1, 1)$ и $L(1, 1)$. (Это условие не является, однако, необходимым.)

2.6. Многошаговые игры

В многошаговой игре оба игрока располагают полной информацией, а сама игра рассматривается на некотором заданном наборе интервалов. Отдельный интервал называется шагом игры. Важно отметить, что для решения многошаговых игр можно использовать методы динамического программирования.

Вообще говоря, многошаговую игру можно представить в виде набора «игровых элементов» (позиций) $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$, каждый из которых является матрицей размера $m_k \times n_k$: $\Gamma_k = (\alpha_{ij}^k)$, элементы которой представляют собой не просто платежи, а формируются следующим образом:

$$\alpha_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum q_{ij}^{kl} \Gamma_l, \tag{58}$$

где a_{ij}^k — платеж (выигрыш), а q_{ij}^{kl} — вероятности переходов. Таким образом, если в момент t игра находится в позиции Γ_k и игроки выбирают строку i и столбец j, то выигрыш равен a_{ij}^k плюс вероятность перехода q_{ij}^{kl} в позицию Γ_l в момент $(t+1)$. Это означает, что

$$q_{ij}^{kl} \geqslant 0, \quad \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \leqslant 1. \tag{59}$$

Игры на разорение. Простейшей является ситуация, когда игра должна закончиться после некоторого фиксированного числа ходов. В таком случае можно проранжировать игровые элементы в соответствии с максимальным числом оставшихся ходов, и очевидно, что переход возможен только к игровым элементам более низкого ранга, т. е. $q_{ij}^{kl} > 0$, если ранг Γ_l ниже ранга Γ_k.

Пример 7. *Женщины и кошки против мышей и мужчин.* В этой фантастической игре команда 1 состоит из m_1 женщин и m_2 кошек, команда 2 — из n_1 мышей и n_2 мужчин. На каждом шаге команды назначают своих представителей, которые вступают в «единоборство» с противником. В результате один из них выходит из игры по следующему правилу: женщина выводит из игры мужчину, мужчина — кошку, кошка — мышь, а мышь — женщину.

Игра может быть представлена элементами $\Gamma(m_1, m_2; n_1, n_2)$, где m_1, m_2, n_1, n_2 — положительные целые числа. Тогда

$$\Gamma(m_1, m_2; n_1, n_2) = \begin{pmatrix} \Gamma(m_1-1, m_2; n_1, n_2) & \Gamma(m_1, m_2; n_1, n_2-1) \\ \Gamma(m_1, m_2; n_1-1, n_2) & \Gamma(m_1, m_2-1; n_1, n_2) \end{pmatrix}.$$

Игра прекращается, как только одна из четырех компонент (m_1, m_2, n_1, n_2) обращается в нуль; при этом соответствующая команда проигрывает. Поскольку на каждом шаге устраняется только один игрок, то игра закончится по крайней мере через $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 - 3$ шагов, где m_1, m_2, n_1, n_2 — исходный состав команд.

В данном случае можно определить

$$v_k = \mathrm{val}\,(\mathbf{B}^k), \tag{60}$$

где $\mathbf{B}^k = (b_{ij}^k)$ — матрица с элементами

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l. \tag{61}$$

Вектор значений игры $(v_1, \ldots, v_p)$ определяется по индукции относительно ранжированных элементов Γ_k. Оптимальные стратегии для игровых элементов Γ_k будут точно совпадать с оптимальными стратегиями матричной игры $\mathbf{B}^k$.

Стохастические игры. Эти игры характеризуются условием

$$\sum_{i=1}^{p} q_{ij}^{kl} < 1, \tag{62}$$

которое означает, что на каждом шаге существует положительная вероятность остановки. Данное условие гарантирует, что независимо от выбранной стратегии вероятность того, что через n шагов игра будет продолжаться, не больше s^n (где $s < 1$ — заранее заданная величина). Вследствие этого выигрыш всегда имеет конечное математическое ожидание.

Пример 8. Два азартных игрока играют в соответствии со следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Игроки имеют общий капитал в 10 единиц и договорились остановиться, как только один из них выиграет все. После каждого хода подбрасывается правильная монета. Если выпадает орел, игра прекращается, даже если ни один из игроков не выиграл весь капитал.

Пусть Γ_k $(1 \leqslant k \leqslant 9)$ — игровой элемент, который реализуется, когда G_1 имеет k единиц. Тогда можно записать

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2}\Gamma_{k-1} & 1 + \frac{1}{2}\Gamma_{k+1} \\ 1 + \frac{1}{2}\Gamma_{k+1} & -1 + \frac{1}{2}\Gamma_{k-1} \end{pmatrix},$$

понимая под Γ_0 и Γ_{10} состояния остановки (окончание игры).

Вектор значений $\mathbf{V} = (v_1, \ldots, v_p)$ должен опять удовлетворять формулам (60) — (61). По существу, можно определить этот вектор как неподвижную точку преобразования:

$$T(w_1, \ldots, w_p) = (w_1', \ldots, w_p'), \tag{63}$$

$$\text{где } w_k' = \operatorname{val}[\mathbf{B}^k(\mathbf{w})], \tag{64}$$

$$\mathbf{B}^k(\mathbf{w}) = \left(a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} w_l\right). \tag{65}$$

Можно показать, что данное отображение сходится по норме l_∞. Таким образом, отображение будет иметь единственную неподвижную точку, которая может быть получена методом последовательных приближений, т. е. искомая точка будет пределом некоторой последовательности $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$, $\mathbf{w}''$, ..., где

$$\mathbf{w}^{(n+1)} = T(\mathbf{w}^{(n)}). \tag{66}$$

Рекурсивные игры отличаются от стохастических тем, что вероятность окончания игры (на фиксированном шаге) может быть равна нулю. Таким образом, в зависимости от выбранной стратегии существует положительная вероятность того, что партия будет продолжаться бесконечно. Поэтому выигрыш a_∞ определяется и для случая бесконечной партии (выигрыш выживания).

Вообще говоря, уравнения (60) — (61) для значений игры будут иметь неединственное решение. Поэтому среди них необходимо выбрать какое-то одно, фактически достижимое значение; в некотором смысле «ближайшее» к a_∞.

Пример 9. Военный отряд окружен в крепости. Командир хочет вывести отряд к своим; из крепости ведут две дороги: на запад и восток, по каждой из которых можно достичь расположения своих войск. Каждую ночь можно попытаться уйти незамеченным по одной из этих дорог.

Противник в свою очередь может устроить засаду на одной из дорог. Если окруженные попытаются выбраться по охраняемой дороге, то отряд целиком попадет в плен. Если же окажется, что противник стережет другую дорогу, то отряд достигнет расположения своих войск (будем называть такую попытку успешной).

И наконец, командир может отдать приказ остаться на данную ночь в крепости; в таком случае игра повторяется. Игру можно

представить в следующем виде:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \\ \Gamma & \Gamma \end{pmatrix},$$

где 1 — выигрыш за успешный прорыв и —1 — проигрыш за попадание в плен. Для таких игр, очевидно, необходимо знать a_∞ (выигрыш в бесконечной партии), чтобы определить оптимальные стратегии. Если $a_\infty > 0$ (т. е. если можно чего-то достичь, оставаясь в крепости), то командир должен выбрать строку 3. Если же $a_\infty < 0$, то он должен выбрать строки 1 и 2, каждую с вероятностью $\frac{1}{2}$.

2.7. Дифференциальные игры

Дифференциальные игры являются фактически многошаговыми играми с непрерывным временем. Переход от состояния к состоянию описывается дифференциальными уравнениями. Обычно предполагается, что два игрока вместе управляют движением некоторой точки в n-мерном пространстве. Таким образом, если точка имеет в момент t координаты $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то уравнение движения записывается в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}, \varphi, \psi), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{67}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_q)$ — векторы управления, которые выбираются игроками I и II соответственно. Векторы управления в общем случае можно выбирать с учетом ограничений

$$a_k \leqslant \varphi_k \leqslant b_k, \quad k = 1, \ldots, p, \tag{68}$$

$$c_l \leqslant \psi_l \leqslant d_l, \quad l = 1, \ldots, q. \tag{69}$$

Игра прекращается, когда вектор (точка!) x достигает некоторой заранее заданной поверхности (терминальной поверхности). Обычно рассматривают два типа выигрышей: *интегральный выигрыш*, равный интегралу

$$\int_0^T K(\mathbf{x}, \varphi, \psi)\, dt$$

от некоторой функции K, взятому от момента начала игры ($t = 0$) до момента окончания игры ($t = T$), и *терминальный выигрыш*, задаваемый некоторой функцией G, определенной на терминальной поверхности C. В более общем случае полный выигрыш может быть выражен в виде их суммы.

Пример 10. Преследователь II пытается догнать и схватить убегающего I, причем он старается сделать это как можно быстрее. Оба игрока движутся внутри некоторой области. Будем предполагать, что скорость игроков зависит от их положения (координат) в данной области. В любой момент времени каждый из игроков управляет направлением своего движения (т. е. задает направление вектора скорости). Пусть (x_1, x_2) и (x_3, x_4) — координаты игроков на плоскости; тогда имеем

$$\frac{dx_1}{dt} = u(x_1, x_2)\cos\varphi, \qquad \frac{dx_2}{dt} = u(x_1, x_2)\sin\varphi.$$

$$\frac{dx_3}{dt} = w(x_3, x_4)\cos\psi, \qquad \frac{dx_4}{dt} = w(x_3, x_4)\sin\psi,$$

где $u(x_1, x_2)$ и $w(x_3, x_4)$ — функции скорости обоих игроков. Игра закончится, когда игроки сблизятся настолько, что можно произвести захват. Это произойдет, как только будет выполнено неравенство

$$(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 \leqslant \rho^2;$$

здесь ρ — расстояние, где преследователь настигает убегающего. Функцией выигрыша является время до этого момента (естественно, что игрок I хочет его максимизировать). Выигрыш можно выразить как интеграл от функции $K = 1$.

Если скорость преследуемого u везде равна нулю, задача сводится к задаче оптимального быстродействия: перевести некий объект из точки с координатами (x_3, x_4) в точку с координатами (x_1, x_2) за минимальное время. Вообще, задачи управления можно рассматривать как дифференциальные игры, в которых один из игроков бездействует.

Вернемся к исходной игре. Стратегией игрока I является правило, в соответствии с которым выбирается вектор управления $\boldsymbol{\varphi}$ как функция $\mathbf{x}$. Аналогично стратегией игрока II будет правило выбора $\boldsymbol{\psi}$ в зависимости от $\mathbf{x}$.

Значение игры, если оно существует, будет зависеть от $\mathbf{x}_0$ — начального состояния игры. Можно определить $P(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$ — полный выигрыш для игры, которая началась из состояния $\mathbf{x}_0$, а игроки использовали стратегии $\boldsymbol{\varphi} = \varphi(\mathbf{x})$ и $\boldsymbol{\psi} = \psi(\mathbf{x})$ соответственно.

Определим

$$V_{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = \max_{\varphi} \min_{\psi} P(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi}; \boldsymbol{\psi}), \tag{70}$$

$$V_{\mathrm{II}}(\mathbf{x}) = \min_{\psi} \max_{\varphi} P(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi}; \boldsymbol{\psi}). \tag{71}$$

Две введенные функции V_{I} и V_{II} могут быть равны, а могут и не равняться друг другу. Если имеет место равенство $V_{\mathrm{I}} =$

$= V_{II} = V$, то будем говорить, что V — функция значений дифференциальной игры.

Достаточное (но не необходимое) условие существования функции значений $V(\mathbf{x})$ состоит в том, что функция выигрыша K и функции управления f_i являются сепарабельными по управлениям игроков, т. е.

$$K(\mathbf{x};\ \varphi;\ \psi) = K'(\mathbf{x};\ \varphi) + K''(\mathbf{x};\ \varphi), \tag{72}$$

$$f_i(\mathbf{x};\ \varphi,\ \psi) = f_i'(\mathbf{x};\ \varphi) + f_i''(\mathbf{x};\ \psi). \tag{73}$$

Предположим, что функция значений V существует. Тогда стратегии, при которых получаются эти значения V, будем называть оптимальными стратегиями. Оптимальные стратегии $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ и функция значений удовлетворяют уравнению

$$K(\mathbf{x};\ \hat{\varphi}(\mathbf{x});\ \hat{\psi}(\mathbf{x})) + \sum_{i=1}^{n} V_i(\mathbf{x}) = 0, \tag{74}$$

$$\text{где } V_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{75}$$

Уравнение (74) известно как *основное уравнение.*

В общем случае в оптимальной игре точка движется вдоль траектории, которая является по крайней мере кусочно-гладкой. Такая траектория будет удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = f_i(\hat{\mathbf{x}};\ \hat{\varphi}(\mathbf{x});\ \hat{\psi}(\mathbf{x})),\\ &\frac{dV_i}{dt} = -K_j(\mathbf{x};\ \hat{\varphi}(\mathbf{x});\ \hat{\psi}(\mathbf{x})) - \sum_{i=1}^{n} V_i(\mathbf{x})\, f_{ij}(\mathbf{x};\ \hat{\varphi}(x);\ \hat{\psi}(x)) \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

$$\text{где } K_j = \partial K/\partial x_j, \quad f_{ij} = \partial f_i/\partial x_j.$$

Эти уравнения известны как *уравнения траекторий.*

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений (76), воспользуемся тем обстоятельством, что каждая траектория должна оканчиваться на поверхности C. Предположим, что координаты точки $(x_1, \ldots, x_n)$ на поверхности C известны. Более того, функция значений V будет совпадать на поверхности C с терминальной функцией платежа G. Последнее обстоятельство позволяет вычислить частные производные V_j на C. Фактически, если функция C параметризована с помощью $(n-1)$ параметра $(s_1, \ldots, s_{n-1})$, то имеем

$$\frac{\partial G}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{n} V_j \frac{\partial x_j}{\partial s_i}, \tag{77}$$

что дает систему из $(n-1)$ уравнения для определения $V_1, \ldots, V_n$. С учетом основного уравнения (74) получаем систему n уравнений, которая может быть разрешима относительно $V_1, \ldots, V_n$ в некоторой точке на поверхности C.

Таким образом, система дифференциальных уравнений (76) определяет набор терминальных условий (т. е. значения x_i и V_j в момент остановки T). Иногда удобнее заменить время t на обратное время $\tau = T - t$, так как в этом случае терминальные условия становятся *начальными условиями* (т. е. условия выполняются при $\tau = 0$).

Если существует функция значения $V(\mathbf{x})$, то, вообще говоря, приведенные уравнения будут справедливы, *за исключением некоторых поверхностей меньшей размерности* (сингулярных поверхностей). Различают несколько типов сингулярных поверхностей:

а) *поверхность переключения*, на которой функция оптимального управления терпит разрыв, порождая тем самым негладкую траекторию;

б) *универсальная поверхность*, которая характеризуется слиянием оптимальных траекторий;

в) *эквивокальная (двусмысленная) поверхность*, из каждой точки которой исходит более одной траектории, что обычно приводит к (мгновенной) рандомизации;

г) *барьерная поверхность*, которая соответствует точкам разрыва функции; в некоторых играх преследования такие поверхности используются для разделения пространства на зону захвата (где преследователь может совершить захват) и зону безопасности (где преследуемый не может быть пойман за конечное время).

Дифференциальные игры качества. В игре качества различается только конечное число допустимых исходов (например, «победа» и «поражение») в противоположность играм степени, в которых имеется континуум допустимых значений. Один возможный прием решения игр качества состоит в сведении их к играм степени, а именно если различаются только исходы «выиграл» и «проиграл», то их заменяют терминальным функционалом G, который принимает положительное значение для каждого победного исхода и отрицательное — для любого поражения. Другой прием заключается в определении *барьера*, который отделяет *зону выигрыша* (часть пространства, где игрок I побеждает игрока II) от зоны проигрыша (часть пространства, где игрок II побеждает игрока I). При этом обычно рассматривается вектор-нормаль к данной поверхности (барьеру): $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Фактически вектор $\mathbf{v}$ ведет себя как градиент $\nabla \mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ в играх степени, т. е. он будет удовлетворять той же системе дифференциальных уравнений.

3. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НЕНУЛЕВОЙ СУММОЙ

3.1. Введение

В играх двух лиц с ненулевой суммой есть одна существенная отличительная особенность: то, что хорошо для одного игрока, не обязательно плохо для другого. Следовательно, интересы игроков не являются полностью противоположными, и они могут извлечь выгоду из сообщения о своей стратегии. Будем различать два варианта таких игр: а) некооперативные (бескоалиционные) игры, когда запрещены любые соглашения, обмен информацией, побочные платежи и совместный выбор стратегий, и б) кооперативные игры, в которых разрешается любой вид кооперации.

3.2. Некооперативные игры

В некооперативных играх даны две функции выигрыша $A(\sigma, \tau)$ и $B(\sigma, \tau)$, определенные для всех пар стратегий (σ, τ) и соответствующие выигрышам игроков I и II. Если множества стратегий конечные, то A и B можно представить в виде матриц $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$. Игра в такой форме называется биматричной игрой.

В большинстве работ основное внимание уделяется вопросу существования равновесных пар в таких играх. В общем случае равновесных пар чистых стратегий может и не существовать. Однако доказано, что в *любой биматричной игре существует по крайней мере одна равновесная пара смешанных стратегий.*

К сожалению, для игр с ненулевой суммой равновесные пары не полностью удовлетворяют понятию «решение игры». Рассмотрим два примера, которые помогут продемонстрировать соответствующие трудности.

Пример 11. Фирма C_1 может выпускать два сорта кофе: дешевый и дорогой. Вторая фирма C_2 может выпускать два типа кофейников: дорогие и дешевые. Дорогой кофе можно сварить в любом кофейнике, а дешевый кофе можно приготовить только в дорогом кофейнике.

Если одна фирма производит дорогой продукт, а другая — дешевый, то существуют соизмеримые объемы продажных товаров, при которых фирма, выпускающая дорогой продукт, получит бо́льшую прибыль, а другая фирма будет иметь некоторую разумную прибыль. Если же обе фирмы начнут выпускать дорогую продукцию, то объемы продажных товаров будут малы и ни одна из фирм не получит никакой прибыли. Если же обе фирмы произведут дешевую продукцию, то они ничего не продадут и не получат прибыли.

Рассматриваемую игру можно представить с помощью двух матриц:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \sigma \\ \sigma' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \tau & \tau' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ \sigma \\ \sigma' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \tau & \tau' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Легко видеть, что при данной игре равновесными парами будут пары (σ, τ) и (σ', τ'). Тем не менее пары (σ, τ') и (σ', τ) не равновесные, и, более того, выигрыши в равновесных точках различны. Таким образом, предварительное соглашение было бы полезно в данной игре, но оно запрещено правилами.

Пример 12. (Дилемма заключенного.) Два преступника ожидают приговора суда за совершенное злодеяние. Адвокат конфиденциально предлагает каждому из преступников облегчить его участь (и даже освободить!), если он сознается и даст показания против сообщника. Если никто не сознается, то обоим угрожает заключение на определенный срок по сфабрикованному обвинению в незначительном преступлении. Каждый заключенный имеет на выбор две стратегии: не сознаваться (σ и τ) или сознаваться (σ' и τ'), выдав при этом сообщника. Если разумно назначить полезность, то можно получить следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \sigma \\ \sigma' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \tau & \tau' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ \sigma \\ \sigma' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \tau & \tau' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Легко видеть, что (σ', τ') — единственная равновесная пара. К сожалению, если оба игрока сыграют неправильно, то их неравновесные стратегии (σ, τ) дадут им больший выигрыш.

3.3. Кооперативные игры

В основе кооперативных игр лежит предпосылка, согласно которой оба игрока могут в целом достичь большего, если будут действовать сообща; в этом и состоит ценность кооперации. Такая кооперация, естественно, должна оплачиваться, что приводит к различным сделкам, или так называемым побочным платежам.

В простейшем случае предполагается, что два игрока не могут воздействовать друг на друга, пока не придут к некоторому соглашению. Таким образом, игра определяется посредством подмножества S в евклидовом пространстве, представляющего (общие) выигрыши, которые оба игрока могут получить в случае кооперации; кроме того, заданы два числа u_0, v_0, определяющие величину выигрыша каждого из игроков без кооперации между ними. Обычно предполагают, что подмножество S является замкнутым, выпуклым и ограниченным сверху [в том смысле, что для любых

(a, b) множество всех $(u, v) \in S$ с $u \geqslant a$, $v \geqslant b$ ограничено]. В таком случае, основываясь на разумной системе аксиом (аксиомах Нэша), можно прийти к выводу, что игроки «должны» согласиться получить выигрыш, соответствующий точке $(u, v) \in S$, в которой достигается максимальное значение произведения

$$(u - u_0)(v - v_0) \tag{78}$$

при ограничениях $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$. Такая точка (u^*, v^*) известна как точка Нэша; можно показать, что она единственна.

Пример 13. Два человека, работая вместе, могут получить q единиц некоторого товара. Необходимо определить, как они разделят между собой полученный товар.

Предположим, что для каждого человека определены функции U и V; x единиц имеют полезность $U(x)$ для первого человека и $V(x)$ для второго. Тогда если первый получит x единиц, а второй $(q - x)$, то полезности окажутся равными $U(x)$ и $V(q - x)$ соответственно. Таким образом, при кооперации они могут получить любую точку на кривой

$$u = U(x), \quad v = V(q - x), \quad 0 \leqslant x \leqslant q.$$

Без кооперации они не получат товара совсем, и полезности соответственно будут $U(0)$ и $V(0)$. И наконец, любая точка выпуклой оболочки $(U(0), V(0))$ и кривой может быть получена путем рандомизации. Таким образом, множество S будет выпуклой оболочкой $(U(0), V(0))$ и кривой.

В более общем случае каждый из игроков может воздействовать на другого, даже если соглашение между ними не достигнуто. В таком случае игра будет иметь более сложную структуру, определяемую множеством S, аналогичным введенному выше, и двумя функциями платежей $A(\sigma, \tau)$ и $B(\sigma, \tau)$, которые характеризуют выигрыши игроков, если они не могут достичь соглашения (здесь σ и τ — стратегии двух игроков). Идея состоит в том, что стратегии σ и τ выбираются и используются как *угроза*, которая осуществляется только в том случае, если соглашение не достигнуто. Тогда может быть заключена сделка, если каждый из игроков знает угрозу другого.

Последнее обстоятельство приводит к тому, что исход сделки будет в какой-то степени зависеть от угроз. Предполагается, что если сделаны угрозы σ и τ, то исходом сделки должна быть точка (u^*, v^*), в которой достигает максимума произведение

$$(u - A(\sigma, \tau))(v - B(\sigma, \tau)) \tag{79}$$

при ограничениях

$$(u, v) \in S, \quad u \geqslant A(\sigma, \tau), \quad v \geqslant B(\sigma, \tau).$$

Тогда точка (u^*, v^*) логически получается в результате применения пары угроз (σ, τ). При этом появляется возможность определить равновесную пару (σ, τ) не через выигрыши (с угрозой!) $A(\sigma, \tau)$, $B(\sigma, \tau)$, а скорее через логические исходы (u^*, v^*). Относительно введенных понятий можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. Если множества стратегий обоих игроков конечны, то существует по крайней мере одна равновесная пара смешанных стратегий угроз, которая известна также как оптимальная стратегия угроз.

Теорема 7 гарантирует существование значений (u^*, v^*) и оптимальных угроз для конечных игр. Конечно, вычислить их весьма сложно, поскольку они зависят от обеих платежных матриц **A**, **B** и от множества S.

Правило нахождения оптимальных угроз состоит в следующем. Если $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ — смешанные стратегии угроз, а точка $(u^*, v^*) \in S$, то достаточным условием того, что $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ — оптимальные стратегии угроз, а (u^*, v^*) — значение игры, является следующее: для некоторого m и оптимальных стратегий $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ для матричной игры $m\mathbf{A} - \mathbf{B}$ линия, проходящая через точку (u^*, v^*) с наклоном m, проходит через $(\mathbf{x}^{*l}\,\mathbf{A}\mathbf{y}^*, \mathbf{x}^{*l}\,\mathbf{B}\mathbf{y}^*)$, а линия, проходящая через точку (u^*, v^*) с наклоном $-m$, лежит выше и правее множества S.

4. ИГРЫ n ЛИЦ

4.1. Определения

В играх n лиц, так же как и в играх двух лиц с ненулевой суммой, различают кооперативные игры и игры без кооперации. Однако если кооперация запрещена, то игра n лиц и случай двух участников очень похожи друг на друга.

В кооперативных играх n лиц главное — это формирование коалиций, а не поиск стратегий в самой игре. В результате такие игры обычно изучают в форме *характеристической функции*.

По существу, характеристическая функция указывает, какую полезность члены коалиции могут себе гарантировать (если коалиция сформирована). При этом предполагается, что полученную полезность можно поделить между членами коалиции любым желаемым способом. (Это так называемое условие *побочных платежей*.)

Обозначим через $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ множество игроков в игре n лиц. Тогда *характеристической функцией* называется функция v, которая каждому подмножеству $S \in N$ ставит в соответствие дей-

ствительное число $v(S)$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$v(\varnothing) = 0, \tag{80}$$

$$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T), \quad \text{или} \quad S \cap T \neq \varnothing. \tag{81}$$

Второе условие, известное как *супераддитивность* функции, иногда заменяют более слабым:

$$v(S \cup \{i\}) \geqslant v(S) + v(\{i\}), \qquad \text{если} \qquad i \notin S. \tag{82}$$

Обычно игру отождествляют с функцией v.

Элементы множества N — это *игроки*, а непустые подмножества из N называются *коалициями*.

Дележом для игры n лиц с характеристической функцией v называется вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, удовлетворяющий условиям

$$x_i \geqslant v(\{i\}) \text{ при всех } i \in N, \tag{83}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N). \tag{84}$$

Из определения характеристической функции следует, что

$$v(N) \geqslant \sum_{i \in N} v(\{i\}). \tag{85}$$

Если в формуле (85) имеет место равенство, то игра имеет только один дележ, и такую игру будем называть *несущественной* (т. е. формирование коалиций в ней не имеет значения). Если же в формуле (85) сохраняется неравенство, то игра называется *существенной* и в ней существует бесконечное количество дележей (фактически они образуют симплекс в n-мерном пространстве).

S-эквивалентная нормализация. Две игры u и v называются S-эквивалентными, если существуют строго положительное число $\alpha > 0$ и вектор $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, такие, что для любого $S \subset N$ справедливо равенство

$$u(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i. \tag{86}$$

Все свойства допустимого решения сохраняются при S-эквивалентности. Таким образом, достаточно изучить по одной игре для каждого S-эквивалентного класса.

Нормализация. Игра v нормализована в форме (0,1), если

$$v(\{i\}) = 0 \quad \text{при всех} \quad i \in N, \tag{87}$$

$$v(N) = 1. \tag{88}$$

Любая существенная игра S-эквивалентна одной (и только одной) игре в нормализованной (редуцированной) форме (0, 1). В дальнейшем будем часто рассматривать только случай (0, 1) нормализованных игр.

Пример 14. Игра «покупка лошади». Владелец лошади (P_1) оценивает ее в 50 долл. Два покупателя (P_2 и P_3) оценивают лошадь соответственно в 100 и 90 долл. Если принять, что полезность объекта игры соответствует его цене, то очевидно, что первый игрок (самостоятельно) имеет полезность, равную 50 единицам, тогда как двое других не имеют ничего. Однако полезность может возрасти в результате сделки между игроками. Предположим, что такая коалиция между игроками (в целях сделки) может быть разрешена и игрок P_1 может продать лошадь одному из покупателей. Таким образом, игроки P_1 и P_2 могут получить всего 100 единиц, а P_1 и P_3 — 90 единиц. Тогда имеем

$$V(\{1\}) = 50,$$
$$V(\{2\}) = V(\{3\}) = V(\{2, 3\}) = 0,$$
$$V(\{1, 3\}) = 90,$$
$$V(\{1, 2\}) = V(\{1, 2, 3\}) = 100.$$

Дележи для рассматриваемой игры будут состоять из всех векторов (x_1, x_2, x_3), таких, что

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100,$$
$$x_1 \geqslant 50; \quad x_2 \geqslant 0; \quad x_3 \geqslant 0.$$

При нормализации (0, 1) данная игра будет иметь вид

$$U(\{i\}) = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, 3,$$
$$U(\{2, 3\}) = 0,$$
$$U(\{1, 3\}) = 0{,}8,$$
$$U(\{1, 2\}) = U(\{1, 2, 3\}) = 1.$$

Тогда дележами являются все векторы (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющие условию

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_i \geqslant 0.$$

Пример 15. (Игра с голосованием пяти участников.) Рассмотрим игру с голосованием, в которой участвуют пять человек. Пусть игрок P_1 (сильный игрок) имеет три голоса, а все остальные имеют по одному голосу. Для победы необходимо 4 голоса из имеющихся 7. Характеристическая функция $v(S) = 1$, если S содержит по крайней мере 4 голоса, и $v(S) = 0$ в противном случае. Тогда

$$v(\{i\}) = 0 \quad \text{при всех } i,$$
$$v(S) = 0, \quad \text{если } |S| = 2 \text{ или } 3, \text{ а } 1 \notin S,$$
$$v(S) = 1, \quad \text{если } |S| = 2 \text{ или } 3, \text{ а } 1 \in S,$$
$$v(S) = 1, \quad \text{если } |S| = 4 \text{ или } 5.$$

Данная игра уже нормализована в (0, 1). Дележами будут все векторы $(x_1, \ldots, x_5)$, удовлетворяющие условиям

$$x_1 + \ldots + x_5 = 1, \quad x_i \geqslant 0.$$

4.2. Доминирование, ядро, устойчивые множества

Пусть задана игра v. Будем говорить, что дележ $\mathbf{x}$ *доминирует* другой дележ $\mathbf{y}$ (обозначается как $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$), если существует непустое $S \subset N$, такое, что

$$x_i > y_i \text{ при всех } i \in S, \tag{89}$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leqslant v(S). \tag{90}$$

Ядром игры называется множество всех *недоминируемых* дележей. (К сожалению, широкий класс игр имеет пустое ядро.)

Устойчивым множеством (которое иногда называют решением фон Неймана — Моргенштерна) называется множество дележей V, такое, что

а) из $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ не может иметь места;

б) если $\mathbf{z}$ является дележом, но $z \notin V$, то существует $\mathbf{x} \in V$, такой, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$.

Следует отметить, что, хотя большинство игр имеет много устойчивых множеств, существуют игры, у которых нет устойчивых множеств.

В общем случае ядро является подмножеством каждого устойчивого множества. Если же ядро само устойчиво, то оно представляет собой *единственное* устойчивое множество.

Пример 16. В игре «покупка лошади» (пример 14) ядро состоит из всех дележей $(x_1, x_2, 0)$, таких, что $90 \leqslant x_1 \leqslant 100$; $x_1 + x_2 = 100$. Таким образом, покупатель P_2 покупает лошадь, уплатив по крайней мере 90 долл.

В данной игре ядро не является устойчивым множеством. Типичное устойчивое множество для данной игры состоит из ядра и «кривой сделок». Эта кривая включает дележи, соответствующие возможности формирования коалиции двух покупателей. Покупатели могут образовать коалицию, чтобы понизить цену лошади.

Пример 17. В игре голосования пяти участников, рассмотренной ранее, ядро пустое, но существует много устойчивых множеств. Одно из устойчивых множеств состоит из пяти дележей:

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0\right)$$

$$\left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0\right)$$

$$\left(\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0\right)$$

$$\left(\frac{3}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Кроме того, существуют четыре так называемых дискриминирующих решения, при которых игрок P_1 и один из других участников делят единицу всеми возможными способами; при одном из дискриминирующих решений игроки P_2, P_3, P_4 и P_5 делят одну единицу во всевозможных пропорциях. Существует слишком много дискриминирующих решений, чтобы перечислять их все.

4.3. Значение игры по Шепли

Значением игры по Шепли является *априорное* математическое ожидание выигрыша, который игрок предполагает получить, участвуя в игре. Значение игры по Шепли вводится аксиоматически как отображение множества игр n лиц на множество n-мерных векторов (платежей), которое имеет следующие свойства: симметрия (если игра симметрична, ее значение должно быть симметрично); эффективность (множество всех игроков, которые делают вклады для участия в игре, полностью отображается во множество платежей, получаемых игроками); аддитивность (значение суммы двух игр равно сумме их значений). Можно показать, что только одно значение игры удовлетворяет аксиомам Шепли, а именно вектор $\varphi[v] = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, задаваемый следующей формулой:

$$\varphi_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(n-s-1)!\, s!}{n!} [v(S \cup \{i\} - v(S)], \tag{91}$$

где s и n — числа игроков в S и N соответственно.

Пример 18. В упоминавшейся игре о покупке лошади значение игры по Шепли равно (81,7; 11,7; 6,7).

Пример 19. В игре «голосование для пяти участников» значение по Шепли будет: (0,6; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1).

Для больших игр вычислить значение игры, задаваемое формулой (91), может оказаться трудным, даже если игра имеет хорошую структуру (например, игры со взвешенным голосованием). В таких случаях можно использовать альтернативную формулу

$$\varphi_i[v] = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, t, \ldots, t)\, dt, \text{ где} \tag{92}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \subseteq N} \left\{ \prod_{j \in S} x_j \prod_{j \notin S} (1 - x_j) \right\} v(S). \tag{93}$$

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ известна как *мультилинейное расширение* v; ее обычно можно аппроксимировать путем использования предельных теорем теории вероятностей.

4.4. Множества сделок

Множество сделок представляет собой еще один подход к построению устойчивых множеств. По существу, при таком подходе предполагается, что коалиции сформированы, после чего рассматриваются векторы выигрышей, которые будут устойчивыми в особом смысле, а именно: ни одному игроку нельзя пригрозить так, чтобы в результате уменьшить его долю выигрыша.

Коалиционной структурой в игре n лиц называется разбиение $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$ множества игроков N, т. е. коалиционная структура представляет собой разбиение множества N на взаимно непересекающиеся подмножества, объединение которых дает N.

Индивидуально-рациональной конфигурацией выигрыша называется пара $\langle \mathcal{T}, x \rangle$, где $\mathcal{T}$ — коалиционная структура, а $\mathbf{x} = (x_1 x_2, \ldots, x_n)$ — вектор, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{i \in T_j} x_i = v(T_j) \quad \text{при всех } T_j \in \mathcal{T}, \tag{94}$$

$$x_i \geqslant v(\{i\}) \quad \text{при всех} \quad i \in N. \tag{95}$$

Наконец, если $\mathcal{T}$ — коалиционная структура и $i \in N$, то партнерами игрока i в $\mathcal{T}$ является множество игроков T_j, такое, что $i \in T_j \in \mathcal{T}$. Запишем это в виде $P(i, \mathcal{T})$.

Пусть $\langle \mathcal{T}, x \rangle$ — индивидуально-рациональная конфигурация и k, l являются партнерами в $\mathcal{T}$. Тогда угрозой игрока k против l называется другая индивидуально-рациональная конфигурация $\langle \mathcal{U}, \mathbf{y} \rangle$, такая, что

а) если $i \in P(k, \mathcal{U})$, то $y_i > x_i$,

б) $l \notin P(k, \mathcal{U})$.

Контругрозой l против k называется некоторая третья индивидуально-рациональная конфигурация $\langle \mathcal{V}, \mathbf{z} \rangle$, такая, что

а) если $i \in P(l, \mathcal{V})$, то $z_i \geqslant x_i$,

б) если $i \in P(l, \mathcal{V}) \cap P(k, \mathcal{U})$, то $z_i \geqslant y_i$,

в) $k \notin P(l, \mathcal{V})$.

Индивидуально-рациональная конфигурация выигрыша, при которой для любой угрозы k против l у игрока l имеется контругроза против k, называется *устойчивой*.

Множеством сделок $\mathcal{M}_1^{(i)}$ называется множество всех устойчивых индивидуально-рациональных конфигураций выигрыша. Это множество не пусто в строгом смысле, т. е. для любого $\mathcal{T}$ существует по крайней мере один x, такой, что $\langle \mathcal{T}, \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{M}_1^{(i)}$.

Различные множества сделок можно получить, изменяя виды угроз, т. е. можно рассматривать угрозы одной группы игроков против некоторой другой группы или угрозы отдельного игрока против некоторого игрока, который не является его партнером по коалиции.

С понятием «множество сделок» тесно связано понятие *c-ядра*. Предварительно введем еще ряд понятий. Для некоторой коалиции S и некоторого вектора выигрышей $\mathbf{x}$ *эксцессом* коалиции S при векторе $\mathbf{x}$ будем называть величину

$$e(S, \mathbf{x}) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i. \tag{96}$$

Тогда излишком, или *максимальным эксцессом*, k *против* l называется величина

$$s_{kl}(\mathbf{x}) = \max_{\substack{T \\ k \in T \\ l \notin T}} e(T, \mathbf{x}). \tag{97}$$

Будем говорить, что игрок k «перевешивает» игрока l ($k \succ\succ l$), если

$$s_{kl}(\mathbf{x}) > s_{lk}(\mathbf{x}), \tag{98}$$

$$x_l > v(\{l\}). \tag{99}$$

Говорят, что два игрока k и l находятся в равновесии ($k \sim l$), если ни один из них не перевешивает другого (т. е. не имеет места ни $k \succ\succ l$, ни $l \succ\succ k$).

Сердцевиной ядра (*c*-ядром) называется множество всех таких индивидуально-рациональных конфигураций, что два любых игрока k и l, принадлежащие одной и той же коалиции $T_j \in \mathscr{T}$, находятся в равновесии.

Как и раньше, *c*-ядро является непустым множеством в том смысле, что для любого $\mathscr{T}$ существует некоторый x, такой, что $\langle \mathscr{T}, \mathbf{x} \rangle \in \mathscr{K}$. Более того, $\mathscr{K} \subset \mathscr{M}_1^{(i)}$.

Нуклонная цепь представляет собой дальнейшее расширение набора понятий, связанных с *c*-ядром. Введем в рассмотрение вектор

$$\Theta(\mathbf{x}) = (e(S_1, \mathbf{x})\, e(S_2, \mathbf{x}), \ldots, e(S_{2n}, \mathbf{x})), \tag{100}$$

где $e(S_j, \mathbf{x})$ — эксцесс S_j, а $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ — подмножества множества N, упорядоченные по убыванию эксцессов:

$$e(S_1, \mathbf{x}) \geqslant e(S_2, \mathbf{x}) \geqslant \ldots \geqslant e(S_{2n}, \mathbf{x}). \tag{101}$$

Теперь упорядочим множество $\Theta(\mathbf{x})$ лексикографически. Можно доказать, что на множестве дележей существует *единственный* дележ $\mathbf{v}$, для которого $\Theta(\mathbf{x})$ является минимальным при лексикографическом упорядочении. Этот дележ $\mathbf{v}$ назовем *нуклонной цепью*.

Если $\mathcal{T} = \{N\}$ представляет собой коалиционную структуру, состоящую только из одной главной коалиции, то индивидуально-рациональная коалиция $\langle \mathcal{T}, v \rangle$ принадлежит c-ядру.

Пример 20. Предположим, что в игре «покупка лошади», упоминавшейся выше, сформирована следующая коалиционная структура $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Тогда множество сделок будет содержать все векторы $(x_1, x_2, 0)$, такие, что $90 \leqslant x_1 \leqslant 100$; $x_1 + x_2 = 100$. Следовательно, данное множество совпадает с ядром. Однако сердцевина ядра содержит только вектор (95, 5, 0). Более того, (95, 5, 0) представляет собой нуклонную цепь.

Пример 21. В игре с голосованием пяти участников предположим, что сформирована структура $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$. Тогда множество сделок состоит из векторов $(x_1, x_2, 0, 0, 0)$, где $0{,}5 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}75$; $x_1 + x_2 = 1$. C-ядро, однако, составляет только вектор (0,5; 0,5; 0; 0; 0).

Нуклонной цепью является вектор $\left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

В общем случае очень сложно вычислить все элементы c-ядра или множество сделок. Существующие методы позволяют определить по крайней мере один элемент.

Функцией требований называется множество из n^2 функций d_{ij}, полунепрерывных снизу $(i, j = 1, \ldots, n)$ и таких, что

$$0 \leqslant d_{ij}(x) \leqslant \min\left\{x_j, \max\left[\frac{1}{2}(s_{ij}(\mathbf{x}) - s_{ij}(\mathbf{x})), 0\right]\right\}, \qquad (102)$$

где s_{ij} — излишек (максимальный эксцесс) игрока i против игрока j.

$$\text{Пусть } \mathcal{B} = \{\mathbf{x} \mid d_{ij}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall i, j\} — \qquad (103)$$

множество сделок, связанное с d_{ij}. Выбирая d_{ij} соответствующим образом, можно превратить $\mathcal{B}$ в c-ядро, множество сделок $\mathcal{M}_1^{(i)}$ или в любое другое множество, представляющее интерес.

Взяв в качестве исходного дележа произвольный вектор $\mathbf{x}^0$, определяют по индукции последовательность $\{\mathbf{x}^t\}$:

$i(t)$, $j(t)$ выбирают так, чтобы максимизировать $d_{ij}(\mathbf{x}^t)$,

$$x_{i(t)}^{t+1} = x_{i(t)}^t + d_{i(t),\, j(t)}(\mathbf{x}^t), \qquad (104)$$

$$x_{j(t)}^{t+1} = x_{j(t)}^t - d_{i(t),\, j(t)}(\mathbf{x}^t), \qquad (105)$$

$$x_k^{t+1} = x_k^t \text{ для остальных } k. \qquad (106)$$

Тогда при $t \to \infty$ последовательность $\{x^t\}$ сходится к предельному $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}$.

В другом, близком по идее методе используются только *непрерывные* функции требований $d_{ij}(\mathbf{x})$. В качестве начального приближения берут произвольный дележ $\mathbf{x}(0)$ и рассматривают

систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j (d_{ij}(\mathbf{x}) - d_{ij}(\mathbf{x})). \tag{107}$$

При $t \to \infty$ решение $\mathbf{x}(t)$ сходится в пределе к $\mathbf{x}^*$; опять $\mathbf{x}^* \in \mathscr{B}$.

4.5. Игры без побочных платежей

Выше изложена теория игр с побочными платежами, в которой предполагается, что коалиция может как угодно делить свой выигрыш. В более общем случае это уже может быть не так, а именно могут быть разрешены только определенные виды распределения выигрыша. В результате возникает необходимость в теории игр *без побочных платежей*.

В теории игр без побочных платежей характеристическая функция v задает для каждой коалиции S не одно число, а множество точек $\mathbf{x}$ в n-мерном пространстве, такое, что коалиция S может гарантировать всем своим членам их долю из $\mathbf{x}$.

Предположим, что задано компактное выпуклое подмножество K в n-мерном пространстве. Тогда характеристической функцией является функция v, которая каждому $S \subset N$ ставит в соответствие непустое, замкнутое, выпуклое подмножество в n-мерном пространстве; при этом должны удовлетворяться условия:

а) $\mathbf{y} \in v(S)$, если $\mathbf{x} \in v(S)$, $y_i \leqslant x_i$ $\forall i \in S$;

б) $v(S) \cap v(T) \subset v(S \cup T)$, если $S \cap T = \varnothing$;

в) $\mathbf{y} \in v(N)$, тогда и только тогда, когда $\exists \mathbf{x} \in K$, такое, что $y_i \leqslant x_i$ $\forall i \in N$.

Теперь можно ввести отношение доминирования для игр без побочных платежей. Будем говорить, что $\mathbf{x}$ доминирует $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \succ\succ \mathbf{y}$), если существует непустая коалиция $S \subset N$, такая, что

$$x_i > y_i \text{ при всех } i \in S,\ \mathbf{x} \in v(S).$$

При таком определении отношения доминирования пустые множества и ядро определяются так же, как и в играх с побочными платежами.

Аналогично можно обобщить и понятие «множество сделок» на игры без побочных платежей. К сожалению, непосредственное обобщение $\mathscr{M}_1^{(i)}$ может привести к пустому множеству в смысле ранее введенного определения. Однако ослабленный вариант, известный как $\mathscr{M}_{1+}^{(i)}$, приводит уже к непустому множеству.

Трудно обобщить на игры без побочных платежей такие понятия, как значение игры по Шепли, c-ядро и пуклонная цепь; до сих пор не существует даже приемлемого метода для такого обобщения.

Пример 22. Два игрока (1 и 2), работая вместе, могут произвести 100 фунтов продукта, который игрок 1 оценивает в 1 долл. за фунт, а игрок 2 — в 0,25 долл. за фунт. У игроков 1 и 2 совсем

нет денег, а у игрока 3 деньги есть, и он оценивает товар по 1 долл. за фунт.

Игроки 1 и 2 вместе могут разделить произведенный продукт, как им захочется. Таким образом, они могут получить соответственно u_1 и u_2 с учетом ограничений

$$u_1 + 4u_2 \leqslant 100, \quad u_1 \leqslant 100, \quad u_2 \leqslant 25.$$

Игроки 1 и 3 (или 2 и 3), объединившись, не могут получить прибыли. Однако если все трое образуют коалицию, то появляется практическая возможность продать часть товара игроку 3 по цене (предположительно) 0,25 — 1 долл. за фунт. Тогда три игрока могут получить u_1, u_2 и u_3 с учетом ограничений

$$u_1 + u_2 + u_3 \leqslant 100, \; u_i + u_j \leqslant 100 \text{ при } i \neq j, \; u_i \leqslant 100.$$

Ядро этой игры состоит из всех векторов (u_1, u_2, u_3), таких, что

$$u_1 + u_2 + u_3 = 100, \quad u_1 + 4u_2 \geqslant 100, \quad u_1 \geqslant 0.$$

В случае когда формируется коалиция трех лиц, множество сделок будет содержать все дележи в ядре. В данной игре не хватает соглашения относительно значения игры; можно предложить несколько значений: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ и (0,518, 0,476, 0,006).

4.6. Игры с континуумом игроков

Под игрой с континуумом игроков будем понимать σ-алгебру $\mathcal{U}$ подмножеств (коалиций) вместе с вещественной характеристической функцией v, удовлетворяющей обычным условиям, а именно:

$$v(\varnothing) = 0,$$

$$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T), \quad \text{если} \quad S \cap T = \varnothing.$$

Обычные понятия доминирования, нормализации, ядра, устойчивых множеств можно с некоторой долей осторожности обобщить на случай таких игр. Однако в большинстве работ по играм с континуумом игроков рассматриваются обобщения на эти игры понятия «значение игры по Шепли».

5. ИГРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При игровом моделировании используется способность человека имитировать реальное поведение людей в ситуациях конфликта интересов. Обычно при проведении игры не стремятся к строгому математическому анализу (хотя такой анализ может быть полезен), а преследуют несколько других целей.

Вообще считается, что игровое моделирование может проводиться с одной из следующих целей:

1) обучение и тренировка,
2) принятие решений при управлении,
3) исследование процессов принятия решений человеком,
4) деловые игры.
Рассмотрим кратко каждую из них.

5.1. Обучение и тренировка

Игровое моделирование для обучения используется на всех уровнях: от школ (где оно может быть включено в классную работу) до организаций, в которых молодые сотрудники иногда обучаются своим обязанностям на игровых моделях. Вообще, наиболее важно то, что игра часто стимулирует учеников и обучает определенные группы установлению связей друг с другом. Следует отметить, что, к сожалению, теория обучения развита слабо. В результате приходится проявлять большую изобретательность при создании игровых обучающих ситуаций.

5.2. Принятие решений при управлении (операционные игры)

Игры часто применяют при принятии решений в процессе управления производством. По существу, игровая модель используется для того, чтобы определить возможные (правдоподобные) исходы стратегий, которые могут быть выбраны лицом, принимающим решение. В этом отношении обычно важно использовать в игре, насколько возможно, самих лиц, принимающих решение. Следует также отметить, что очень часто исход игры не столь важен, как процесс принятия решений, приводящий к такому исходу. Поэтому неотъемлемой частью каждой игры становится обсуждение результатов.

Следует помнить, что разработчики и руководители игры могут внести в нее элементы предубеждения, которые оказывают влияние на исход игры. Поэтому в общем случае важно узнать степень этого влияния, прежде чем делать далеко идущие выводы на основе результатов игры. (И наоборот, хорошо разработанную игру можно использовать, чтобы повлиять на лиц, принимающих решение, при оценке значения некоторых стратегий.)

5.3. Исследование процессов принятия решений человеком

Игра используется как для проверки существующих гипотез о поведении людей, так и для создания новых гипотез. С помощью таких игр разрабатываются системы искусственного интеллекта.

Следует отличать тип интеллекта, который необходим для решения задач, от того типа интеллекта, которым люди пользуются в процессе общения. Такое различие в интеллектах можно

отчасти сравнить с различиями, которые существуют между игрой двух лиц с нулевой суммой (когда не используется кооперирование) и другими играми, где социальная кооперация бывает полезна и необходима.

5.4. Деловые игры

Обычно деловые игры относят к развлечениям, хотя это и весьма спорно. Поэтому при оценке деловых игр директор должен понимать, что игровая модель, на основе которой будет приниматься решение, на самом деле может рассматриваться участниками как некоторое развлечение.

ЛИТЕРАТУРА

В книгах [5, 9] дается популярное изложение теории игр. Основы теории заложены в книге [8]. Работы [1, 2, 3, 7] представляют собой обзоры исследований, которые могут служить хорошей иллюстрацией общего уровня развития данной области науки. Книга [4] содержит полезное критическое обсуждение теории. Математические вопросы хорошо изложены в книге [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Dresher M., Shapley L. S., Tucker A. W., Eds., Advances in Game Theory, Annals of Mathematics Study No. 52, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1964.
2. Dresher M., Tucker A. W., Wolfe P., Eds., Contributions to the Theory of Games, III, Annals of Mathematics Study No. 39. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
3. Kuhn H. W., Tucker A. W., Eds., Contributions to the Theory of Games, I, II, Annals of Mathematics Studies No. 24, 28, Princeton University Press, Princeton. New Jersey, 1950, 1953.
4. Luce R. D., Raiffa H., Games and Decisions, Wiley, New York, 1957. [Имеется перевод: Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения.— М.: ИЛ, 1961.]
5. McDonald J., Strategy in Poker, Business, War W. W. Norton. New York, 1950.
6. Owen G., Game Theory, W. B. Saunders, Philadelphia, Pennsylvania, 1968. [Имеется перевод: Оуэн Г. Теория игр.— М.: Мир, 1971.]
7. Tucker A. W., Luce R. D., Eds., Contributions to the Theory of Games IV, Annals of Mathematics Study No. 40, Princeton University Press, Princeton. New Jersey, 1959.
8. Von Neumann J., Morgenstern O., Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944, 1947, 1953. [Имеется перевод: фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение.— М.: Наука, 1970.]
9. Williams J. D., The Compleat Strategyst, Wiley, New York, 1954. [Имеется перевод: Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег.— М.: ИЛ, 1960.]

III-6. Теория поиска[1)]

Ф. Морз[2)]

ВВЕДЕНИЕ

Данная глава предназначена для тех, кто интересуется методами исследования операций, а отнюдь не для высококвалифицированных специалистов в области теории поиска. Основное внимание здесь уделяется окончательным результатам, а тонкости, связанные с выводом многих формул, сознательно опускаются (желающие могут познакомиться с ними, обратившись к указанным в конце главы публикациям). В главе даны описания вычислительных процедур и приведены графики и диаграммы различного рода, так что представленный ниже материал может быть использован при планировании реального поиска. Наша цель заключалась в том, чтобы стимулировать использование изложенных ниже сведений при решении практических задач. Мы надеемся, что у читателя появится интерес к самостоятельному анализу с целью получения более эффективных решений реальных задач поиска.

В области исследования операций на примере задач поиска мы видим, как могут по мере своего развития существенно обособиться, с одной стороны, теоретические, а с другой стороны, чисто прикладные направления работ. Теория поиска как самостоятельный предмет зародилась во время второй мировой войны [3)] в связи с практической необходимостью эффективного использования самолетов и боевых кораблей для обнаружения подводных лодок противника. Несмотря на то что теория поиска пребывала тогда еще в зачаточном состоянии, она оказала существенную помощь военно-морскому флоту США при планировании разведывательных операций, которые стали в результате применения научных методов более эффективными, чем проводившиеся ранее на чисто

[1)] Расчеты, приведенные в разд. 5, были выполнены при финансовой поддержке Научно-исследовательского центра вооруженных сил США (по контракту DAHCO4-70-C-0058).

[2)] Philip M. Morse. Massachusetts Institute of Technology.

[3)] «Предварительный отчет по проблеме обнаружения подводных лодок», представленный в мае 1942 г. Морзом, Ринхартом и рядом других специалистов, был первым Техническим отчетом сформированной в то время Группы разработчиков методов борьбы с подводными лодками. Деятельность этой Группы финансировалась Национальным комитетом научных разработок оборонной ориентации (работы по упомянутой выше проблематике входили в компетенцию Штаба по планированию морских операций, начальником которого был тогда адмирал Кинг). Материалы этого отчета вошли в разделы 2.3, 3.2 и 5.2 данной главы. Его содержание, а также результаты ряда других исследований, выполненных членами упомянутой выше Группы, изложены в обобщенном виде Купманом [16].

интуитивной основе. В последующие годы математический аппарат теории поиска был существенно усовершенствован (см., например, работы [7, 29]), а круг потенциальных (с точки зрения ряда авторов) приложений этой теории значительно расширился. Однако далеко не очевидно, что появившиеся в большом количестве весьма тонкие математические построения теории поиска действительно окажутся полезными для тех, кто осуществляет реальный поиск в условиях дефицита времени и неизбежности ошибок.

Причина медленного прогресса в сфере практического применения методов теории поиска частично заключается в том, что термином *поиск* охватывается множество ситуаций. Если не учитывать исходных принципов, базирующихся на вероятностном подходе к анализу реальных явлений, то оказывается, что между вычислительным процессом, с помощью которого находится максимум сложной функции многих переменных, и поиском, например, ребенка, заблудившегося на склоне горы, или, скажем, поиском полицией лица, бежавшего из тюрьмы и постоянно меняющего свое местонахождение, мало общего. Чтобы расширить область приложений теории поиска, необходимо детально проанализировать большое число представляющих практический интерес специфических ситуаций и процессов и попытаться найти в каждом конкретном случае практически значимое решение (каким бы грубым в силу своей приближенности оно ни оказалось).

По утверждению Поллока [29] (см. также [3]), термин *поиск* был введен не только для обозначения стратегии реализации комплекса операций по обнаружению того или иного потерянного объекта (мишени), но и для отражения таких аспектов, как разработка проекта и описание способа использования технических средств, помогающих эффективно реализовать поиск, и решение вопросов о том, какие действия должны последовать за актом обнаружения мишени. В данной главе будет принято более узкое определение: *поиск состоит в планировании и реализации процесса наблюдения с целью обнаружения мишени.* При этом предполагается, что технические характеристики оборудования, предназначенного для поиска мишени, могут быть получены либо непосредственно из экспериментов по обнаружению аналогичных мишеней (как описано в разд. 2.3), либо путем комплексного применения статистических методов обнаружения сигналов и методов теории принятия решений. Таким образом, задача заключается в том, чтобы определить, как данное оборудование может быть использовано при той или иной из предлагаемых стратегий реального поиска.

Сосредоточение внимания на конкретной задаче поиска позволяет сократить перечень мер по обеспечению эффективности поиска. Как правило, мы хотим максимизировать вероятность обнаружения мишени при заданных ограничениях на затраты, связанные с реализацией поиска. Иногда же в качестве исходного критерия

принимается минимум средней продолжительности поиска от его начала до того момента, когда цель оказывается обнаруженной. Следует отметить, что во многих случаях указанные выше критерии (максимум вероятности обнаружения мишени и минимум средней продолжительности поиска) приводят к одной и той же стратегии поиска. Здесь не дается описания других критериев, в частности критерия, предписывающего максимизацию объема собранной информации о поведении объекта поиска [7, 22].

Сначала будет рассмотрен случай непрерывного поиска, поскольку он исследован более подробно. С непрерывным поиском в большей степени ассоциируются приложения военной ориентации, хотя методами теории непрерывного поиска анализировались и другие процессы. Описывается влияние фальшимишеней на структуру оптимальной стратегии поиска, которые часто снижают результативность реального поиска. В последующих разделах рассматривается задача поиска объектов, локализация которых может быть только дискретной; обсуждаются возможные приложения методов дискретного поиска, связанные с выполнением геологоразведочных работ (например, с поиском месторождений угля или нефти), с поиском полицией явных улик и др. Наконец, описывается проблема поиска в случае, когда мишень активно «избегает» обнаружения. Теория поиска для такого рода случаев только начинает развиваться, и успехов практического использования получаемых при этом результатов пока нет. Подробное изложение новейших результатов, полученных при анализе стратегий поиска в случае активно противодействующих мишеней, можно найти в работах, которые указаны в списках литературы, приведенных в [7, 10, 29].

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Начнем с рассмотрения частного случая, аналогию с которым можно провести почти при всех других видах «физического» поиска. Мы имеем в виду ситуацию, когда человек осматривает некоторую область (экран, стенд и т. п.), пытаясь обнаружить при этом определенный объект, символ или графическое изображение. (Любой из этих предметов поиска будем называть *мишенью*.) Он полагает (или надеется), что мишень находится где-то в пределах этой области. В случае визуального поиска проявляются почти все характерные черты любого другого (нередко гораздо более сложного) процесса, связанного с попыткой обнаружения мишени. Действительно, к числу характерных особенностей любого поиска относятся постепенное уменьшение числа наблюдений, подлежащих дополнительной реализации, и диапазона поправок к наблюдаемым значениям параметров, что обусловливается, например, более упорядоченной стратегией поиска. Кроме того, визуальный

поиск, как правило, является составной частью сложных (и предполагающих использование технических средств) поисковых операций, при проведении которых изображения различного рода (например, в случае использования радаров или сонаров) подлежат визуальному наблюдению (считыванию).

1.1. Визуальный поиск в заданной области

Одним из свойств человеческого глаза является его способность тщательно просматривать (сканировать) некоторую область. Характер психофизиологической реакции человека, связанной с процессом упомянутого выше визуального сканирования, описан в работе [16, гл. 4].

Человеческий глаз сканирует ту или иную область путем последовательной *фиксации* зрительного «внимания» $\left(\text{приблизительно от } \frac{1}{4} \text{ до } \frac{1}{2} \text{ секунды}\right)$ в различных направлениях; при этом в промежутке между двумя смежными актами фиксации зрения происходит быстрая смена направления взгляда. В процессе изменения направления взгляда глаз не видит. Четкость деталей, наблюдаемых глазом при каждой фиксации взгляда, быстро уменьшается с увеличением угла между направлением на деталь и направлением взгляда. Детали отчетливо воспринимаются лишь небольшой частью сетчатой оболочки глаза — ямкой, расположенной в центре сетчатки; таким образом, телесный угол отчетливой фиксации деталей весьма мал. Крупные объекты с резкими контрастами могут оказаться в поле зрения и в тех случаях, когда направление от глаза к этим объектам образует с направлением взгляда угол, равный 20° и более. Однако мелкие детали могут быть видны тогда, когда этот угол не превышает двух-пяти градусов.

Процесс визуального поиска можно описать математически, введя в рассмотрение вероятность $\mu(\beta)$ того, что искомая мишень будет опознана за время сохранения фиксированного положения направления взгляда, когда отклонение от направления взгляда линии, проведенной от глаза к мишени, составляет угол β. Вероятность μ, естественно, зависит от угла β, но она зависит также от освещенности области поиска, угловых размеров и оптической контрастности мишени, а также, конечно, от состояния глаз индивидуума, реализующего поиск (т. е. от того, насколько он вообще хорошо видит). Как уже отмечалось выше, μ имеет ярко выраженный максимум при $\beta = 0$ и быстро падает до нуля по мере того, как угол β достигает (или начинает превышать) 5°. Телесный угол эффективного сканирования (мы будем называть его эффективным телесным углом) при фиксированном направлении взгляда есть интеграл, подынтегральной функцией в котором является μ, а интегрирование осуществляется по телесному углу $d\Omega =$

$= d\alpha \sin \beta \, d\beta$:

$$\Gamma = \int\int \mu(\beta)\, d\Omega.$$

Числовое значение Г зависит также от типа мишени и от условий освещенности сканируемой области; числовым значением Г определяется вклад одного взгляда в достижение конечной цели, которая заключается в обнаружении мишени. Во многих случаях эффективный телесный угол Г оказывается небольшим, а именно порядка десяти (град)^2.

Продолжительность поиска зависит также от величины телесного угла Ω_s, охватывающего всю площадь, подлежащую визуальному сканированию. Если, приступая к поиску, человек не имеет ни малейшего представления о месте расположения мишени (в пределах телесного угла Ω_s) и если плоскость является ориентированной и так освещена, что угол Г не зависит от направления взгляда, то вероятность обнаружения мишени в течение каждого периода фиксации взгляда при случайно выбранном направлении взгляда внутри телесного угла Ω_s есть константа, значение которой не зависит от выбора направления взгляда (другие случаи будут рассмотрены позднее). Эта вероятность, называемая *априорной вероятностью обнаружения мишени с одного взгляда* и представляющая собой отношение эффективного телесного угла, внутри которого реализуется сканирование в период фиксированного положения взгляда, к телесному углу, охватывающему всю подлежащую сканированию площадь (т. е. $g = \Gamma/\Omega_s$), есть вероятность того, что мишень будет обнаружена в течение единственной, случайно произведенной фиксации взгляда.

При осуществлении серии фиксаций направления взгляда со случайным выбором направлений (как это обычно происходит при визуальном поиске) вероятность обнаружения мишени на n-й фиксации равняется $(1-g)^{n-1}\, g$, вероятность того, что мишень после n-й фиксации останется необнаруженной, равняется $(1-g)^n$, а вероятность обнаружения мишени до n-й фиксации взгляда определяется по формуле

$$P_n = 1-(1-g)^n. \tag{1}$$

Поскольку значение g, как правило, значительно меньше единицы и любой реально значимый поиск предполагает реализацию серии многих сотен фиксаций направления взгляда $\left(\text{т. е. продолжается не менее } \frac{1}{2} \text{ минуты}\right)$, вместо формулы (1) можно пользоваться ее асимптотической аппроксимацией

$$P_n = 1-e^{-ng}. \tag{2}$$

Во многих случаях представляется удобным включить в эту формулу время t, потраченное на поиск, и суммарный телесный угол Ω_s, внутри которого должны быть сосредоточены все направления визуального поиска. Обозначив через ν частоту фиксаций взгляда в процессе поиска мишени и, следовательно, положив $n = \nu t$, для вероятности обнаружения мишени не позднее момента времени t будем иметь

$$P(\Phi) = 1 - e^{-\Phi}, \quad \Phi = E/\Omega_s, \quad E = \omega t, \tag{3}$$

где $\omega = \nu\Gamma$ интерпретируется как *скорость поиска* внутри телесного угла, ассоциированного с обзором исследуемой площади, E имеет смысл *суммарных поисковых усилий* внутри эффективного телесного угла к моменту времени t, а Φ представляет собой *удельное значение поисковых усилий*, или *поисковый потенциал* наблюдателя.

Остановимся на важном свойстве уменьшения числа наблюдений при реализации процедур поиска. Ясно, что дублирование усилий E для обнаружения мишени не удваивает вероятности ее обнаружения. Операции поиска другого типа, описание которых будет дано позднее, соответствуют более сложной зависимости P от Φ; однако для всех случаев хорошо организованного поиска вероятность $P(\Phi)$ связана с удельным значением поисковых усилий таким образом, что всегда выполняются следующие условия [см. текст, относящийся к соотношению (21)]:

$$\left.\begin{array}{l} P(\Phi) \text{ является монотонно } \textit{возрастающей} \text{ функцией } \Phi, \text{ и } P(0) = 0; \\ P(\Phi) \to U \leqslant 1 \text{ при } \Phi \to \infty; \text{ кроме того, } P'(\Phi)\ (\equiv dP/d\Phi) \text{ является} \\ \text{монотонно } \textit{убывающей} \text{ функцией } \Phi, \text{ и } P'(\Phi) \to 0 \text{ при } \Phi \to \infty. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Выше было подчеркнуто, что речь идет о хорошо организованном поиске; условия (4) и являются определением поиска, относящегося к категории хорошо организованных. Направляя усилия на поиск мишени, в каждый текущий момент времени по возможности следует предусматривать такое направление последующего сканирования, которое обещает дать наилучшие результаты, т. е. обеспечивает максимизацию P'. Если это возможно, то в каждый момент времени поисковые действия проводятся так, чтобы значение P' было наибольшим из всех возможных (по крайней мере не меньше, чем при любых других вариантах действий), и, следовательно, P' будет монотонно убывающей функцией Φ. (Более подробное обсуждение этого вопроса можно найти в работах [5, 18] и в разд. 3.3 данной главы.) В силу указанных выше свойств $P'(\Phi)$, с которыми и ассоциируется «уменьшение числа наблюдений», поиск оказывается наиболее эффективным лишь при ярко выраженном нелинейном характере распределения поисковых усилий (см. разд. 3.3).

1.2. Ложная тревога. Неслучайное сканирование

Теперь следует обратиться к случаю реального визуального поиска с целью выяснения, действительно ли заложенное в формуле (1) предположение о статистической независимости вероятностей, ассоциированных с последовательно реализуемыми актами фиксации направления взгляда, является (или может быть сделано) справедливым, а также действительно ли в реальной обстановке скорость поиска ω равняется $\nu\Gamma$. Представим себе, что человек пытается найти в книжном шкафу какую-нибудь конкретную книгу, которая, по его убеждению, должна находиться где-нибудь на одной из полок. Сначала книжные полки просматриваются наугад. Краешком глаза ищущий может уловить нечто похожее на название той книги, которую он пытается отыскать, и сосредоточить на ней внимание. Возможно, при этом он убедится, что попавшая в поле его зрения книга не та, которую он ищет, и продолжит случайное сканирование. Не исключено, что когда внимание осуществляющего поиск привлечет очередная книга, он приблизится к ней и даже возьмет ее в руки, не успев даже убедиться, что эта книга также не та, которая ему нужна. В конце концов, продолжая поиск, он найдет требуемую книгу (если она действительно находится в данном книжном шкафу).

Таким образом, в реальных условиях в процессе визуального поиска имеют место как случайные, так и коррелируемые фиксации направления взгляда. Кроме того, некоторые из обнаруженных объектов могут оказаться ложными (реализующему поиск *показалось*, что он обнаружил то, что искал). Такие события влияют на скорость поиска и, следовательно, увеличивают интервал времени от начала поиска до обнаружения мишени. Пока мы можем лишь предположить, что ложная тревога не видоизменяет соотношение (3), хотя и снижает скорость поиска ω.

Можно экспериментально убедиться в том, что вероятность обнаружения за время t книги в книжном шкафу, содержащем N книг (число N достаточно велико), приближенно определяется формулой

$$P(\Phi) = 1 - e^{-\Phi}, \quad \Phi = \rho t/N, \tag{5}$$

где ρ — скорость эффективного поиска книги, зависящая от психофизиологических особенностей индивидуума, реализующего поиск, освещенности книжных полок и физических характеристик искомой книги; параметр ρ учитывает также и возможность возникновения ложных тревог, когда ищущему кажется, что он нашел нужную ему книгу. Если книги расставлены на полках неупорядоченно, так что *априорная* вероятность локализации книги одинакова для всех позиций на полках книжного шкафа, то, как показывает практика, скорость поиска лежит в пределах

от 100 до 200 книг за одну минуту (см. [24]). При этом отклонения в поиске, обусловленные ложными сигналами об обнаружении, замедляют поиск, хотя, по-видимому, не меняют его рандомизированной сущности.

Формула (5) представляет собой образец функциональной зависимости вероятности P (Ф) обнаружения объекта поиска от удельного значения поисковых усилий $\Phi = E/A$ (здесь E — суммарные поисковые усилия, A — площадь, которая должна быть охвачена поиском). Мы опять обнаруживаем уменьшение числа наблюдений, отраженное в соотношениях (4). Если поисковое усилие E удваивается, то значение Ф также удваивается, а значение P при этом не увеличивается в два раза. Величина P не обладает свойством аддитивности, тогда как Ф этим свойством обладает. По этой причине величину Ф часто называют *поисковым потенциалом* [18].

Чтобы определить степень неэффективности рандомизированного выбора направлений в процессе визуального сканирования, рассмотрим идеализированную схему полностью упорядоченного поиска. Предположим, что наше зрение способно сканировать некоторую заданную область A и пусть мишень непременно будет обнаружена, если она охватывается телесным углом, соответствующим в области A кругу R с диаметром W, и не будет обнаружена, если она находится вне области A (эти предположения исключают эффект помех от фальшмишеней). Тогда можно попытаться осуществить эффективный просмотр всей области A, изменяя угол зрения таким образом, чтобы область R при перемещении выделяла в области A «дорожки» змеевидной или зигзагообразной конфигурации (без пересечений), так что в конечном счете область A оказалась бы полностью просканированной, причем каждая из ее подобластей попала бы в поле зрения только один раз.

Если мишень с одинаковой вероятностью может находиться в любой точке области A, то вероятность ее обнаружения к моменту времени, когда из общей площади A сканированию подверглась площадь a, равняется

$$P(a) = \begin{cases} (a/A) & (a \leqslant A), \\ 1 & (a \geqslant A), \end{cases} \tag{6}$$

где неравенство $a > A$ означает, что некоторые из подобластей области A просканированы более чем один раз. Если сравнить (6) с формулой (5), справедливой в случае рандомизированного поиска, то можно увидеть, что при сформулированных выше предположениях поисковый потенциал Ф равняется a/A. Таким образом, две кривые, описывающие поведение P, исходят из одной и той же точки, имеют одинаковый наклон при $\Phi = 0$ и совпадают при $\Phi \to \infty$. Наибольшее расстояние между ними соответствует $\Phi = 1$, когда вероятность обнаружения мишени в случае рандомизирован-

ного покрытия области поиска равняется 0,63, а в случае равномерного покрытия — единице. Ниже будет показано, что вариантам поиска с промежуточной (по отношению к рассмотренным случаям) степенью упорядоченности соответствуют распределения вероятностей, лежащие между упомянутыми выше кривыми (см. рис. 8).

2. ДВИЖЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ

Теперь рассмотрим другую операционную ситуацию: поиск корабля или всплывшей на поверхность подводной лодки с самолета. Высота полета самолета (над уровнем моря) равняется h; самолет движется по прямой линии со скоростью v, достаточно большой, чтобы можно было пренебречь скоростью перемещения корабля. Опять поставим вопрос о скорости поиска; в данном случае она зависит от скорости самолета, который в процессе полета покрывает в области поиска некоторую полосу.

2.1. Визуальный поиск

Сначала рассмотрим вариант визуального поиска, когда наблюдение за поверхностью моря (с целью обнаружения корабля-мишени) ведется с упомянутого выше самолета. Когда небольшой корабль (наподобие подводной лодки) находится в движении, с самолета лучше всего виден его кильватер. Следовательно, шансы наблюдателя «засечь» корабль-мишень с одного взгляда, грубо говоря, пропорциональны телесному углу обзора с основанием, диаметр которого равен длине кильватера. При этом вероятность обнаружения мишени, разумеется, зависит от состояния морской поверхности и прозрачности атмосферы. Как показано на рис. 1, величина этого телесного угла обратно пропорциональна $(r^2 + h^2)$ и прямо пропорциональна $\cos\theta = h/(r^2 + h^2)^{1/2}$. Другими словами, вероятность обнаружения наблюдателем мишени с одного взгляда равняется $g(r) = Ch/(r^2 + h^2)^{3/2}$, где r — расстояние от самолета до корабля по горизонтали, а значение константы C зависит от размеров корабля и длины кильватера, от их контрастности на фоне моря (т. е. от состояния морской поверхности) и от условий видимости (т. е. прозрачности атмосферы). Более подробно данный вариант поиска рассмотрен в работе [16].

За время dt, в течение которого самолет пролетает в направлении y расстояние $dy = v\,dt$, наблюдатель успевает сделать $\nu\,dt = (\nu/v)\,dy$ фиксаций направления взгляда. Аналогично рассмотренному выше (см. разд. 1.1) статическому случаю вероятность того, что за время dt корабль *не будет* обнаружен, равняется $q(t) = \exp[-\nu Ch\,dt/(r^2 + h^2)^{3/2}]$, а накопленная вероятность того, что с летящего по заданному курсу самолета корабль останется незамеченным, равняется произведению парциальных вероят-

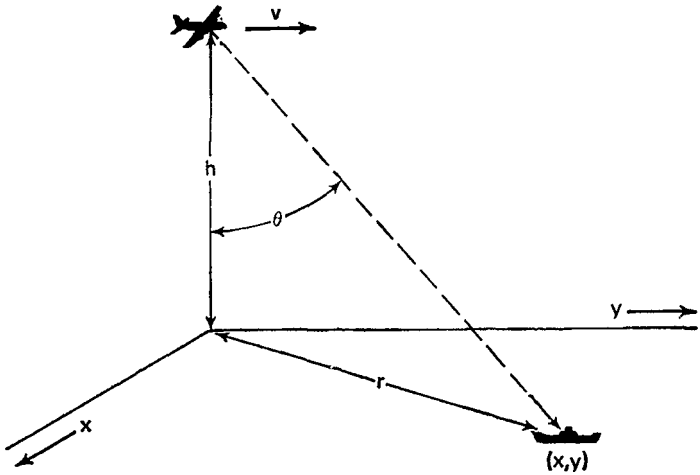


Рис. 1. Поиск корабля с самолета, летящего в направлении y на высоте h с относительной скоростью v.

ностей . . . $q(t-dt)\,q(t)\,q(t+dt)\,q(t+2dt)$ . . ., где количество множителей перед $q(t)$ и количество множителей после $q(t)$ определяется длиной интервала времени, в течение которого корабль находится внутри телесного угла обзора. Таким образом, вероятность обнаружения корабля с самолета-разведчика (т. е. величина $p = 1 - [\ldots q(t-dt)\,q(t)\,q(t+dt)\ldots]$) определяется соотношениями

$$p = 1 - e^{-F(x)}, \quad F(x) = \int \nu g(r)\,dt, \tag{7}$$

где интегрирование проводится по всему интервалу времени, в течение которого цель находится внутри телесного угла обзора. С учетом содержащихся в конце предыдущего раздела замечаний по поводу визуального поиска можно утверждать, что значение константы νC в реальных условиях будет значительно меньше, чем это следует из лабораторных экспериментов; поэтому для большей гарантии значение νC необходимо определять при соответствующих операционных условиях (см. об этом ниже). Тем не менее общий вид соотношений (7) не меняется.

Как уже отмечалось, величина $F(x)$ представляет собой поисковый потенциал; наличие свойства аддитивности $F(x)$ непосредственно вытекает из записи этой величины в виде интеграла. Если, продолжая полет, самолет-разведчик снова окажется в зоне возможного местонахождения корабля-мишени, то результирующая вероятность обнаружения корабля с самолета будет определяться суммой двух значений F: $p = 1 - \exp(-F_1 - F_2)$. Согласно

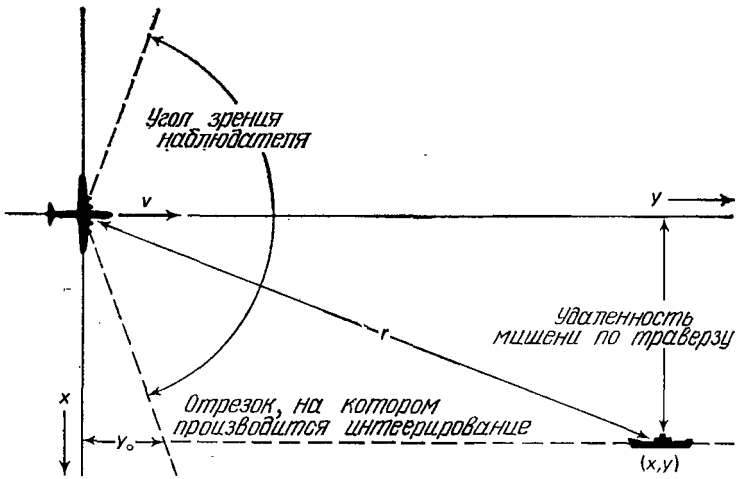


Рис. 2. Схематическое изображение поиска (в горизонтальной плоскости).

формулам (7), индивидуальные поисковые усилия F есть сумма всех инфинитезимальных поисковых усилий, аккумулируемых за время пролетания самолета над целью.

Возвращаясь в случае визуального поиска к формуле для $g(r)$, можно выразить F через кратчайшее расстояние x от мишени до плоскости, содержащей прямую, по которой осуществляется полет самолета, и ортогональной поверхности моря (это расстояние называют *расстоянием по траверзу* или просто *траверзом*):

$$F(x) = \frac{kh}{v} \int\limits_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{(h^2+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{kh}{v(h^2+x^2)} \left[1 - \frac{y_0}{\sqrt{h^2+x^2+y_0^2}}\right], \qquad (8)$$

где y_0 — протяженность непросматриваемой (мертвой) зоны по курсу следования самолета (рис. 2). Если обзор по направлению вперед является полным (т. е. $y_0 = 0$), то формула (8) упрощается; в этом случае выражение для вероятности обнаружения корабля, находящегося на расстоянии x от курса следования самолета, принимает следующий вид:

$$p(x) = 1 - \exp[-kh/v(h^2+x^2)] \approx 1 - e^{-kh/vx^2} \; (h \ll x), \qquad (9)$$

где, как и в предыдущих формулах, h — высота полета самолета над уровнем моря, а v — скорость полета по прямой линии. Функция $p(x)$ для данного случая представлена графиком *а* на рис. 3.

Если принять во внимание рассуждения, предшествующие соотношению (6), то можно сделать вывод, что значение параметра k, вероятно, меньше значения, которое принимает величина νC.

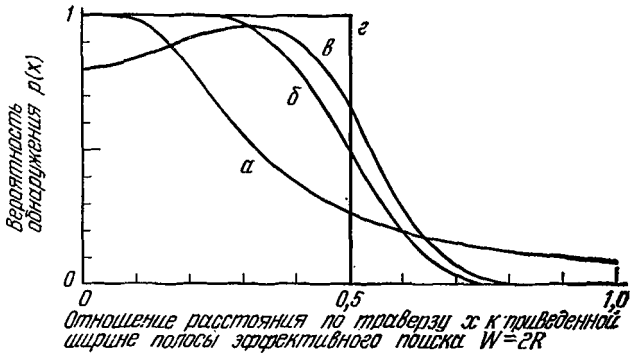


Рис. 3. Типичные графики вероятностей обнаружения p как функций расстояния x по траверзу.

а — визуальный поиск; *б* — поиск с помощью радара; *в* — поиск с помощью радара при наличии помех, порождаемых рябью на морской поверхности; *г* — идеальный случай, когда мишень наверняка обнаружима при $x \leqslant R$ и не может быть обнаружена при $x > B$.

Ясно, что значение параметра k определяется контрастностью, размерами искомого объекта, атмосферными условиями, бдительностью наблюдателя, а также его местонахождением на борту самолета, от которого зависит диапазон обзора (оно может зависеть также от v, если самолет движется очень быстро). В случае визуального поиска, разумеется, важно учитывать и другие факторы. Так, например, использование бинокля может, вообще говоря, понизить значение k, поскольку при этом сокращается число фиксаций направления взгляда в единицу времени (т. е. ν) и уменьшается телесный угол обзора при каждой такой фиксации (несмотря на то что вероятность обнаружения мишени при попадании ее в поле зрения увеличивается). Методы количественной оценки параметра k в реальных условиях будут рассмотрены несколько позднее.

2.2. Вероятности обнаружения мишени по траверзу при использовании различных технических средств

Кривая вероятности обнаружения мишени по траверзу при визуальном поиске (см. график *а* на рис. 3) — один из примеров зависимости вероятности успешного исхода поисковой операции (в данном случае «инструментом», с помощью которого производится поиск, является глаз наблюдателя) от удаленности мишени от курса следования объекта, реализующего поиск (в данном случае самолета). График функции $p(x)$ дает весьма полное представление об эффективности технических средств, движущихся по прямолинейному маршруту со скоростью v, при поиске мишени, удаленной по траверзу на расстояние x. Форма кривой $p(x)$ зависит от геометрических и физических характеристик мишени и типа исполь-

зуемого оборудования. В идеальном случае, когда мишень не может быть обнаружена, если она постоянно находится вне полосы шириной R по траверзу, и может быть обнаружена с вероятностью, равной единице, если она находится внутри этой полосы, график функции $p(x)$ имеет такой же вид, как кривая *г* на рис. 3.

В условиях реального поиска кривая $p(x)$ редко имеет форму, близкую к форме кривой *г*; вблизи мертвой зоны почти всегда имеет место неопределенность. Именно так, например, обстоит дело, когда, осуществляя поиск с помощью радара, посылают (при вращении его направленной антенны) импульсы в направлении возможного местонахождения мишени и, приняв импульс, отраженный поверхностью мишени, наблюдают на экране вспышку, соответствующую точке обнаружения мишени. Лишь тогда, когда вспышка на экране радара появляется почти в каждом цикле сканирования (т. е. когда *отношение числа вспышек на экране к числу циклов сканирования* близко к единице), можно быть уверенным, что мишень действительно обнаружена. Более подробно этот вопрос рассматривается в работе [16]. Поиск с помощью радара вообще говоря, является двухуровневым: на первом уровне в результате попадания цели в зону сканирования на экране радара генерируются вспышки, а на втором уровне факт устойчивости генерации вспышек на экране радара регистрируется человеком.

Существуют аналитические методы (см., например, [29]), позволяющие сравнивать вероятности возникновения ложной тревоги и пропуска (т. е. необнаружения попавшей в зону сканирования) мишени на основе данных об отношении числа вспышек, последовательно возникающих на экране радара, к числу последовательно выполненных циклов сканирования. Как правило, из-за экстренности поиска и подверженности наблюдателя стрессам эти методы не находят практического применения. Так, например, практика показала, что степень усталости наблюдателя имеет гораздо более серьезное значение, нежели любое (из получаемых теоретически) правило оценки упомянутого выше отношения вероятностей. (Иногда усталость, которую испытывает наблюдатель, может привести к тому, что диапазон эффективного поиска окажется вдвое меньше оптимального.) Кроме того, если скорость полета самолета достаточно велика, у наблюдателя может не хватить времени для тщательного просмотра экрана; в этом случае P будет зависеть от v, что и имеет место при визуальном поиске.

Во всяком случае можно утверждать, что при достаточно благоприятных условиях общий вид графика при поиске с помощью радара будет таким, как показано для случая *б* на рис. 3. Когда x достигает значения, приблизительно в полтора раза превышающего R, вероятность обнаружения мишени падает до нуля; при значении x, во столько же раз меньшем R, результаты поиска должны быть очень хорошими. При неблагоприятных

условиях кривая $p(x)$ в большей степени становится похожей на кривую *в* (рис. 3). Например, самолет-разведчик может пролетать над морем во время шторма или над плотным лесным массивом; в этих случаях на экране радара появляются вспышки, обусловленные помехами, которые мешают распознать вспышки, порождаемые мишенью. В некоторых случаях помехи оказываются наиболее сильными в направлении перемещения реализующего поиск объекта, так что мишень наиболее легко обнаруживается при некотором промежуточном значении *а*; ситуация такого рода отражена на рис. 3 графиком *в*. Более подробное описание поиска при наличии помех можно найти в работе [16].

Большинство представленных выше замечаний по поводу поиска мишени с помощью радара остается справедливым и в случае поиска мишени с помощью сонара (установленного, например, на борту судна, которое осуществляет поиск подводной лодки, движущейся под водой). Данный вариант поиска также рассматривается в гл. 6 работы [16]. В этом случае распознавание на экране вспышек, порождаемых мишенью, затрудняется так называемой реверберацией (т. е. эхо-эффектом); сигнал также может быть потерян, если осуществляющее поиск судно окажется почти над подводной лодкой. Таким образом, если абстрагироваться от разницы в шкалах на оси x, то можно утверждать, что кривые для вероятностей обнаружения мишени по траверзу в случае поиска с помощью сонара будут похожи на кривые *б* и *в*, изображенные на рис. 3.

С рассмотренной выше моделью могут ассоциироваться и многие другие ситуации. Например, визуальный поиск с вертолета заблудившегося ребенка, возможно, характеризовался бы в первом приближении графиком *а* на (рис. 3), и, следовательно, в этом случае для $p(x)$ была бы справедлива формула (9). Если речь идет о человеке, заблудившемся в лесу, и если поиск осуществляется в нашем варианте, то кривая $p(x)$ оказывается более похожей на кривую *б*, если учесть, что при этом видимость резко ограничена из-за наличия деревьев. С другой стороны, если для обнаружения заблудившегося используется голос, кривая $p(x)$ по форме может оказаться более похожей на кривую *а*. В случае когда в процессе поиска используются собаки, график функции $p(x)$ может оказаться совершенно иным. Более подробное обсуждение различных вариантов поиска содержится в книге Келли [1973].

Графики поисковых потенциалов $F(x)$, соответствующие приведенным на рис. 3 графикам функции $p(x)$, изображены на рис. 4. Как уже подчеркивалось ранее, поисковые потенциалы обладают свойством аддитивности; если поиск осуществляется несколькими наблюдателями, которые либо перемещаются по одному и тому же маршруту, либо следуют параллельными курсами, то для определения вероятности обнаружения мишени

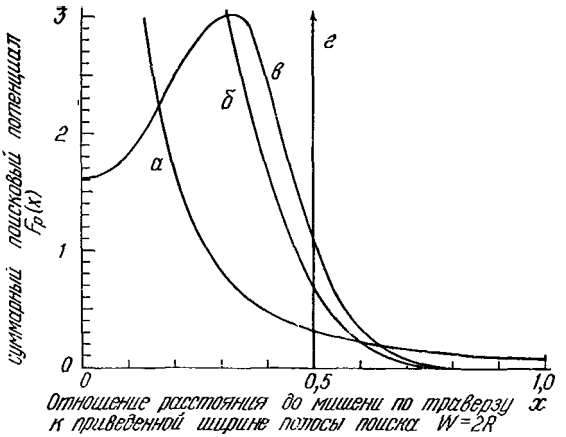


Рис. 4. Графики поискового потенциала $F_p(x)$, соответствующие кривым *а*, *б*, *в*, *г*, изображенным на рис. 3.

поисковые потенциалы этих наблюдателей следует сложить:

$$p(x) = 1 - \exp[-F_1(x) - F_2(x) - \ldots]. \qquad (10)$$

Так, например, если на борту самолета-разведчика находится n наблюдателей или же если n самолетов-разведчиков следуют одним и тем же курсом, в формулы (8) и (9) вместо k следует подставить nk. Поскольку вероятности обнаружения мишени возрастают медленнее наращивания затраченных поисковых усилий, увеличение числа наблюдателей в одной и той же поисковой операции может быть эффективным лишь при условии, что $F(x)$ одного наблюдателя меньше $\sim 0{,}7$ (или, другими словами, если $p(x) < \sim 0{,}5$). Это означает, что, например, в случае визуального поиска полезный эффект от дополнительного зрительного потенциала может иметь место (см. кривую *а*) при $|x| > 0{,}3\,W$.

2.3. Приведенная ширина полосы поиска и ее измерение

Приведенная ширина полосы поиска, охватываемая субъектом поиска при его движении по заданному курсу, определяется путем интегрирования вероятности обнаружения мишени по траверзу x, т. е.

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - \exp[-F(x)]\}\,dx, \qquad (11)$$

где $F(x)$ — поисковый потенциал. *Приведенная ширина полосы* W является наиболее объективной скалярной мерой эффективности аппаратуры, используемой субъектом поиска в процессе движения по маршруту, пролегающему над зоной поиска. У субъек-

та поиска должна быть определенная уверенность в том, что искомая мишень будет найдена, если она окажется в полосе шириной W, ось симметрии которой совпадает со следом перемещения субъекта поиска на исследуемой поверхности. Обратившись к рис. 3, мы видим, что у субъекта поиска не может быть полной уверенности в том, что если мишень окажется в полосе между $\frac{1}{2}W$ и $-\frac{1}{2}W$, то она будет наверняка обнаружена; однако имеются компенсирующие эту неопределенность шансы обнаружить мишень и тогда, когда она находится вне указанной выше полосы, так что приведенная полоса эффективного поиска имеет ширину W.

Приведенная ширина визуального поиска в случае, когда наблюдатель движется на небольшой высоте над сканируемой поверхностью, вычисляется, согласно (9), по формуле

$$W \approx \int_{-\infty}^{\infty} [1-\exp(-kh/vx^2)]\,dx = 2\,[x\,(1-e^{-kh/vx^2})]_0^{\infty} +$$

$$+2\int_0^{\infty} (2kh/vx^2)\,e^{-kh/vx^2}\,dx = 2\sqrt{\pi kh/v} \quad \text{при} \quad h < \frac{W}{10}. \qquad (12)$$

(Следует обратить внимание на то, что эта формула отличается от выражения (29), приведенного в работе [18]; здесь мы исходим из предположения, что угол обзора наблюдателя равен не 360°, как это предполагается в работе [18], а лишь 180°.) Для больших значений h приближенное значение W получается по формуле

$$W \approx 2\sqrt{\pi kh/v}\exp(-hv/4k). \qquad (13)$$

Заметим, что приведенная ширина W возрастает по мере увеличения высоты до значения $h \approx 2k/v$, а при дальнейшем увеличении высоты вероятность обнаружения мишени начинает уменьшаться (даже если, например, мишень оказывается непосредственно под самолетом). Отметим также, что при возрастании скорости самолета-разведчика приведенная ширина полосы эффективного поиска уменьшается, так как при этом сокращается интервал времени, в течение которого сканируется область поиска. Как уже отмечалось ранее, если по одному и тому же маршруту или же параллельными курсами следуют n наблюдателей, в выражении (12) величину k следует заменить на nk.

На рис. 3 и 4 шкала по оси абсцисс дана в единицах приведенной ширины поиска. Кривая *б* на рис. 3 (так же как и кривая *б* на рис. 4), соответствующая варианту поиска с использованием радара (или сонара), в значительно большей степени, нежели кривая визуального поиска *а*, похожа на график *г*, построенный для описанного выше идеального случая; диапазон малых вероятностей обнаружения мишени в случае *б* не распространяется

слишком далеко за предел, соответствующий $x = W/2$, а в интервале $0 < x < W/2$ вероятность обнаружения мишени близка к единице. В этом случае было бы совершенно бесполезно дублировать поиск, направляя по тому же самому маршруту еще один самолет-разведчик, оборудованный радаром (или еще одно судно, имеющее на своем борту сонар). Исключение может составить поиск при плохой видимости, когда кривая $p(x)$ имеет вид *в*.

Как уже отмечалось ранее, способность находящегося на борту самолета (корабля и т. п.) и располагающего техническими средствами наблюдателя обнаружить ту или иную цель зависит от столь многих факторов, что предсказать эту способность в реальных условиях на основе результатов лабораторного эксперимента почти невозможно. Таким образом, если важно экономить поисковые ресурсы (а для этого нужно знать числовое значение W), то единственная гарантия этого заключается в том, чтобы *измерить* значение W в условиях, максимально близких к условиям реального поиска. Во время второй мировой войны было установлено, что приведенная ширина полосы эффективного поиска W в случае попыток локализации немецких подводных лодок с помощью оснащенных радарами самолетов, как правило, оказывалась в два и даже в три раза меньше того значения W, которое сообщалось фирмами-изготовителями на основе лабораторных измерений. И это не удивительно, поскольку нельзя ожидать одинаковых результатов от испытаний при использовании оптимально настроенного радара с участием опытных специалистов и испытаний (в боевой обстановке) с радаром, бывшим в продолжительном употреблении и управляемым уставшим оператором. Поэтому в тех случаях, когда при планировании боевых операций использовались паспортные данные для радаров, в зонах поиска были обширные неконтролируемые области. В дополнение к учету расхождений между данными лабораторных испытаний и практическими результатами, полученными в ходе реального поиска, необходимо также делать поправки на «ложные тревоги», при возникновении которых часть времени тратится на проверку предположения о локализации именно искомой цели (см. разд. 1 и 4). Наличие ложных тревог снижает эффективность поиска; определить же, в какой степени они отвлекают внимание наблюдателя, можно лишь экспериментально.

Если изготовление макета мишени, копирующего настоящую мишень, больших трудностей не представляет, то для оценки параметров поиска можно провести следующий эксперимент. Выделим в области экспериментального поиска полосу, ширина которой по крайней мере в три раза больше наилучшего оценочного значения W, а длина L равняется не менее $10D$. Курс следования субъекта поиска должен проходить строго по середине

этой полосы. Теперь равномерно (но не настолько, чтобы эту регулярность можно было заметить) разместим на выделенной площади T мишеней-макетов. Чтобы определить $p(x)$ и W, нужно измерить и запомнить расстояния от проекции линии маршрута, по которому следует субъект поиска, до каждого макета. Затем по упомянутому маршруту направим наблюдателя, который должен зафиксировать положение каждой из мишеней, которые ему удалось обнаружить в процессе своего перемещения над полосой поиска. Допустим, что, проверив свои записи и отбросив ложные тревоги, наблюдатель констатирует, что он обнаружил n мишеней. Тогда можно утверждать, что приведенная ширина полосы поиска равняется nD/T. Если $n > \frac{1}{2}T$, то это означает, что взята слишком малая ширина полосы D; в этом случае значение D удваивается, макеты мишеней равномерно распределяются на новой полосе, и эксперимент повторяется.

Если число мишеней, обнаруженных субъектом поиска, окажется меньше 20, то из-за статистических флуктуаций точность получаемого результата будет весьма невысокой. В этом случае по указанному выше маршруту следует направить m независимых наблюдателей; при этом необходимо, чтобы ни один из наблюдателей не знал ни о расположении мишеней, ни о результатах поиска, полученных другими наблюдателями. Когда суммарное число мишеней ($N = \sum n$), обнаруженных всеми m наблюдателями, станет равным или превысит 100 (т. е. при $N \geqslant 100$), полученное в результате отношение ND/mT можно считать достаточно точной оценкой приведенной ширины полосы поиска W.

Если в эксперименте можно добиться, чтобы значения N лежали в интервале от 500 до 1000, и если известны расстояния по траверзу до каждой мишени, то можно построить кривую, аппроксимирующую соответствующую кривую на рис. 3. Для этого из общего числа обнаружений N (с учетом, естественно, всех фактов обнаружения, включая повторяющиеся обнаружения одной и той же мишени) сначала выделяются те, которые имели место в пределах $W/6$ по обе стороны от курса субъекта поиска (пусть число таких обнаружений равняется N_1), затем те обнаружения, которые оказались в пределах $\pm W/6$ и $\pm W/3$ (их число обозначим через N_2), после этого те обнаружения, которые имели место в пределах $\pm W/3$ и $\pm W/2$ (пусть суммарное число таких обнаружений равняется N_0) и т. д., пока не будут исчерпаны все N обнаружений. После выполнения данной процедуры можно построить диаграмму, структура которой показана на рис. 5. Такая диаграмма является грубой аппроксимацией графика функции $p(x)$, выделенного на рис. 5 жирной кривой. Точность экспериментальных оценок в определенной степени определяется равномерностью распределения макетов мишеней

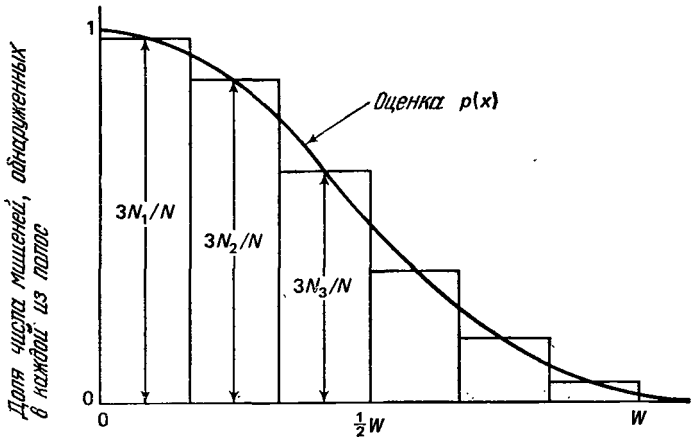


Рис. 5. Диаграмма, иллюстрирующая экспериментальный способ построения графика функции $p(x)$.

в зоне поиска; в каждой из полос, параллельных курсу следования субъекта поиска и имеющих ширину L, должно содержаться приблизительно одинаковое количество макетов.

3 ВЫЯВЛЕНИЕ ЗОНЫ ПОИСКА

В рассмотренных выше случаях речь шла о поисковых операциях, каждая из которых сводилась к сканированию некоторой ограниченной зоны с целью обнаружения мишени, находящейся, согласно исходному допущению, внутри этой зоны. В данном разделе будем предполагать, что относительно границ зоны, в которой находится мишень, нет никаких исходных гипотез, так что можно допустить, что мишень с одинаковой вероятностью может оказаться в любом месте весьма обширной области. Согласно изложенному в связи с интерпретацией формулы (5) и соображениям, которые будут представлены несколько позднее (разд. 3.3), лучший способ использования имеющихся разведывательных ресурсов заключается в их максимально равномерном распределении по всей площади. Подробности, связанные с выводом многих из приведенных в данном разделе формул, можно найти в работе [18].

3.1. Движение наблюдателя по взаимно параллельным маршрутам

Если подлежащая обследованию площадь значительно больше площади, обозреваемой из некоторой фиксированной точки или просматриваемой движущимся наблюдателем за один прогон, то

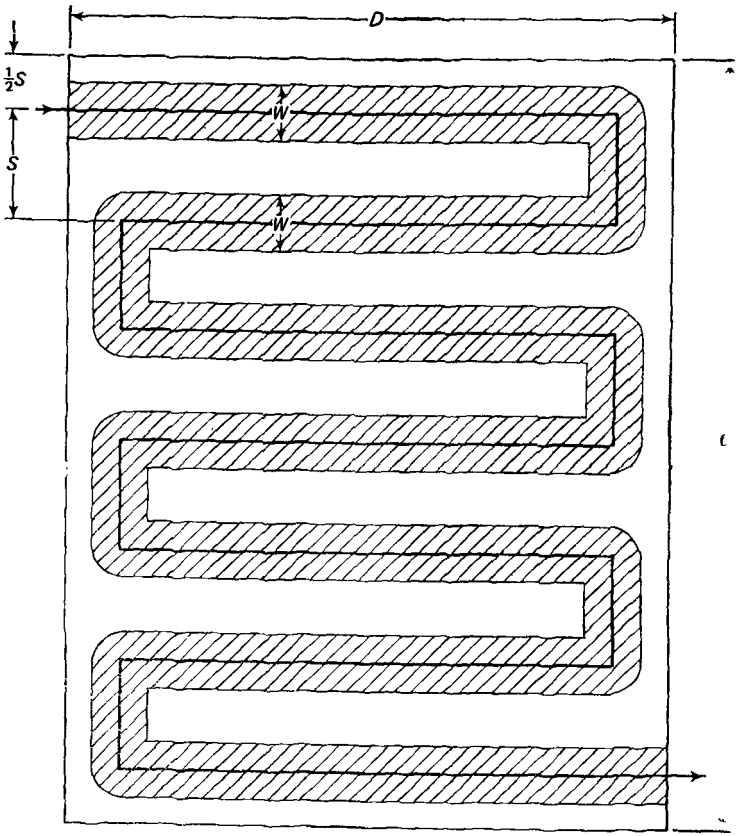


Рис. 6. Параллельные маршруты (с приведенной шириной полосы поиска w и пролегающие на расстоянии S один от другого), обеспечивающие равномерное покрытие площади $A = CD$.

лучший способ добиться равномерного перекрытия всей площади заключается в реализации последовательности перемещений по параллельным маршрутам, пролегающим на расстоянии S один от другого. Этого можно достичь, заставив двигаться по спирали или по челночному маршруту одного наблюдателя (рис. 6) или же выслав на разведку несколько наблюдателей, которые должны следовать параллельными курсами, так чтобы расстояния между смежными маршрутами равнялись S. С учетом временных ограничений и имеющихся ресурсов назначают n параллельных маршрутов; при этом длина каждого маршрута составляет D, расстояние между смежными маршрутами $S = C/n$ и суммарная длина пути $L = nD$. В предыдущем разделе было

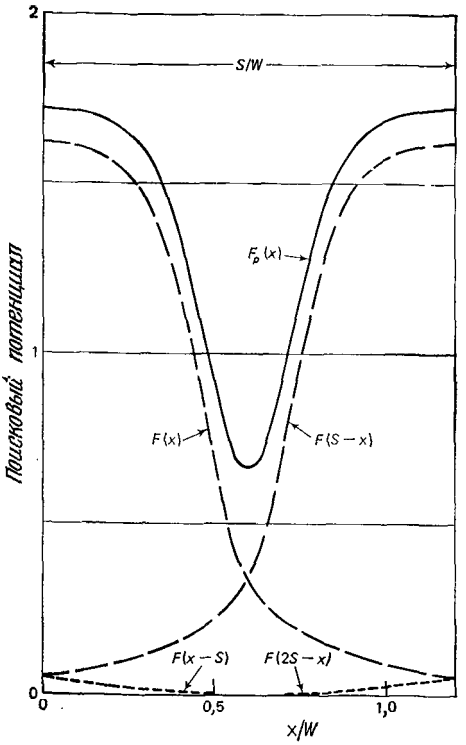


Рис 7. Поисковый потенциал $F_p(x)$ для последовательности разведывательных маршрутов, пролегающих на расстоянии S один от другого.

показано, как измеряется приведенная ширина полосы эффективного поиска W. Следовательно, $WL = nDW = A\ (W/S)$ есть общая площадь эффективного поиска (или *суммарное значение поисковых усилий*), $A = CD$ — общая площадь области поиска, а $WL/A = W/S$ — *доля покрытия обследуемой площади* (или *удельное значение поисковых усилий*, или *суммарный поисковый потенциал*). Если размеры C и D обследуемой области значительно больше W, то n, а следовательно, и L можно считать непрерывными переменными. Кроме того, если область A имеет непрямоугольную форму (как на рис. 6), но топологически компактна и имеет достаточно большую площадь, то перемещение наблюдателя по спирали или по челночному маршруту может, по существу, обеспечить равномерное покрытие обследуемой области с тем же самым значением WL/A.

Чтобы определить вероятность обнаружения мишени в процессе сканирования поверхности области A при движении наблюдателя по челночному маршруту (рис. 6), следует сложить

поисковые потенциалы F (рис. 4), соответствующие разным участкам челночного маршрута (рис. 7). Если площадь A достаточно велика, то для вероятности обнаружения мишени, удаленной по траверзу от одного из маршрутов на расстояние x, имеем

$$p_p(x) = 1 - \exp[-F_p(x)],$$
$$F_p(x) = \sum_{n=-n_0}^{n_0+1} F(|x - nS|) \quad \text{(см. рис. 7)}. \tag{14}$$

Формулы (14) отражают тот факт, что в полный поисковый потенциал F_p вносит вклад каждый из участков разведывательного маршрута. Предельное значение n_0 есть целое число, такое, что для $|x|$, лежащих в интервале $[n_0S, (n_0+1)S]$, потенциал $F(x)$ пренебрежимо мал; как правило, $F(x) \to 0$ при $n_0 \to 0$. Таким образом, на практике нет необходимости учитывать граничный эффект, т. е. вклад в поиск тех участков маршрута, которые лежат вблизи границы области A. Если граничным эффектом можно пренебречь, то F_p и p_p являются периодическими функциями x с периодом, равным S.

Пусть расстояние от мишени до границы D равняется z. Если мишень с одинаковой вероятностью может находиться в любой точке области A, то z с одинаковой вероятностью может принимать любое значение в интервале от 0 до $nS = C$. Таким образом, вероятность того, что искомый объект будет обнаружен в конце n-го участка рассматриваемого челночного маршрута, есть интеграл от периодической функции p_p по всей ширине C, деленный на C:

$$P(\Phi) = \frac{1}{nS}\int_0^{nS} p_p\left(z - \frac{1}{2}S\right)dz = \frac{1}{nS}\int_{-\frac{1}{2}S}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)S} p_p(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{S}\int_0^S p_p(x)\,dx = \frac{1}{S}\int_0 \{1 - \exp[-F_p(x)]\}\,dx,$$
$$\Phi = W/S = WL/A. \tag{15}$$

Для случая визуального поиска, когда $F(x)$ определяется формулой (8), интегрирование можно выполнить аналитически. В результате (при достаточно малых h, когда $F \approx kh/vx^2$) получим

$$P(\Phi) = \operatorname{erf}\left(\frac{\pi}{S}\sqrt{kh/v}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Phi\right), \tag{16}$$

где $\operatorname{erf}(u) = 2/\sqrt{\pi}\int_0^u e^{-t^2}dt$ — хорошо известная функция погрешности. Подробности, относящиеся к вычислениям, можно найти

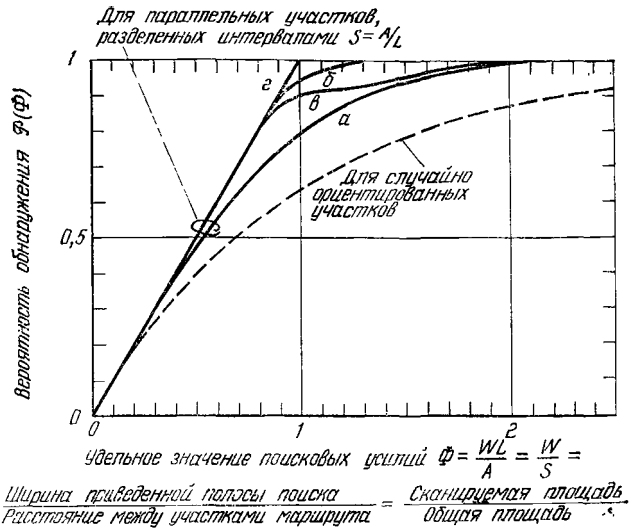


Рис. 8. Вероятность обнаружения $P(\Phi)$ как функция покрытия W/S при движении наблюдателя по челночному маршруту с параллельными участками, отстоящими друг от друга на расстоянии S.

Графики *а*, *б*, *в*, *г* соответствуют аналогично обозначенным графикам на рис. 3; график, изображенный пунктирной кривой, соответствует рандомизированному выбору направлений перемещения наблюдателя над обследуемой областью.

в работе [18] (обратите внимание на опечатку в формуле (45) только что упомянутой работы). В других случаях интеграл (16) оценивается численными методами; при этом вначале по экспериментально полученным значениям $p(x)$ с помощью формулы $F(x) = \ln[1 - p(x)]$ вычисляются соответствующие значения поискового потенциала $F(x)$, затем вычисляются F_p и p_p и наконец путем численного интегрирования величины p_p/S на отрезке от $x = 0$ до $x = S$ находится $P(\Phi)$.

Графики $P(\Phi)$ как функции доли покрытия обследуемой площади (т. е. как функции $\Phi = WL/A$) приведены на рис. 8. Эти графики (*а*, *б*, *в*, *г*) построены для случаев поиска при помощи оборудования, движущегося по челночному маршруту (с параллельными участками), технические характеристики которого ассоциируются соответственно с графиками *а*, *б*, *в*, *г* на рис. 3. Из каждого графика, приведенного на рис. 8, видно, что вероятность обнаружения мишени начинает довольно быстро уменьшаться, как только $\Phi = W/S = WL/A$ становится меньше единицы, и что вклад, получаемый за счет введения в действие дополнительных разведывательных резервов, начинает падать, как только Φ становится больше единицы. Отметим также, что кривые

а, *б*, *в* не слишком сильно отклоняются от кривой *г*, которая соответствует предельному случаю, когда результаты поиска однозначно определяются положением мишени относительно курса следования наблюдателя. Возможности использования этого свойства в тех ситуациях, когда *априори* известно, что распределение вероятностей пребывания мишени в разных точках области A *не является* равномерным, будут рассмотрены в следующем разделе.

Кривая *б*, соответствующая поиску с помощью радара при достаточно благоприятных условиях, почти совпадает с кривой *г*. В обоих случаях увеличение удельного значения поисковых усилий Φ при выполнении условия $\Phi > 1$ практически не приводит к увеличению вероятности обнаружения мишени. Однако можно впасть в ошибку, если исходить из слишком оптимистической априорной оценки W, «искусственно» приводящей к неравенству $W/S > 1$. При этом мы пришли бы к неправильному выводу о том, что дополнительные поисковые усилия не требуются.

Кривая *в*, соответствующая поиску с помощью радара при наличии помех, обусловленных неоднородностью морской поверхности (или наличием посторонних объектов на поверхности земли), представляет интерес из-за наличия пиковых значений функций $F(x)$ и $p(x)$ при $|x| > 0$ (рис. 3 и 4). На рис. 8 мы видим, что кривая *в*, иллюстрирующая зависимость вероятности обнаружения мишени от Φ, почти выравнивается и становится параллельной оси абсцисс при совпадении пиков $F(x)$ и $F(S-x)$, а затем $P(\Phi)$ начинает медленно возрастать по мере уменьшения S (или по мере увеличения $\Phi = W/S$). Таким образом, производная $P'(\Phi) = dP/d\Phi$ принимает в окрестности точки $\Phi = 1$ нулевое значение, затем (при увеличении Φ) возрастает до некоторого максимального значения и наконец асимптотически стремится к нулю. Следовательно, кривая *в* не удовлетворяет требованиям хорошо организованного поиска, при котором должны выполняться условия (4). Как будет отмечено ниже, это обстоятельство затрудняет оптимизацию поисковых усилий. К счастью, с условиями поиска, при которых график функции $P(\Phi)$ имеет вид кривой *в*, сталкиваются на практике не так уж часто.

3.2. Случайно распределенные участки разведывательного маршрута

В условиях реального поиска челночный маршрут со *строго параллельными* и *равноотстоящими* участками (как это предполагалось в предыдущем разделе) часто оказывается труднореализуемым. Но если не удастся четко скорректировать участки разведывательного маршрута путем тщательной визуальной

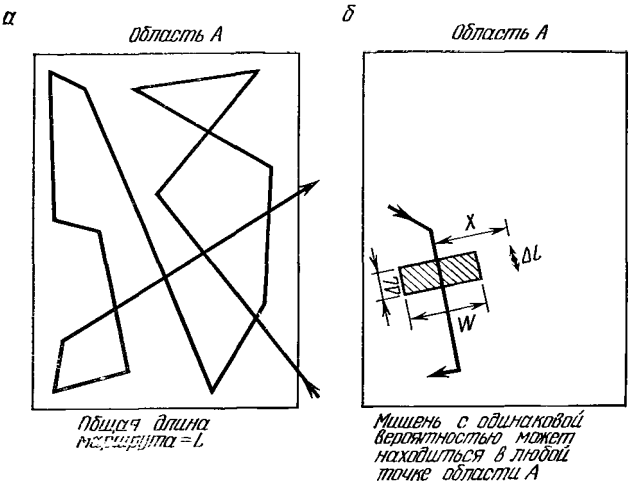


Рис. 9. Случайно ориентированные участки поискового маршрута и рандомизированное покрытие области A.

или радиолокационной триангуляции, то результаты, соответствующие оптимистическим оценкам вероятности обнаружения цели (см. графики *а*, *б*, *в*, *г* на рис. 8), вряд ли будут достигнуты. Представляется гораздо более правдоподобным, что результаты поиска будут в большей степени соответствовать допущению, что участки разведывательного маршрута, которые достаточно равномерно покрывают обследуемую область A, ориентированы совершенно случайным образом. Выражаясь более точно, мы утверждаем, что более реалистической является модель разведывательного маршрута, состоящего из нескольких (лежащих внутри области A) отрезков (рис. 9, *а*), сумма длин которых равняется L, а координаты начальных точек и ориентации которых взаимно независимы (строгая независимость имеет место для любой пары отрезков, не являющихся смежными).

В связи с анализом такого варианта поиска выделим на прямолинейном участке маршрута интервал ΔL (рис. 9, *б*). Если мишень с одинаковой вероятностью может оказаться в любой точке области A и если участки разведывательного маршрута разбросаны в области A случайным образом (в том смысле, в каком это отмечалось в предыдущем разделе), то можно утверждать, что местонахождение мишени с одинаковой вероятностью может быть ассоциировано с элементом ΔL в любой части любого участка. Если используемые для поиска технические средства характеризуются диапазоном по траверзу, равным $\frac{1}{2}W$ (см. график *г* на рис. 3), то вероятность обнаружения мишени при перемещении наблюда-

теля вдоль ΔL равняется отношению $W\Delta L$ (т. е. площади заштрихованного прямоугольника на рис. 9,*б*) к A (т. е. к площади всей обследуемой области). Это справедливо для любого вида зависимости вероятности обнаружения мишени от удаленности мишени по траверзу; вероятность того, что мишень окажется внутри элементарной площадки $dx\Delta L$, находящейся на расстоянии x от следа траектории движения наблюдателя на обследуемой поверхности, равняется $dx\Delta L/A$. Таким образом, вероятность обнаружения цели при перемещении наблюдателя на отрезке ΔL, согласно определению приведенной ширины полосы поиска W [см. соотношение (11)], равняется

$$P=(\Delta L/A)\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx=W\Delta L/A, \tag{17}$$

где $p(x)$ — вероятность обнаружения мишени, расстояние до которой по траверзу равняется x.

Далее, рассуждая так же, как в разд. 1, приходим к результатам, аналогичным соответствующим результатам разд. 1. Вероятность *необнаружения* мишени при прохождении наблюдателем участка маршрута ΔL равняется $[1-(W\Delta L/A)]$, а вероятность необнаружения, ассоциированная с последовательностью n интервалов разведывательного маршрута, равняется $[1-(W\Delta L/A)]^n$. Поскольку число интервалов длиной ΔL на всем разведывательном маршруте равно $L/\Delta L$, для вероятности *обнаружения* цели в результате всего разведывательного поиска имеем

$$P(\Phi)=1-\left[1-\frac{W\Delta L}{A}\right]^{L/\Delta L}\xrightarrow[\Delta L\to\infty]{}1-e^{-\Phi}, \tag{18}$$

где, как и в предыдущих выкладках, $\Phi=W\Delta L/A$ — удельное значение поисковых усилий. График функции (18) (вместе с графиками функции $P(\Phi)$ в случае рассмотренного выше поиска при движении по челночному маршруту с параллельными участками) приведен на рис. 8.

Таким образом, как только вследствие случайных отклонений геометрически правильный рисунок разведывательного маршрута (рис. 6) окажется деформированным, вероятность успешного завершения поисковой операции независимо от типа используемых при этом технических средств будет характеризоваться той же самой экспоненциальной зависимостью от поисковых усилий, как и в простейшем случае визуального поиска (см. формулу (5) в разд. 1). Само собой разумеется, что параметры данного экспоненциального распределения (которые выражаются через W и L) принимают числовые значения, отличные от числовых значений ω и t в формуле (3), зависящих от характеристик разведывательной аппаратуры и используемых в целях поиска

транспортных средств. Тем не менее сходство выражений для $P(\Phi)$ в указанных случаях означает, что можно разработать способ оптимизации распределения поисковых усилий, который почти совершенно не зависит от характера поиска, если поиск сопряжен с визуальным (радиолокационным и т. д.) покрытием некоторой области.

Графики, приведенные на рис. 8, показывают, что всякий раз, когда это возможно, следует строить разведывательный маршрут по схеме, изображенной на рис. 6. Однако при этом необходимо, чтобы участки этого маршрута действительно были строго параллельны и эквидистантны. В противном случае появляется опасность переоценки эффективности поиска. Наконец, следует иметь в виду, что для *равномерного* покрытия обследуемой площади даже при случайной ориентации участков разведывательного маршрута требуется выполнение большого объема работ по планированию разведывательной операции и управлению полетом.

3.3. Различные примеры

В работах [12, 14] рассматривается проблема поиска совершенно иного типа, когда подлежащая обнаружению мишень имеет очень большие размеры, а субъект поиска действует вслепую и должен обнаружить мишень, перемещаясь возле этой мишени, пока на нее не наткнется. Так, например, в задаче поиска берега речь идет о пловце, который оказался в условиях плохой видимости (например, из-за сильного тумана) и который знает точно, как велико расстояние до берега, но не имеет ни малейшего представления о том, в каком направлении находится берег. При этом требуется либо минимизировать максимум расстояния, которое нужно преодолеть пловцу в поисках берега [14], либо минимизировать математическое ожидание длины пути, который должен проделать спасающийся пловец, пока он не выберется на сушу [12].

Заслуживает внимания поиск протяженных объектов другой конфигурации. Например, в работе [13] найден оптимальный путь обнаружения (путем касания) круга известного радиуса, когда наблюдатель знает, на каком расстоянии, но не знает, в каком направлении от него этот круг находится. Полученный в данной работе результат может оказаться также полезным при попытке локализации точечной цели при известном расстоянии до этой цели от наблюдателя и неизвестном направлении поиска в случае, когда используются технические средства, обеспечивающие полную гарантию обнаружения мишени в полосе шириной $2R$ (при $L > R$). Однако большого практического значения получаемые при этом результаты не имеют, поскольку

они основываются на предположении о точной информированности субъекта поиска о расстоянии до искомой цели, причем решение весьма чувствительно к принимаемым в этой связи допущениям.

В других задачах, которые рассматривались в работе [1] и, например, в работе [15], осуществляется поиск максимумов (или нулей) функций нескольких переменных методами динамического (или линейного) программирования. Обзор исследований такого рода увел бы нас слишком далеко в сторону от проблем, которым посвящена данная глава.

4. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОИСКОВЫХ УСИЛИЙ

Если о координатах мишени ничего не известно и мы знаем лишь, что она находится внутри области A, то оптимальным является равномерное распределение имеющихся разведывательных возможностей по всей площади A. В этом легко убедиться, рассматривая поисковое покрытие $E_j = WL_j$ как функцию площади подобласти A_j, принадлежащей области A. Вероятность обнаружения мишени в подобласти A_j равняется произведению вероятности того, что мишень окажется в этой подобласти (эта вероятность равняется отношению площади A_j к площади A), на вероятность $P(\phi_j)$ $[\phi_j = E_j/A_j]$ того, что мишень будет обнаружена, *если* она *действительно окажется* в подобласти A_j. Таким образом, полная вероятность успешного исхода поиска равняется $P(\phi) = \sum (A_j/A)\, P(\phi_j)$. Если покрытие области A осуществлять неравномерно, сделав ϕ_j больше (скажем, на величину $\Delta\phi$) среднего значения $\phi = WL/A$ и, следовательно, на столько же (т. е. на $\Delta\phi$) уменьшив значение отношения E_i/A_i для другой подобласти (A_i), площадь которой равняется площади A_j, то тогда в силу закона уменьшения влияния дополнительных поисковых усилий на вероятность обнаружения мишени $P(\phi)$ окажется более низкой, чем при равномерном покрытии A во всех рассмотренных выше случаях. Поскольку $P(\phi + \Delta\phi) - P(\phi) < P(\phi) - P(\phi - \Delta\phi)$, полная вероятность обнаружения мишени уменьшается на величину $(A_i/A)\,[P(\phi + \Delta\phi) + P(\phi - \Delta\phi) - 2P(\phi)]$.

4.1. Случай частичной осведомленности о расположении мишени

Теперь предположим, что о местонахождении объекта поиска кое-что известно, так что *априорная* вероятность наличия этого объекта в той или иной подобласти A изменяется при переходе от одной подобласти к другой. Сначала рассмотрим самый общий (хотя и редко встречающийся на практике) случай, когда

плотность априорной вероятности $g(r)$ попадания объекта поиска в точку, определяемую вектором r, меняется при переходе от одной точки области A к другой. Поскольку $g(r)$ есть плотность вероятности,

$$\iint_A g(r)\,dA = 1. \tag{19}$$

Если плотность поискового покрытия $\phi(r) = \lim\limits_{A_j \to 0} (WL_j/A_j) = d\Phi/dA$ также зависит от положения точки в области A, то вероятность $\mathcal{P}(\Phi)$ обнаружения цели в ходе операции с заданным разведывательным ресурсом

$$\Phi A = \iint_A \phi(r)\,dA = WL, \tag{20}$$

распределенным по области A, есть интеграл от произведения вероятности $g(r)\,dA$ попадания цели в интервал dA на вероятность $P[\varnothing(r)]$ того, что цель будет обнаружена, если она окажется внутри dA, т. е.

$$\mathcal{P}(\Phi) = \iint_A g(r)\,P[\phi(r)]\,dA. \tag{21}$$

Пусть требуется сравнить два случая с разными плотностями распределений поисковых усилий (при одном и том же суммарном покрытии Φ); пусть плотность поискового покрытия в точке r в первом случае равняется $\phi(r)$, а во втором случае $\phi(r) + \delta\phi(r)$, где $\delta\phi(r)$ есть относительно малая величина (такая, что $\iint \delta\phi\,dA = 0$ и, следовательно, интеграл (20) в обоих случаях имеет одно и то же значение ΦA). Полные вероятности обнаружения мишени будут при этом отличаться на величину

$$\Delta\mathcal{P} = \iint_A g(r)\,[P(\phi) + \delta\phi P'(\phi) - P(\phi)]\,dA =$$

$$= \iint_A \delta\phi\, g(r)\,P'[\phi(r)]\,dA, \tag{22}$$

где $P'(\phi) = dP/d\phi$. Распределение поисковых усилий $\phi(r)$ обеспечит максимальную вероятность обнаружения $\mathcal{P}(\Phi)$ лишь при $\Delta P = 0$. Последнее условие выполняется при *любом* выборе функции $\delta\phi$ (удовлетворяющем требованию, чтобы $\delta\phi$ было мало и $\int \delta\phi\,dA = 0$) только в том случае, если произведение $g(r)P'[\phi(r)]$ равняется некоторой константе G, не зависящей от r.

Это оптимальное распределение $\phi(r)$, разумеется, должно удовлетворять условию (20), т. е. интеграл от ϕ по области A должен равняться $WL = \Phi A$. Только что установленное нами требование, которое заключается в том, что для того, чтобы вероятность $\mathcal{P}$ имела максимальное значение, должно выполняться условие $P'(r) = G/g(r)$, может оказаться в определенном смысле непоследовательным; действительно, из графиков на рис. 8 видно, что во всех случаях $P'(\phi) = 1$ при $\phi = 0$. Тогда, если для любого значения r плотность априорной вероятности $g(r)$ меньше G, требование $P' = G/g$ не может быть удовлетворено и, следовательно, соответствующая площадь должна иметь нулевое покрытие. Если исходить из требования оптимальности покрытия обследуемой области, то не следует стремиться к покрытию тех зон в области A, где $G/g > 1$; освобождаемые при этом разведывательные ресурсы можно использовать более эффективно для покрытия тех площадей, где $G/g < 1$. Таким образом, если поисковые ресурсы ограничены, то план проведения поисковой операции, общие характеристики которой отражены формулой (5), должен быть весьма избирательным. (Подробное обоснование полученного выше результата, а также доказательство того, что при выполнении сформулированных выше требований $\mathcal{P}$ принимает максимальное (а не минимальное) значение, содержатся в работах [5, 6].)

При более строгом подходе процедуру нахождения плотности поискового покрытия $\phi(r)$, максимизирующей вероятность обнаружения цели $\mathcal{P}(\Phi)$ при заданном суммарном разведывательном ресурсе $\Phi A = WL$, следует осуществлять в два этапа.

(1) Сначала при надлежащем выборе значения константы $G = g(r)\,P'[\phi(r)]$ можно исключить из общей площади области A те ее части, для которых $G/g(r) > 1$. На выделенной по указанному выше критерию площади A_e плотность поисковых усилий должна равняться нулю. На оставшейся площади $A_s = A - A_e$ функция $\phi(r)$ должна быть такой, чтобы $P'[\phi(r)] = G/g(r)$; при этом на всей площади A_s производная $P'[\phi(r)]$ удовлетворяет неравенству $P'[\phi(r)] \leqslant 1$.

(2) Кроме того, константа G должна удовлетворять следующему условию: интеграл от плотности поисковых усилий ϕ, выбранной на этапе (1), по области A_s должен равняться $\Phi A = WL$.

Более компактно эти требования можно сформулировать через обратную функцию $1/P'(\phi) = g/G$. Пусть $f(g/G) = \phi$, так что $1/P'[f(g/G)] = g/G$ и $f[1/P'(\phi)] = \phi$. Тогда, исходя из требования максимизации вероятности обнаружения цели в области A, внутри которой плотность *априорной* вероятности того, что цель окажется в точке r, равняется $g(r)$, для заданного

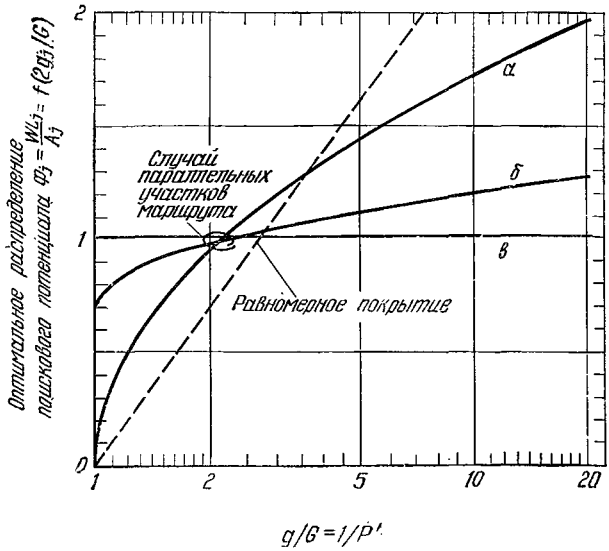


Рис. 10. Обратная функция $f(1/P') = \Phi$ для случаев *а*, *б*, *в*, *г*, проиллюстрированных на рис. 8.

Эта функция используется при вычислении оптимального распределения поисковых усилий в ситуациях, когда плотность вероятности g в различных точках области A не является одинаковой.

значения суммарных поисковых усилий $WL = \Phi A$ находим значение G, такое, что

$$\left.\begin{aligned}&\iint\limits_{A_s} f[g(r)/G]\,dA = \Phi A \text{ (интегрирование проводится по той части } A_s \\ &\text{области } A\text{, внутри которой } g(r)/G \geqslant 1\text{). Тогда оптимальная плотность поиска в точке } r \text{ равняется } f[g(r)/G] \text{ в } A_s \text{ и нулю в } A_e = \\ &= A - A_s\text{, где } g/G < 1\text{. Получающаяся в результате максимальная вероятность обнаружения мишени равняется} \\ &\qquad \mathcal{P}(\Phi) = \iint\limits_{A_s} g(r)\,P\{f[g(r)/G]\}\,dA.\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Графики функции $f(1/P')$ соответственно для случаев *а*, *б*, *в*, *г*, представленных на рис. 8, приведены на рис. 10.

Выше мы исходили из предположения, что $P'(\phi)$ имеет однозначно определенную обратную функцию f. Это условие действительно выполняется в случаях *а*, *б*, *г* и при рандомизированном поиске (рис. 8). Однако в случае *в* функцию f однозначно определить не удается, так как P' не является монотонно убывающей функцией ϕ. Пока для области A в целом выполняется неравенство $g/G \leqslant 15$, осложнение, возникающее в случае *в*, можно игнорировать. Однако если имеющиеся поисковые ресур-

сы достаточно велики, так что внутри некоторой подобласти обследуемой области A выполняется неравенство $g/G > 20$, то часть этих ресурсов следует выделить для зоны, соответствующей на графике *в* рис. 4 «провалу» в окрестности точки $x = 0$, с тем чтобы поисковые усилия в этой зоне существенно интенсифицировать. Поскольку случай *в* на практике встречается крайне редко, к обсуждению его характеристик мы больше возвращаться не будем.

Даже в нормальном случае, когда функция $\phi = f(1/P')$ определяется однозначно для каждого значения аргумента $1/P'$, стратегия, удовлетворяющая условиям (23), может не соответствовать распределению поисковых усилий, запланированному на основе одной лишь интуиции. Утверждение, что зон, характеризующихся низким значением априорной вероятности нахождения в них цели, следует избегать, вытекает из того факта, что максимальное значение P' равняется единице при $\phi = 0$. Когда значение $g(r)$ в некоторой зоне превышает значение g в других зонах области A, поисковые усилия целесообразно концентрировать в зоне с большим значением g до тех пор, пока в ходе поиска плотность апостериорной (байесовской) вероятности локализации цели в этой зоне не примет значение, равное значению g в следующей по предполагаемой «перспективности» зоне. При этом, если разведывательные ресурсы ограничены, некоторые из зон с низким значением g из планов поиска выпадут полностью. Процесс оптимальной поисковой операции можно, таким образом, рассматривать как последовательность решений относительно того, в какой части обследуемой территории наиболее результативным окажется каждый следующий «квант» поисковых усилий (см., например, [2] и [7]).

Когда наряду с настоящими мишенями, которые подлежат обнаружению, на обследуемой территории находятся еще и фальшмишени (назовем их «призраками»), анализ ситуации существенно усложняется. По этой причине лишь в немногих из такого рода случаев удалось получить исчерпывающие решения. Результаты поиска сильно зависят при этом от количества и «качества» призраков и от стратегии распределения усилий по их идентификации. Призраки могут быть обусловлены спорадическими ложными срабатываниями используемых при поиске технических средств (возникающими, в частности, из-за радиолокационных помех, генерируемых «дефектами» поверхности суши или моря и из-за реверберации в случае использования сонаров), когда интервал времени, в течение которого требуется установить принадлежность сигнала в категории ложных тревог, слишком мал. Но призраками могут быть и вполне конкретные объекты (такие, как остов затонувшего судна или, например, вторичное эхо, порожденное подводной скалой), для отождествления ко-

торых (как призраков) требуется определенное время, но которые, будучи однажды отождествленными, могут быть нанесены на карту (или на план местности), так что повторные их отождествления не потребуются. Следует также иметь в виду, что призраками могут быть и подвижные объекты (например, судно дружественного государства или обыкновенный кит); в этом случае идентификация призрака потребуется каждый раз, когда появится соответствующий сигнал.

Для организации поиска при наличии различного рода фальшмишеней можно предложить множество разных стратегий. В тех зонах поиска, где призраки порождают главным образом реверберацию, можно принять решение выделять на выяснение причины поступления сигнала время, несколько большее по сравнению со средним значением интервала времени, необходимого для проверки заключения, что сигнал поступил по причине, не имеющей отношения к настоящей мишени. Оптимальный план поиска для конкретизированного варианта такого рода стратегии разработан Стоуном и Стэйшайном [31]. Их результаты показывают, что в описанной выше ситуации применение теории на практике сопряжено с существенным возрастанием степени сложности соответствующих вычислительных процедур. Отсюда можно сделать вывод, что при наличии призраков поисковые усилия следует увеличивать (по сравнению с поисковыми усилиями в отсутствие призраков) прямо пропорционально оценочному значению плотности вероятности возникновения призраков в обследуемых зонах.

В тех случаях, когда в качестве призраков выступают макеты подлежащих обнаружению мишеней (фальшмишени), субъект поиска вынужден находиться в «контакте» с подозреваемым объектом до тех пор, пока не установит, что ему удалось обнаружить: фальшмишень или же настоящую мишень. В таких ситуациях использование формул, полученных в работе [32], также сопряжено с большими вычислительными трудностями. Для случая, когда призраки находятся в неподвижном состоянии и, следовательно, их можно фиксировать на фотографической карте, Добби [8] разработал последовательную процедуру поиска. Эта процедура применительно к простейшей ситуации будет описана в следующем разделе.

Следует отметить, что во многих случаях, когда речь идет о поиске при наличии фальшмишеней, более подходящим критерием оптимальной стратегии поиска оказывается минимум суммарных поисковых усилий (включая усилия на отождествление призраков), которые, согласно ожиданию, необходимы для обнаружения цели, чем максимум вероятности обнаружения при заданном разведывательном ресурсе. В некоторых случаях эти два критерия могут приводить к различным стратегиям [8].

4.2. Практическое применение полученных результатов

Использование теоретических положений (23) при всей их общности сопряжено с рядом неудобств. Прежде всего, лишь в редких случаях априорная осведомленность субъекта поиска о местонахождении мишени оказывается достаточной для точного определения числовых значений $g(r)$ во всех точках области A. Часто известно лишь, что цель находится где-то в пределах A; в этом случае поисковые усилия внутри области A должны быть распределены равномерно. Иногда можно разбить исходную область A на две подобласти, утверждая при этом, что мишень с большей вероятностью должна находиться в одной из этих подобластей и с меньшей — в другой. Довольно редко априорная информированность о местонахождении мишени может оказаться более детальной. Следовательно, полезно разработать процедуры, реализующие общий результат (23) в случае, когда исходную область A можно разбить на две подобласти с разными значениями плотности априорной вероятности местонахождения мишени.

При таких исходных предпосылках плотность вероятности $g(r)$ одинакова во всех точках внутри каждой из подобластей A_1 и A_2 (так что плотность распределения поисковых усилий ϕ внутри каждой из подобластей A_1 и A_2 также не зависит от выбора точки), но g_1 отличается от g_2 (и соответственно ϕ_1 отличается от ϕ_2). Значит, (23) можно привести к безразмерному виду, используя в качестве параметров и неизвестных величин

$$\left.\begin{array}{c}
\text{отношения площадей } \alpha_j = A_j/A \ (j=1,\ 2)\ (\alpha_1+\alpha_2=1);\\
\text{вероятность того, что мишень окажется внутри } j\text{-й подобласти}\\
(j=1,\ 2):\\
\gamma_j = A_j g_j = A\alpha_j g_j,\ (\gamma_1+\gamma_2)=1;\\
\text{минимальное значение вероятности наличия мишени в заданной зоне,}\\
\text{при котором целесообразно ведение поиска: } \lambda = AG;\\
\text{оптимальное удельное поисковое покрытие } j\text{-й подобласти}\\
(j=1,\ 2):\\
\Phi_j = \alpha_j\phi_j = WL_j/A = \alpha_j f\,(g_j/G) = \alpha_j f\,(\gamma_j/\alpha_j\lambda),\\
\Phi_1+\Phi_2=\Phi=WL/A;\\
\text{оптимальную вероятность обнаружения цели } j\text{-й подобласти}\\
(j=1,\ 2):\\
\mathcal{P}_j = \gamma_j P f\,(\gamma_j/\alpha_j\lambda);\ \mathcal{P}(\Phi)=\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2.
\end{array}\right\} \quad (24)$$

Значения Φ_j и $\mathcal{P}_j/\lambda$ как функции γ_j/λ для случая визуального поиска при движении наблюдателя по челночному маршруту с параллельными участками и при равномерном рандомизированном покрытии обследуемых подобластей представлены с помощью номограмм на рис. 11—14. Для получения исходных

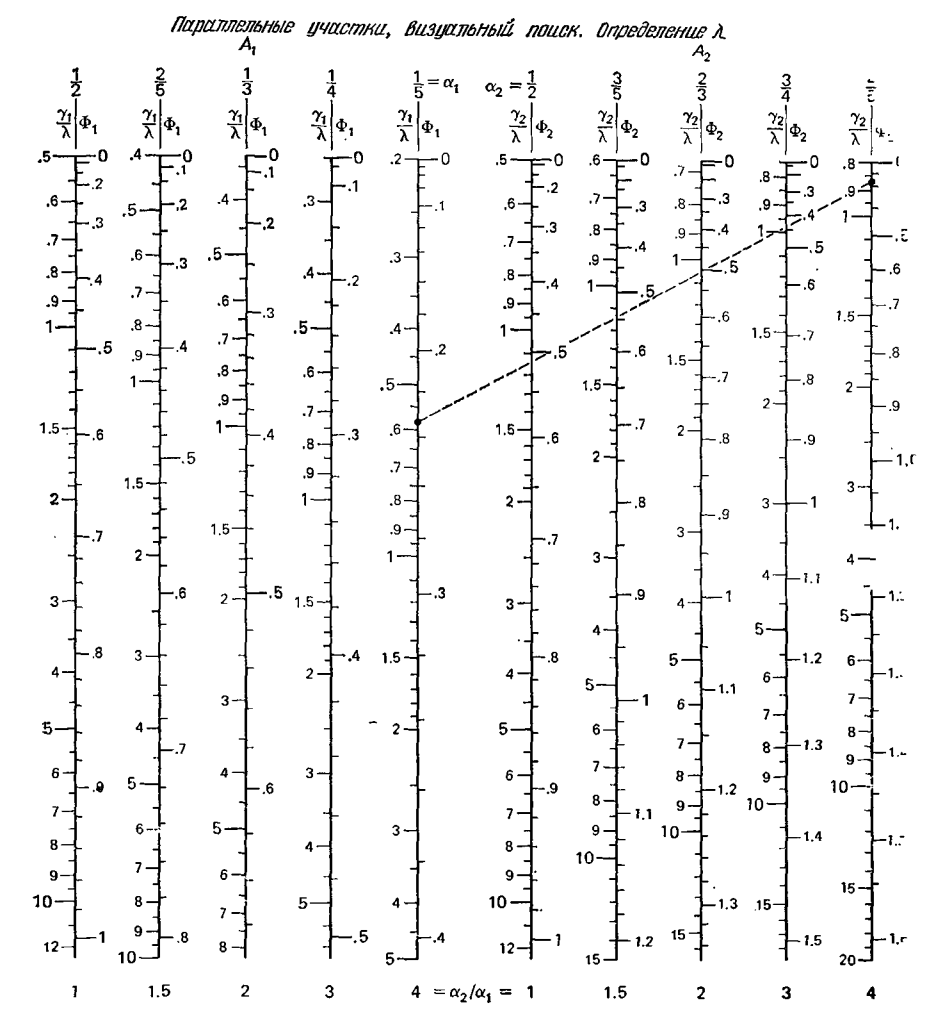


Рис. 11. Номограмма для определения оптимального распределения Φ между двумя подобластями области A (соответствует графикам a на рис. 8 и 10).

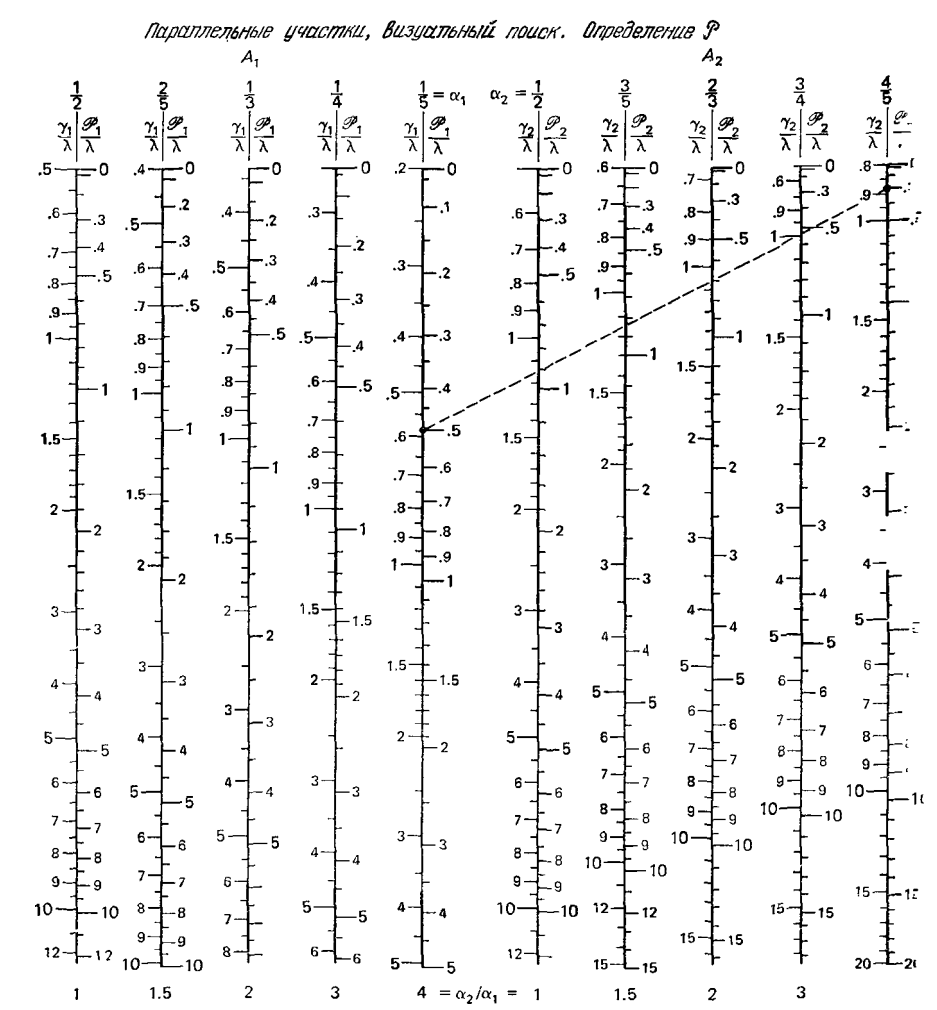


Рис. 12. Номограмма для определения вероятностей обнаружения мишени в подобластях A_1 и A_2 (используется после вычислений по номограмме приведенной на рис. 11).

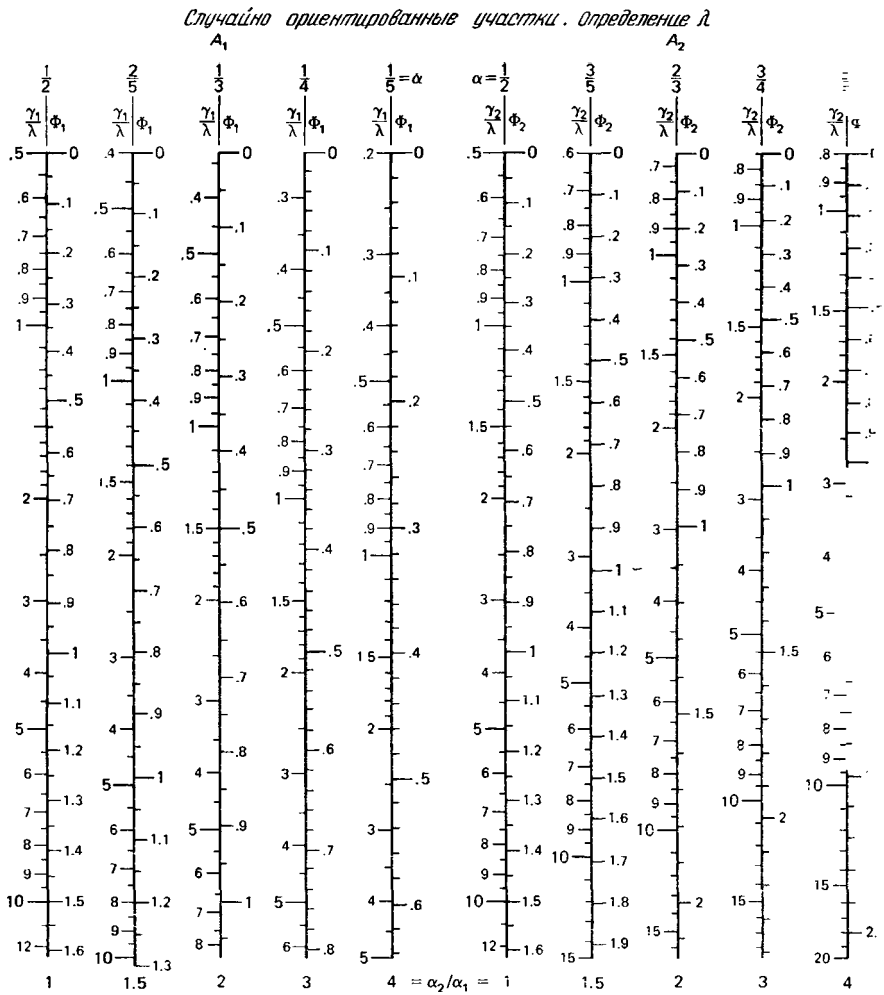


Рис. 13. Номограмма для определения оптимального распределения Φ между двумя подобластями области A при равномерно распределенных случайно ориентированных участках разведывательного маршрута.

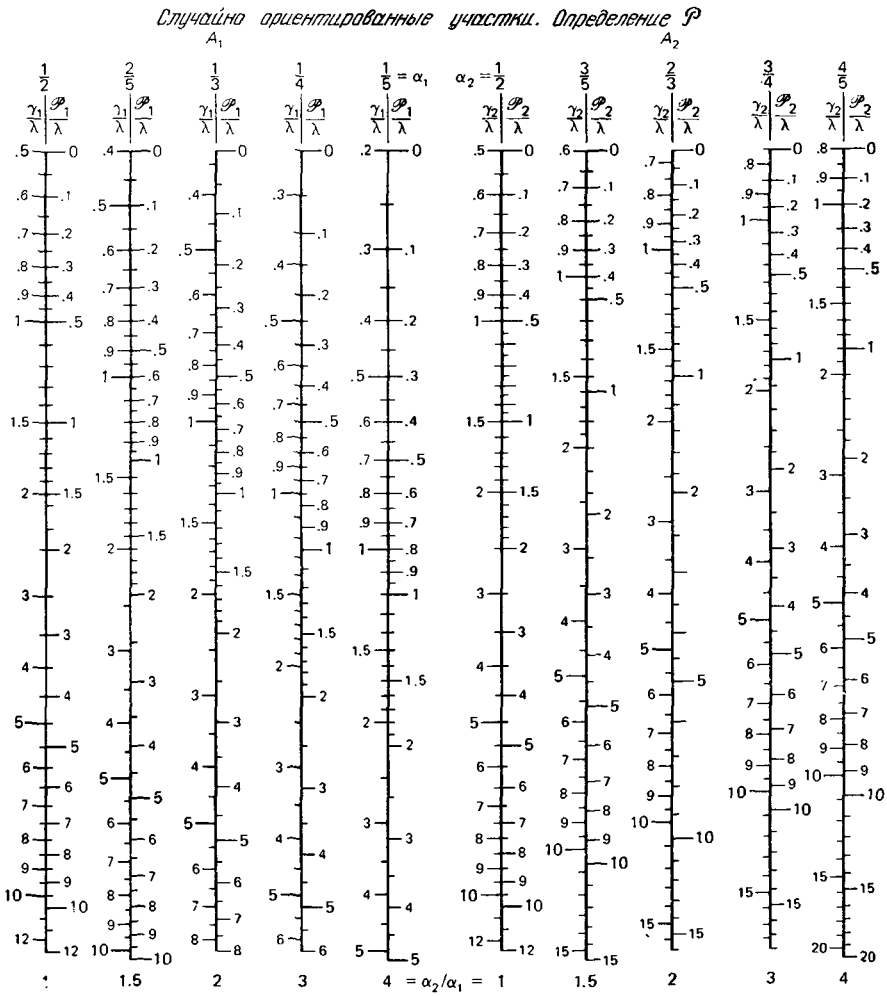


Рис. 14. Номограмма для определения вероятностей обнаружения мишени в подобластях A_1 и A_2 (используется после вычислений по нмогроамме, приведенной на рис. 13).

формул в каждом из упомянутых выше случаев использовались соотношения (16) и (18).

$$\left.\begin{array}{l}\text{В случае визуального поиска при движении наблюдателя}\\ \text{по челночному маршруту с параллельными участками}\\ P(\phi)=\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\phi\right);\quad P'(\phi)=\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\phi^2\right),\\ f(1/P')=(2/\sqrt{\pi})\sqrt{\ln(1/P')}=\phi;\\ \text{в случае равномерного покрытия обследуемой площади}\\ \text{путем перемещения наблюдателя по случайно}\\ \text{ориентированным (внутри подобласти) участкам маршрута}\\ P(\phi)=1-e^{-\phi};\quad P'(\phi)=e^{-\phi},\\ f(1/P')=\ln(1/P')=\phi.\end{array}\right\}\qquad(25)$$

Именно эти соотношения были использованы при построении номограмм, приведенных на рис. 11—14.

Левая половина каждой из номограмм соответствует меньшей по площади подобласти, которая обозначена через A_1, а правая половина относится к подобласти A_2. Номограммы на рис. 11 и 13 предназначены для определения λ при заданном суммарном разведывательном ресурсе $WL = A\Phi$, выделенном на рассматриваемую поисковую операцию. Предположим, что мишень с вероятностью γ_1 находится в подобласти $A_1 = \alpha_1 A$ подлежащей обследованию области A и с вероятностью $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$ — на оставшейся части территории области A ($A_2 = \alpha_2 A$). Прежде всего выберем пару столбцов, в которых указаны отношения площадей подобластей A_1 и A_2 к общей площади A (т. е. значения α_1 и $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$).

Затем определим отношение вероятности попадания мишени в подобласть A_2 к вероятности того, что мишень окажется в подобласти A_1 (т. е. определим γ_2/γ_1). Шкалы для γ_j/λ являются логарифмическими, так что при параллельном переносе (вверх или вниз) прямолинейного отрезка, соединяющего точки на вертикальных линиях столбцов номограммы, отношение γ_2/γ_1 остается неизменным. Для каждого значения γ_j/λ, указанного слева от вертикальной линии каждого из столбцов, приведено соответствующее значение Φ_j, которое указано на шкале, помещенной в каждом столбце справа. Мы перемещаем отрезок, соединяющий точки на вертикальных линиях столбцов в зонах A_1 и A_2, параллельно самому себе до тех пор, пока сумма значений Φ_1 и Φ_2 не станет равной тому удельному значению поисковых усилий, на которые можно рассчитывать при планировании разведывательной операции [т. е. пока не будет выполнено условие $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi = (WL)/A$].

На рис. 11 приведен пример, в котором вероятность того, что мишень окажется в области с меньшей площадью $A_1 = 0{,}2A$,

полагается (на основе догадок) равной $\gamma_1 = 0{,}4$, а вероятность того, что мишень будет расположена на остальной территории $A_2 = 0{,}8A$, полагается равной $\gamma_2 = 0{,}6$. Кроме того, принимается решение, что на поиск мишени можно затратить усилия в объеме $WL = 0{,}5A$. Отношение γ_2 к γ_1 равняется отношению единицы к 1,5. Поэтому мы устанавливаем вначале линейку так, чтобы можно было провести линию через точку $\gamma_1/\lambda = 1$ в столбце $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ и через точку $\gamma_2/\lambda = 1{,}5$ в столбце $\alpha_2 = \frac{4}{5}$, а затем перемещаем линейку параллельно до тех пор, пока не соединим такие метки на шкалах для Φ_1 и Φ_2, которые в сумме дадут $\Phi = 0{,}5$. Это условие достигается, когда линейка принимает положение, при котором соответствующая прямая пересекает вертикальные линии столбцов для $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ и $\alpha_2 = \frac{4}{5}$ в точках, соответствующих $\gamma_1/\lambda = 0{,}58$, $\Phi_1 = 0{,}235$ и $\gamma_2/\lambda = 0{,}87$, $\Phi_2 = 0{,}265$. Таким образом, мы должны израсходовать почти половину (0,47) наших поисковых усилий в меньшей по площади подобласти A_1. Заметим, что если бы имеющиеся в нашем распоряжении разведывательные ресурсы были меньше, чем $0{,}26\,A$, правый конец отрезка, параллельного исходному отрезку между столбцами для $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ и $\alpha_2 = \frac{4}{5}$, при параллельном переносе вышел бы за пределы соответствующей шкалы; это означает, что значение Φ_2 следует выбрать нулевым и все поисковые усилия должны быть сосредоточены в подобласти A_1, несмотря на то что шансы обнаружить мишень в подобласти A_2 в полтора раза превышают шансы обнаружения мишени в подобласти A_1. При столь малых разведывательных ресурсах целесообразнее реализовать их полностью в меньшей по площади подобласти, где плотность вероятности наличия мишени выше.

Поскольку, согласно исходному предположению, $\gamma_1 = 0{,}4$, величина λ должна равняться $0{,}4/0{,}58 = 0{,}69$. Для проверки разделим $\gamma_2 = 0{,}6$ на 0,87 и снова получим 0,69. Для получения прогнозируемой вероятности обнаружения мишени обратимся к рис. 12 и проведем прямую линию через те же самые точки $\left(\gamma_1/\lambda = 0{,}58 \text{ и } \gamma_2/\lambda = 0{,}87 \text{ на шкалах в столбцах для } \alpha_1 = \frac{1}{5} \text{ и } \alpha_2 = \frac{4}{5}\right)$, что и на предыдущей номограмме. Поскольку уже известно, что $\lambda = 0{,}69$, находим, что вероятность $\mathcal{P}_1$ обнаружения мишени в подобласти A_1 равняется 0,34, а вероятность обнаружения мишени в подобласти A_2 равняется $\mathcal{P}_2 = 0{,}21$, т. е. полная вероятность обнаружения цели в области A равняется 0,55.

В рассмотренном выше примере нашел отражение случай визуального поиска при движении наблюдателя по челночному

маршруту с параллельными участками. Рис. 13 и 14 относятся к более распространенному варианту поиска с равномерным покрытием, когда в каждой из подобластей участки разведывательного маршрута ориентированы случайным образом; при этом для поиска цели могут быть использованы технические средства, требования к которым заранее не уточняются (единственным параметром, зависящим от вида разведывательной аппаратуры и влияющим на конечный результат, является приведенная ширина полосы обзора).

С помощью номограмм, приведенных на рис. 11—14, легко построить графики для вероятности обнаружения цели и распределения разведывательных усилий применительно к любой конкретной ситуации. В качестве иллюстрации на рис. 15 показаны графики, позволяющие сравнивать упомянутые выше характеристики визуального поиска при движении субъекта поиска по челночному маршруту с параллельными и случайно ориентированными участками для двух разных сочетаний α_1, α_2 и γ_1, γ_2. В первом случае, который представлен графиками, расположенными слева, имеем большую разницу в площадях A_1 и A_2 ($\alpha_1 = 0{,}2$; $\alpha_2 = 0{,}8$) и сравнительно небольшую разницу в вероятностях попадания мишеней в подобласти A_1 и A_2 ($\gamma_1 = 0{,}4$; $\gamma_2 = 0{,}6$), так что $g_1 = \gamma_1/\alpha_1 = 2$ существенно больше $g_2 = 0{,}75$. Таким образом, поиск начинается в A_1, хотя после незначительных поисковых усилий в этой подобласти целесообразно перейти к поиску в более обширной подобласти A_2. Графики, расположенные на рис. 15 справа, соответствуют случаю, когда площади подобластей A_1 и A_2 почти равны, а отношение вероятности наличия мишени в A_1 к вероятности того, что мишень окажется в A_2, равняется 2 ($\alpha_1 = 0{,}4$, $\gamma_1 = 0{,}67$; $\alpha_2 = 0{,}6$, $\gamma_2 = 0{,}33$).

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что графики, построенные для рандомизированного варианта поиска (нижний ряд графиков на рис. 15), весьма похожи на графики для случая, когда поиск ведется при движении наблюдателя по челночному маршруту с параллельными участками (верхний ряд графиков), но вероятность успешного завершения поисковой операции при одинаковых поисковых усилиях в случае рандомизированного перемещения субъекта поиска внутри обследуемой области примерно на 15% меньше, чем при упорядоченном поиске. Из графиков для случаев почти равных площадей A_1 и A_2 (на рис. 15 они расположены справа) видно, что поиск в подобласти, характеризующейся наименьшим значением вероятности наличия искомой мишени, не следует начинать до тех пор, пока значение WL не станет приблизительно равным $A/2$, но к тому времени, когда затраченные усилия достигнут уровня $3A/2$, оставшиеся разведывательные ресурсы следует разделить между A_1 и A_2 почти поровну; несмотря на то что вероятность

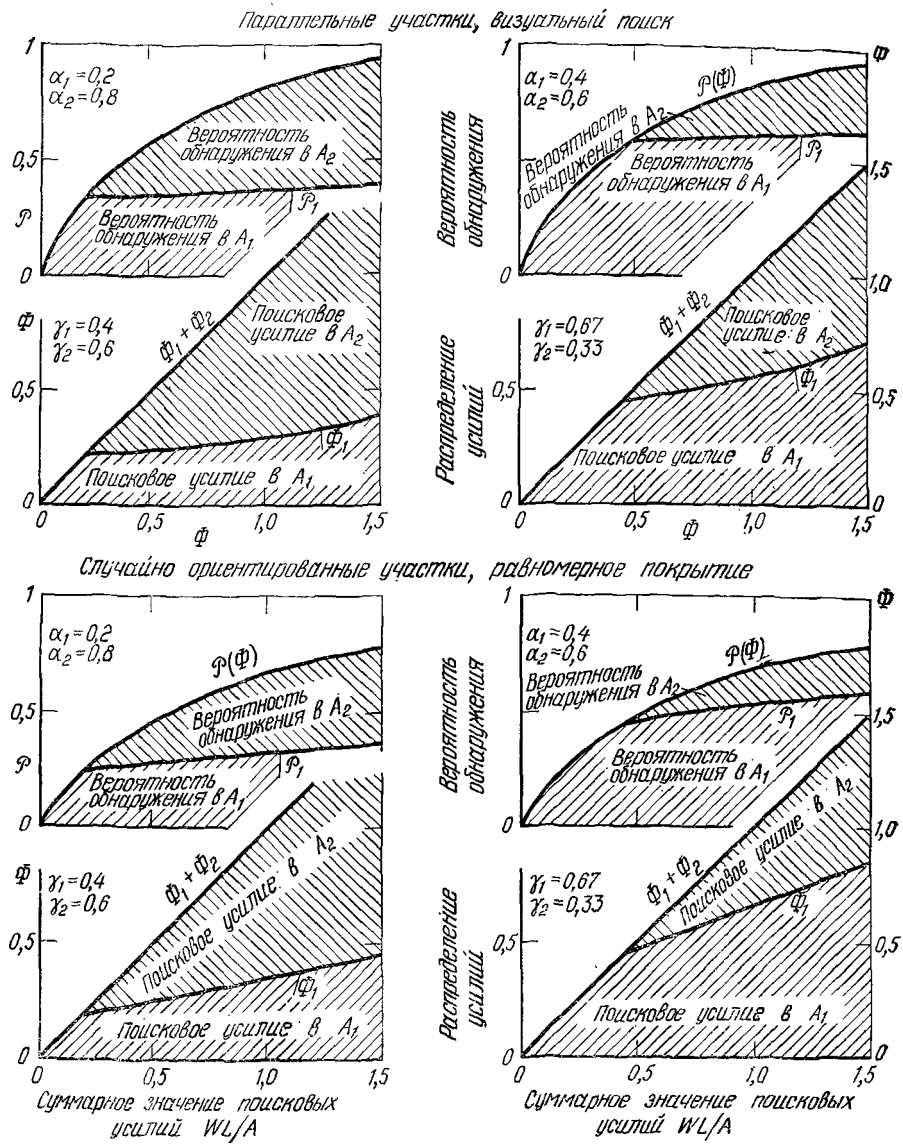


Рис. 15. Примеры использования номограмм, приведенных на рис. 11—14.

обнаружения мишени в подобласти A_2 продолжает оставаться меньше вероятности обнаружения мишени в подобласти A_1, дальнейшая ставка на поиск только в области A_1 не может повысить результативность поиска в целом.

В тех случаях, когда априорные оценки вероятностей наличия цели в различных местах области A настолько детальны, что возникает необходимость в разбиении этой области на число подобластей больше двух, для выполнения расчетов применительно к варианту рандомизированного перемещения наблюдателя можно разработать вычислительную процедуру с использованием мини-ЭВМ или обычной логарифмической линейки. Реализация положений (23), (24) и (25) сводится к последовательному выполнению следующих этапов:

1. После разбиения области A на N подобластей $A_i = \alpha_i A$ $(i = 1, \ldots, N)$, каждая из которых характеризуется определенной априори оценкой γ_i, производится ранжировка выделенных подобластей в порядке убывания значений $\gamma_j/\alpha_j = g_j A$, начиная с подобласти A_1, характеризующейся наибольшим значением отношения γ/α; потом ранжировка осуществляется в соответствии с неравенством $\gamma_{j-1}/\alpha_{-1} \geqslant \gamma_j/\alpha_j$. Затем вычисляются значения

$$K_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln(\gamma_j/\alpha_j) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

$$L_n = K_n - \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right] \ln(\gamma_{n+1}/\alpha_{n+1})$$

и полученные последовательности чисел представляются в виде таблиц. При континуальной интерпретации указанных выше соотношений L_n является монотонно возрастающей функцией n.

2. Если отношение суммарных разведывательных ресурсов к площади A (т. е. $\Phi = WL/A$) меньше, чем $L_1 = \alpha_1 \ln(\gamma_1\alpha_2/\gamma_2\alpha_1)$, то поисковые усилия следует сосредоточить в единственной подобласти A_1. Вероятность обнаружения мишени (при поиске только в пределах A_1) определяется по формуле

$$\mathcal{P} = \gamma_1(1 - e^{-\Phi/\alpha_1}) = \gamma_1(1 - e^{-WL/A_1}).$$

3. Если $L_{n-1} < \Phi = WL/A < L_n$, то поиск следует осуществлять только в подобластях $A_1, A_2, \ldots, A_n$; при этом на поиск мишени в j-й подобласти (т. е. в A_j) должны быть выделены разведывательные ресурсы в объеме

$$A\Phi_j = A\alpha_j\left[\ln\left(\frac{\gamma_j}{\alpha_j}\right) + \left(\frac{\Phi - K_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\right)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Это вытекает из соотношения $\Phi = K_n - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\ln\lambda$, если положить $\lambda = \exp[(K_n - \Phi)/(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)]$. Следователь-

но, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \Phi_j = K_n + \Phi - K_n = \Phi.$$

Таким образом, вероятность того, что в ходе поиска мишень будет обнаружена в подобласти A_j, определяется соотношением

$$\mathcal{P}_j = \gamma_j - \alpha_j\lambda = \gamma_j - \alpha_j \exp\left[\frac{K_n - \Phi}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}\right], \text{ так что}$$

$$\mathcal{P} = \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j - \alpha_j\lambda).$$

4. В том случае, когда $\Phi > L_N$, где L_N — наибольшее из всех L_j, ассоциированных с рассматриваемым разбиением площади A на подобласти с разными оценочными значениями вероятностей попадания в них искомой мишени, поиск следует осуществлять во всех подобластях области A с поисковым усилием в j-й подобласти, равным

$$A\Phi_j = WL_j = A\alpha_j [\ln (\gamma_j/\alpha_j) + \Phi - K_N], \tag{26}$$

что вытекает из уравнения $\lambda = \exp (K_N - \Phi)$. При этом вероятность обнаружения мишени в подобласти A_j определяется соотношением

$$\mathcal{P}_j = \gamma_j - \alpha_j\lambda = \gamma_j - \alpha_j \exp (K_N - \Phi), \text{ так что}$$

$$\mathcal{P} = 1 - \exp (K_N - \Phi).$$

Заметим, что $K_N \leqslant 0$, причем $K_N = 0$ только тогда, когда все отношения $\gamma_j/\alpha_j = g_jA$ равны между собой и, следовательно, равны единице. Заметим также, что если бы поисковые усилия были распределены по всей области A равномерно (при случайно ориентированных участках разведывательного маршрута), то вероятность обнаружения мишени имела бы вид $1 - \exp(-\Phi)$. Следовательно, при $K_N < 0$ (т. е. когда плотности вероятности $g_j = \gamma_j/\alpha_j$ попадания мишени в подобласти A_j, $j = 1, 2, \ldots$, не равны между собой) вероятность успешного завершения поиска $\mathcal{P}$ возрастет, если поисковые усилия распределить в соответствии с формулой (26). Другие варианты практического использования полученных выше результатов рассмотрены в работе [24].

Можно показать (см. [6]), что путем реализации указанных выше этапов получается распределение поисковых усилий, которое обеспечивает наибольшее из возможных значений $\mathcal{P}$ при заданном Φ. Одновременно можно утверждать, что при распределении поисковых усилий в соответствии с приведенными выше формулами для достижения определенного уровня $\mathcal{P}$ требуется минимальное суммарное значение поисковых усилий Φ.

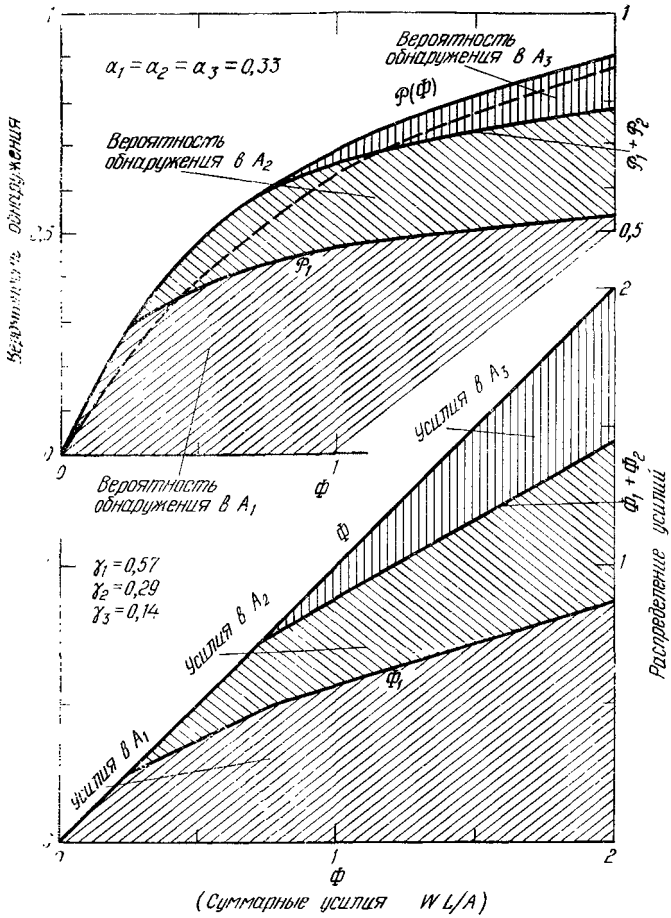


Рис. 16. Распределение поисковых усилий между тремя подобластями.

Полученные результаты иллюстрируются на рис. 16; приведенные графики построены для частного случая, когда область A разделена на три подобласти. Подобласть A_3, характеризующаяся наименьшей вероятностью присутствия в ней искомой мишени, игнорируется до тех пор, пока поисковое покрытие не превысит $\frac{3}{4}A$. Пунктирной линией представлен график для вероятности обнаружения мишени при условии, что поисковые усилия распределены по области A равномерно. При таком способе распределения поисковых усилий для обеспечения того же самого значения $\mathcal{P}$ нужно увеличить Φ на 20%.

Пример, демонстрирующий влияние фальшмишеней на стратегию поиска, содержится в работе [8], где рассмотрен предельно простой случай, когда область A разбивается на две подобласти и имеется одна неподвижная фальшмишень. Поскольку даже эта фактически простейшая постановка задачи распределения поисковых усилий при наличии фальшмишеней приводит к операционному алгоритму, который трудно реализовать в условиях реального поиска, то возникает естественный вопрос: не явится ли точный анализ более сложных поисковых ситуаций скорее увлекательным математическим упражнением, нежели процедурой, действительно имеющей практическую значимость. Представляется более разумным попытаться получить для ситуаций такого рода приближенные решения, которые были бы легко реализуемы в условиях реального поиска.

5. ПОИСК В СЛУЧАЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ МИШЕНИ

В предыдущих разделах предполагалось, что скорость движения мишени настолько мала, что за время выполнения всей поисковой операции мишень смещается на весьма незначительное расстояние. Если никакой априорной информацией ни относительно местоположения мишени в области A, ни относительно направления движения мишени мы не располагаем, то сам факт подвижности мишени (если исходить из предположения, что она не покидает область A) не меняет утверждения о том, что мишень с равной вероятностью может оказаться в любой точке области A. Таким образом, наилучшая стратегия поиска и в этом случае заключается в том, чтобы обеспечить равномерное покрытие области A. Если мишень может выйти за пределы области A, то подлежащую обследованию площадь в ходе выполнения поисковой операции необходимо будет расширить. Если это расширение незначительно, то оно почти не влияет ни на организацию поиска, ни на его результат. С другой стороны, если к моменту завершения сканирования области A (в результате которого мишень окажется необнаруженной) возникнет необходимость в таком расширении области поиска, что дополнительная площадь окажется равной A или превышающей A, то вряд ли поисковые ресурсы позволят продолжить поиск на этой дополнительной территории.

5.1. Поиск в случае, когда сведения о расположении и перемещении мишени отсутствуют

Для анализа рассматриваемой ситуации удобно использовать дифференциальное уравнение, описывающее вероятность обнаружения мишени (эту вероятность опять обозначим через P). Как и в предыдущих разделах, будем предполагать, что наблю-

датель движется со скоростью v, а приведенная ширина полосы обзора равняется W. Обращаясь к рис. 9,*б*, мы видим, что приращение вероятности обнаружения мишени после прохождения по разведывательному маршруту расстояния L [т. е. приращение функции $P(L)$] равняется приращению площади покрытия $da = Wv\,dt$, деленному на площадь q, в пределах которой может (согласно предположению) находиться мишень, и умноженному на вероятность $(1 - P)$ того, что на рассматриваемом интервале времени мишень окажется необнаруженной, т. е.

$$dP = (1 - P)\,(W/q)\,dL = (1 - P)\,(da/q), \tag{27}$$

где $a = WL$ — площадь, которая подверглась сканированию при прохождении наблюдателем пути длиной L.

Если мишень не может оказаться вне области A и если для начала предположить, что данная мишень с одинаковой вероятностью может быть в любой точке области A, то в этом случае перемещение мишени не влияет на оценку плотности вероятности ее появления в той или иной точке внутри A; в любой момент времени эта плотность вероятности равняется $1/q$. Если, кроме того, поиск рандомизирован и поисковые усилия внутри A распределены равномерно, то площадь q в уравнении (27) фактически совпадает с площадью A (пока W^2 мало по сравнению с A). Возможные перемещения мишени в пределах области A не могут повлиять на априорно полученные оценки плотности вероятности наличия мишени в различных точках области A. Следовательно, и уравнение для P, и его решение, которые имеют соответственно следующий вид:

$$\frac{dP}{P-1} = -\frac{W}{A}\,dL, \quad P(a) = 1 - e^{-WL/A} = 1 - e^{-a/A}, \tag{28}$$

идентичны соотношениям (18).

С другой стороны, если мишень может пересечь границу области A, то площадь района ее возможного появления [т. е. q в формуле (27)] с течением времени увеличивается. В данном разделе будем предполагать, что объект поиска не располагает информацией о субъекте поиска и перемещается рандомизированным образом. Если мишень случайно оказывается в точке, лежащей на границе области A, то лишь с вероятностью $\frac{1}{2}$ дальнейшее перемещение мишени приведет к тому, что она появится вне области A; при этом среднее расстояние, на которое она проникает за пределами A за время dt, равняется

$$(u\,dt/2\pi)\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = (u/\pi)\,dt = (u/\pi v)\,dL = (u/\pi vW)\,da.$$

где u — среднее оценочное значение скорости движения мишени, v — скорость движения наблюдателя, а W — приведенная ширина полосы обзора. Это приводит к постепенному расширению области, внутри которой может оказаться объект поиска, что напоминает «утечку» газа (если сравнивать различные возможные положения мишени с молекулами газа, средняя скорость которых равняется u). Газ расширяется со средней скоростью u/π по нормали к огибающей поверхности. В случае поиска мишени, которая может выйти за пределы первоначально намеченной области поиска, ожидаемое расширение этой области за время dt равняется

$$dq = \frac{u}{\pi} s\, dt = \frac{us}{\pi v W} da,$$

где s — текущее значение периметра обследуемой области. Если исходная область A представляет собой круг или квадрат, то s равняется периметру S области A, умноженному на $\sqrt{q/A}$. Формула $s \approx S\sqrt{q/A}$ приближенно верна даже в тех случаях, когда длина области A в два раза больше ее ширины, если при этом значение q составляет не более половины значения A.

Следовательно, площадь области, внутри которой может оказаться мишень (т. е. q) после завершения рандомизированного и равномерно распределенного поиска в первоначально выбранной области, площадь которой равняется a, хорошо аппроксимируется решением дифференциального уравнения

$$\frac{dq}{\sqrt{q}} = 2\gamma \frac{da}{\sqrt{A}} \quad \text{или} \quad q = A\left(1 + \gamma \frac{a}{A}\right)^2, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{uS}{2\pi v W}.$$

Подставляя выражение для q в уравнение (27), находим вероятность $P(a)$ обнаружения мишени после реализации рандомизированно и равномерно распределенных поисковых усилий $WL = a$ в исходной области A при условии, что в начальный момент времени мишень находилась в области A, а скорость ее перемещения в случайно выбранном направлении, согласно априорной оценке, равнялась u (причем мишень могла оказаться за пределами области A):

$$P(a) \approx 1 - \exp\left[\frac{-a/A}{1 + \gamma(a/A)}\right], \quad a = WL. \tag{29}$$

Эта формула отличается от приведенной выше формулы (28) дополнительным слагаемым в знаменателе выражения, являющегося степенью e, что обусловлено возможностью «просачивания» мишени через границу области A, которое мы условно назвали «утечкой». Полученная приближенная формула для оценки $P(a)$ справедлива при условии, что $\gamma = (u/2\pi v)(S/W)$ есть малая величина; это условие выполняется в тех случаях, когда отно-

шение оценочного среднего значения u к скорости субъекта поиска v (т. е. величина u/v) не превышает отношения приведенной ширины полосы обзора к периметру A (т. е. W/S). Нетрудно убедиться, что при $\gamma \approx 1$ вероятность $P(a)$ перестает возрастать сразу же после того, как a достигнет значения, равного A, а в последующие моменты времени увеличение площади q оказывается таким, что обеспечить поисковыми усилиями дополнительные площади не удается. Однако если W/S одного наблюдателя меньше отношения u/v, то значение γ можно понизить путем использования в поисковой операции большего числа независимых наблюдателей. Если в разведывательной операции участвуют m независимых наблюдателей, каждый из которых перемещается рандомизированным образом внутри области с равномерным покрытием, то в формуле (29) W следует заменить на mW и, следовательно, вместо γ получим γ/m.

Чтобы было ясно, какие отрицательные последствия порождаются возможным выходом мишени за пределы области A, составим таблицу значений вероятности обнаружения мишени к моменту завершения сканирования на площади $mWL = A$ при различных значениях γ.

В третьей строке табл. 1 указано, во сколько раз следует расширить намеченную вначале область поиска, для того чтобы вероятность обнаружения цели $P(a_1)$ равнялась 0,632, что имеет место при $\gamma = 0$ и $a = A$. Дальнейшее увеличение a при

Таблица 1

γ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$P(A)$	0,632	0,597	0,565	0,537	0,510	0,487
a_1/A	1,000	1,111	1,250	1,429	1,667	2,000

выполнении условия $a > a_1$, разумеется, приводит к росту $P(a)$, но этот дополнительный выигрыш в результативности поиска достигается за счет непропорционально большого расхода разведывательных ресурсов. Выигрыш в смысле увеличения вероятности обнаружения $P(A)$, получаемый при распределении поисковых усилий между m наблюдателями, обусловлен тем фактом, что вместо γ будем иметь $m\gamma$, так как каждому наблюдателю потребуется просканировать лишь m-ю часть общей площади A (при условии, что m поисковых маршрутов обеспечат равномерное покрытие области A) и для проведения разведывательной операции в целом потребуется в m раз меньше времени, так что у мишени окажется меньше времени на «исчезновение» из области A.

Строгий анализ варианта поиска подвижной мишени при геометрически упорядоченном разведывательном маршруте (подобном челночному маршруту с параллельными участками, изображенному на рис. 6) пока еще не проводился. Для сравнения можно рассмотреть вариант поиска, который как по критерию качества используемого разведывательного оборудования, так и с точки зрения геометрических характеристик разведывательного маршрута является полной противоположностью по отношению к только что описанному варианту рандомизированного поиска с равномерным покрытием области возможного наличия мишени. Пусть имеет место идеальный случай, когда используются технические средства, позволяющие обнаруживать мишень наверняка в строго определенном диапазоне наблюдения, и субъект поиска движется по челночному маршруту со строго параллельными участками, пролегающими на расстоянии $S = W$ один от другого, так что непросматриваемых зон между участками маршрута не остается. Если мишень находится в неподвижном состоянии в одной из точек области A, то вероятность ее обнаружения к моменту времени, когда длина пройденного наблюдателем пути достигнет значения $L = a/W$, определяется по формуле (6) и с помощью графика r на рис. 8 ($P = a/A$).

Сначала предположим, что мишень рандомизированно перемещается внутри некоторой области A со средней скоростью u, но за пределы этой области она выйти не может. В этом случае во время поиска мишень может сместиться таким образом, что окажется в области a, уже полностью просканированной субъектом поиска. Обратившись к рис. 17, мы видим, что после завершения разведывательной операции, когда окажется полностью просканированной вся первоначально намеченная область поиска, так что $a = WL = A$, зоны, куда могла ускользнуть мишень (эти зоны на рис. 17 заштрихованы в косую клетку), имеют суммарную площадь

$$q(A) = \frac{nu}{\pi v} D^2 = \frac{uD}{\pi v W} A, \text{ поскольку } n = \frac{C}{W} \text{ и } A = CD,$$

где n — число параллельных пролетов разведывательного маршрута, необходимое для полного покрытия области A. Оказавшись именно в этих зонах, мишень останется необнаруженной.

Суммарная площадь зон, в которых может «укрыться» подвижная мишень, приблизительно пропорциональна площади просканированной части области A, так что к моменту времени, когда поисковый маршрут успеет покрыть подобласть площадью a (рис. 17), площадь, на которой еще может находиться искомая мишень (если она еще не обнаружена), равняется

$$q(a) = A - (1 - \mu) a, \text{ где } \mu = \frac{u}{\pi v} \frac{D}{W}.$$

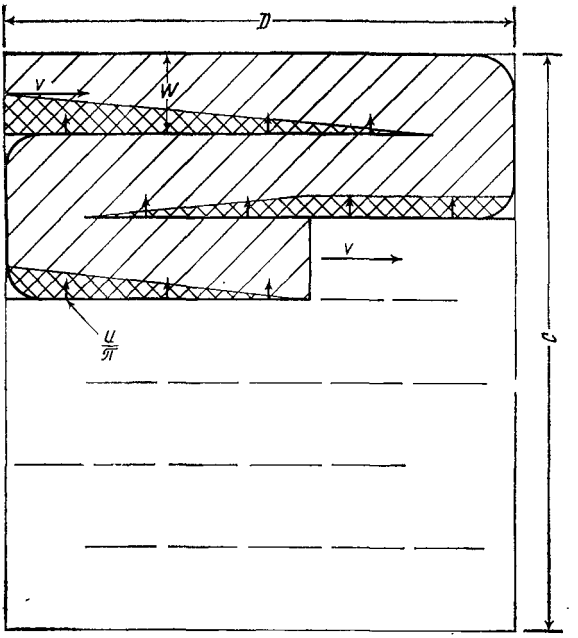


Рис. 17. Компактное поисковое покрытие в области A (площадь $A = CD$). Площадь заштрихованной части области A равняется a (т. е. является полностью обследованной частью исходной области при неподвижной мишени). Если мишень перемещается по рандомизированному маршруту со средней скоростью u, то она может вернуться в те зоны, где она ранее уже находилась (см. заштрихованные в косую клетку участки, суммарную площадь которых обозначим через b). Следовательно, если мишень не может пересекать границу области A, площадь поверхности, подлежащей дальнейшему сканированию, равняется $A - a + b$.

Наконец, подставив это выражение в уравнение (27), для случая движущейся, но не выходящей за пределы A мишени получим

$$\frac{dP}{1-P} = \frac{da}{A-(1-\mu)a}, \text{ т. е. } P(a) = 1 - \left[1-(1-\mu)\frac{a}{A}\right]^{1/(1-\mu)}. \quad (30)$$

Вероятность обнаружения мишени, когда $a = A$ (т. е. когда поиск был бы закончен, если бы мишень была неподвижной), не равна единице, а определяется следующим соотношением: $P(A) = 1 - \mu^{1/(1-\mu)}$. С помощью данной формулы для нескольких значений μ определены соответствующие значения $P(A)$; результаты представлены в табл. 2.

Как и в случае рандомизированного поиска, приведенные выше рассуждения справедливы лишь при условии, что $\mu = (u/\pi v) \times \times (D/W)$ есть малая величина. Эффективность поиска может быть повышена, если в поисковой операции использовать m наблю-

дателей; в этом случае каждому наблюдателю потребуется покрыть лишь m-ю часть общей площади A и, следовательно, параметр μ станет равным $(u/\pi v)\,(D/mW)$. В условиях реального поиска кривая вероятности обнаружения не будет иметь столь резко очерченной формы, как в случае $г$ на рис. 3, а геометрические

Таблица 2

μ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$P(A)$	1,000	0,957	0,923	0,893	0,866	0,843

характеристики разведывательного маршрута не будут столь совершенными, как показано на рис. 17. Следовательно, реально достижимая вероятность обнаружения для $WL = A$ будет находиться на уровне, лежащем где-то между уровнем, указанным в табл. 2, и уровнем $1 - e^{-1} = 0{,}632$, определяемым в случае рандомизированного поискового покрытия площади A по формуле (28). Разница между этими крайними оценками становится менее существенной, когда a либо меньше A, либо больше A.

Если мишень может выйти за пределы области A, то, в частности, она может проникнуть за пределы этой области через нижнюю границу (рис. 17); при этом приращение площади поиска, когда $a = A$, равняется произведению D на эффективную скорость утечки и продолжительность поиска, равную $T = nD/v = A/vW$. Таким образом, это приращение также прямо пропорционально времени, в течение которого ведется поиск, и, следовательно, к площади q добавляется площадь $(uD/\pi vW)\,a = \mu a$. Приращение площади поиска за счет утечки через каждую из сторон C прямоугольной области A поэтапно аппроксимируется суммой площадей треугольника, одна из вершин которого лежит в точке пересечения C и D, а противоположное основание, удаленное от данной вершины на расстояние $C\,(a/A)$, имеет длину $(u/\pi vW)\,a$, и прямоугольника, длина одной из сторон которого равняется $C - C\,(a/A)$, а длина другой — $(u/\pi vW)\,a$. Ясно, что это приращение лежит за пределами области A. Таким образом, дополнительная площадь поиска к моменту, когда осуществлена (a/A)-я часть поиска, равняется $\nu\,[2 - (a/A)]\,a$, где $\nu = uC/\pi vW$. Следовательно, в момент времени, когда просканированная площадь принимает значение $a = WL$, площадь, на которой еще может оказаться искомая мишень, $q \approx A - a\,(1 - 2\gamma) - (\nu/A)\,a^2$, где $\gamma = \mu + \nu = (u/\pi vW)\,(C + D) = (u/2\pi v)\,(S/W)$, а S — периметр области A.

Вероятность обнаружения мишени после того, как идеальным образом (рис. 17) окажется покрытой площадь, равная a, находится путем решения уравнения (27), в которое следует

подставить полученное выражение для q. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае решение уравнения (27) имеет следующий вид:

$$P(a) = 1 - \lambda \left\{ \frac{1 - \lambda [1 - 2\gamma + 2\nu (a/A)] [1 + \lambda (1 - 2\gamma)]}{1 + \lambda [1 - 2\gamma + 2\nu (a/A)] [1 - \lambda (1 - 2\gamma)]} \right\}^{\lambda}, \qquad (31)$$

где $\lambda = 1/\sqrt{1 - 4\mu + 4\gamma^2}$. Для оценки влияния на эффективность поиска того обстоятельства, что мишень может ускользать из первоначально намеченной области A, приведем ряд значений P для случая, когда область A имеет форму квадрата (при этом $\gamma = 2\mu = 2\nu$), а $a = A$.

Таблица 3

γ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$P(A)$	1,000	0,878	0,785	0,718	0,680	0,667

Сравнение приведенных выше данных с данными табл. 2, которая была составлена для случая, когда мишень не может выйти за пределы области A (т. е. $\gamma = 2\mu$), показывает, что возможность проникновения мишени за пределы области A (утечка) существенно снижает вероятность обнаружения мишени. Разумеется, если в поисковой операции участвуют m наблюдателей, каждый из которых движется внутри области поиска по челночному маршруту со строго параллельными участками, то при оценке $P(A)$ нужно вместо W взять mW, а γ заменить на γ/m. Располагая достаточным количеством наблюдателей, поиск можно провести весьма быстро, так что отрицательные последствия того факта, что мишень является подвижной, можно свести к минимуму.

Приведенные в табл. 3 оценки $P(A)$ получены для варианта поиска со строго упорядоченным покрытием области A (рис. 17). Если график для вероятности обнаружения мишени как функции расстояния до мишени по траверзу выглядит иначе, чем график $г$ на рис. 3, и (или) если участки разведывательного маршрута не столь геометрически упорядочены, как показано на рис. 17, то вероятность обнаружения $P(A)$ будет смещаться в сторону своего нижнего предела, который соответствует случаю рандомизированного поиска (табл. 1).

Другие варианты поиска при геометрически правильных построениях разведывательного маршрута и использовании технических средств наблюдения со строго детерминированным диапазоном, в пределах которого мишень наверняка обнаруживается, будут характеризоваться несколько иными значениями верхнего предела $P(A)$, однако эта разница не будет значительной. Так,

например, приближенные оценки вероятностей обнаружения мишени при таком построении разведывательного маршрута, когда субъект поиска сначала движется по периметру обследуемой области, а затем по сходящейся квазиспирали (по спирали с прямоугольными витками) до тех пор, пока не окажется в центре этой области, почти совпадают с оценками, приведенными в табл. 3, если в уравнении (31) положить $\gamma \approx (3uS/8\pi vW)$; это означает, что вероятности обнаружения мишени оказываются в рассматриваемом случае такими же, как и в случае, отраженном в табл. 2, если в этой таблице соответствующие значения γ уменьшить примерно на 25%. Построение разведывательного маршрута с покрытием прежде всего пограничной зоны — более совершенный вариант поисковой стратегии; однако и в этом случае мишень может скрыться от наблюдения, переместившись в уже просканированную зону. В любом случае следует иметь в виду, что полученные результаты справедливы лишь для идеального варианта, когда используемая аппаратура полностью гарантирует обнаружение цели в некотором заданном диапазоне наблюдения, а разведывательный маршрут геометрически строго упорядочен. Представляется более надежным исходить из оценок вероятностей обнаружения цели, которые были бы ближе к оценкам, полученным для варианта рандомизированного поиска с равномерным покрытием обследуемой области (табл. 1).

5.2. Перекрестное заграждение

В тех случаях, когда перемещение мишени не является рандомизированным, мы имеем дело с задачей организации поиска в иной постановке. Можно указать лишь на два частных случая, подробный анализ которых позволил получить результаты, имеющие определенную практическую значимость. Самый простой вариант постановки задачи такого рода возникает тогда, когда известны направление и скорость движения мишени, а положение мишени не известно.

Пусть проводится авиаразведывательная операция с целью обнаружения вражеского судна, которое должно пройти через узкий морской пролив, судоходная ширина которого равняется D (рис. 18, *а*). Если известно, что при прохождении через пролив судно движется со скоростью u, удобнее всего анализировать поисковую ситуацию, перейдя к системе координат, движущейся вместе с судном (рис. 18, *б*). В этой (сопутствующей) системе координат наиболее эффективным разведывательным маршрутом будет челночный маршрут с рядом взаимно параллельных участков, который при переходе снова к покоящейся (по отношению к поверхности моря) системе координат преобразуется в фигуру типа восьмерки, изображенную на рис. 18, *а*. Обратим внимание

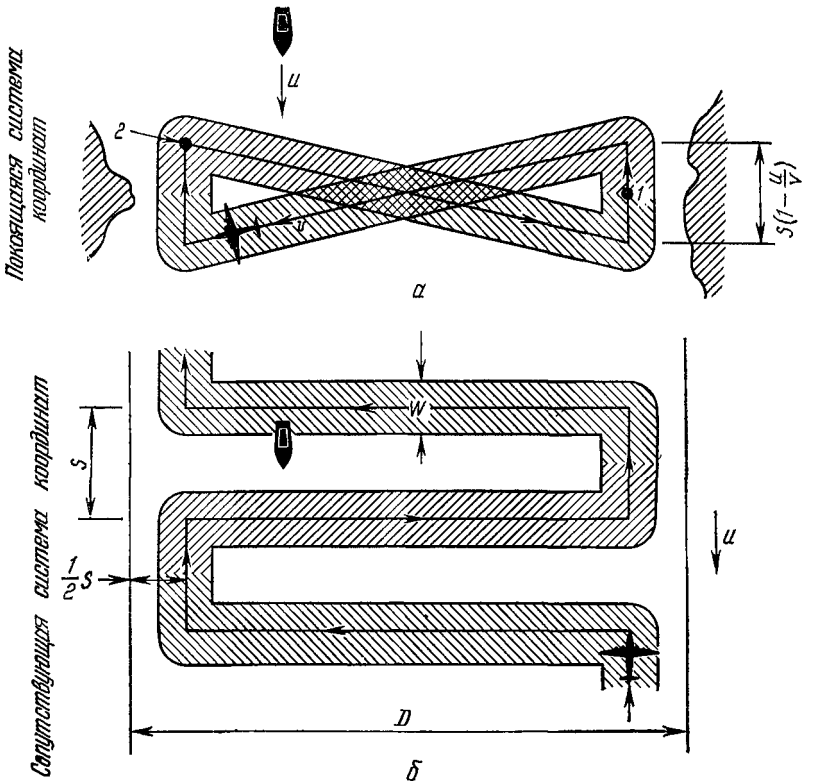


Рис. 18. Перекрестное разведывательное заграждение для перехвата судна которое должно пройти через морской пролив.

на то, что на участках маршрута, соответствующих основанию и верхушке этой восьмерки, самолет движется в направлении, противоположном направлению движения мишени.

Если потребовать, чтобы разведывательный маршрут был замкнутым, и учесть движение мишени, то необходимо установить расстояние S между смежными участками разведывательного маршрута в сопутствующей системе координат с учетом ширины пролива, скорости движения судна (u) и скорости полета самолета-разведчика (v). Время $T = 2D/v$, которое требуется самолету, чтобы дважды (т. е. в прямом и обратном направлениях) пересечь пролив (мы исходим из предположения, что отношение u/v достаточно мало, так что длина диагонального отрезка изображенной на рис. 18, *а* восьмерки приблизительно равняется D; в противном случае в расчеты следует внести поправки), должно равняться

длине интервала времени $T = 2S/u$, в течение которого движущаяся система координат должна сместиться вниз на расстояние, равное удвоенному расстоянию между смежными участками челночного маршрута, изображенного на рис. 18, *б*. Таким образом, расстояние S и достигаемый в конечном счете поисковый потенциал Φ определяются по формулам

$$S = D\,(u/v); \quad \Phi = W/S = Wv/Du. \tag{32}$$

Построенный таким способом разведывательный маршрут, который в покоящейся системе координат изображен на рис. 18, *а*, называется *перекрестным разведывательным заграждением*.

Если мы не располагаем информацией ни о положении пути следования судна в проливе, ни о времени (в пределах интервала $T = 2D/v$) прохождения судна через пролив, то в сопутствующей системе координат (рис. 18, *б*) судно может оказаться в любой точке в пределах зоны площадью $2SD$. Таким образом, если разведывательное заграждение во время прохождения судна через пролив действительно функционирует, то вероятность обнаружения этого судна совпадает с вероятностью P (Φ), вычисляемой по формулам (16) и (18) или определяемой с помощью графика на рис. 8, соответствующего покрытию в виде полос. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе [16], гл. 7.

Если значение Φ, определяемое с помощью формул (32), окажется меньше $\frac{1}{2}$ (т. е. если $W/D < \frac{1}{2}u/v$), то вероятность обнаружения мишени будет явно неудовлетворительной. В этом случае необходимо (при наличии такой возможности) использовать для разведывательного заграждения несколько самолетов, которые либо совершают полет по челночным маршрутам с параллельными участками, пролегающими на расстоянии S/n один от другого (если в заграждении участвуют n самолетов), либо с определенным сдвигом во времени следуют один за другим по челночному маршруту с участками, разделенными интервалом S. Так, например, если в разведывательном заграждении участвуют два самолета, следующих один за другим по маршруту, изображенному на рис. 8, *а*, то один из них должен пролетать над точкой *2* в то время, когда другой пролетает над точкой *1* (рис. 18, *а*), т. е. один самолет должен отставать от другого ровно на половину общей длины маршрута. В сопутствующей системе координат это будет выглядеть так: один из самолетов курсирует туда и обратно (по ширине заграждения) со смещением на один участок, т. е. самолеты-разведчики совершают полеты по встречным курсам, пролегающим на расстоянии S один от другого. Если многократные перелеты по ширине заграждения выполнены тщательно, так что в сопутствующей системе координат имеем n эквидистантно расположенных просканированных полос, то полезный поисковый

потенциал равняется nWv/Du, и именно это выражение следует подставить вместо Ф при определении вероятности обнаружения цели P (Ф).

Перекрестные заграждения успешно используются при проведении многих других оперативных мероприятий (операций, выполняемых полицейскими службами, военных операций, спасательных операций и т. п.).

5.3. Поиск с запаздыванием

Другая ситуация, с которой нередко сталкиваются на практике, возникает в тех случаях, когда в некоторый (нулевой) момент времени положение мишени известно абсолютно точно, но поиск не может начаться до некоторого фиксированного момента T_0. Предполагается, что в интервале времени $[0, T_0]$ мишень перемещается; тогда, если известна максимальная скорость мишени u и нет никаких указаний относительно направлений движения мишени, к моменту времени T_0 она может оказаться в любой точке внутри круга радиусом uT_0. С течением времени (после того как поисковая операция начнется) радиус круга, внутри которого может оказаться мишень, будет постепенно увеличиваться. Поэтому для обеспечения поискового покрытия постепенно расширяющейся области возможного местонахождения мишени поисковый маршрут должен представлять собой раскручивающуюся спираль (если это практически осуществимо).

Если разведывательные ресурсы ограничены, причем поисковые усилия не могут быть больше $E(T) = WvT$, то в этом случае поисковые усилия следует сосредоточить в той части круга радиусом $R(T) = u(T_0 + T)$, которая предписывается, например, правилами (23). В большинстве случаев, когда не известно, с какой скоростью движется мишень на самом деле (с максимальной скоростью u, с нулевой скоростью или же с какой-то промежуточной скоростью), точкой, в которой вероятность $P(x)$ принимает максимальное значение, является центр упомянутого выше круга, т. е. точка, в которой находилась мишень в начальный момент времени. Следовательно, поиск мишени целесообразно начинать в центральной части круга и продолжать поисковый маршрут по раскручивающейся спирали, обеспечивая плотность покрытия $\phi = W/S$ [в соответствии с требованиями (23)].

По сравнению со случаем неподвижной мишени поисковая операция в рассмотренной выше ситуации требует более тщательного анализа. Проведем его, воспользовавшись формулами, которые были получены для случая рандомизированного покрытия. Это оправдано отчасти тем, что лишь в этом случае результаты можно представить в аналитическом виде, и отчасти тем, что разведывательный маршрут в реальных условиях вряд ли будет представ-

лять собой абсолютно правильную спираль. Поэтому надежнее исходить из менее оптимистических формул. Рассмотрим поисковую ситуацию в момент времени T, когда оказываются реализованными поисковые усилия величиной WvT, а радиус круга, внутри которого может находиться мишень (если она к этому времени еще не обнаружена), равняется $u(T_0 + T)$. Если поиск был начат в центре круга в момент времени $t = 0$ и затем осуществлялся путем перемещения наблюдателя по спиралевидному маршруту внутри круга радиусом $r < R(T)$, так что за время t были затрачены поисковые усилия величиной $E(t) = Wvt$, то априорная оценка плотности вероятности $g(r)$ того, что мишень окажется в точке, лежащей на расстоянии r от центра круга, может быть получена для любого значения r в интервале времени от начала до окончания поисковой операции.

Если область возможного местонахождения мишени не имеет формы круга, то с целью обобщения приведенных выше рассуждений удобнее брать в качестве варьируемой величины не радиус, а площадь. Площадь дислокации мишени $A(t)$ в момент времени t и площадь $q(t)$, ограниченная окружностью радиуса r (т. е. площадь, которая к моменту t оказывается уже проскапированной), определяются по формулам

$$A(t) = \pi u^2 (T_0 + t)^2; \quad q(t) = \pi r^2.$$

Продолжительность поиска может быть выражена через затраченные поисковые усилия $E(t) = Wvt$, так что переменные $A(t)$ и $q(t)$ легко могут быть выражены через безразмерные величины:

$$A(t) = \alpha(1 + z)^2; \quad z = t/T_0 = E(t)/\beta; \quad q(t) = \alpha x; \qquad (33)$$
$$\alpha = A(0) = \pi u^2 T_0^2; \quad \beta = WvT_0.$$

Таким образом, α есть площадь области, внутри которой наверняка находится мишень в момент начала поиска, а β есть площадь, которую можно было бы успеть покрыть с плотностью $\phi = 1$ в течение T_0 единиц времени (можно называть T_0 *временем задержки*). Взаимосвязь между этими величинами может быть выражена с учетом правил распределения поисковых усилий (23); только теперь следует иметь в виду, что плотность вероятности $g(r)$ относится к моменту времени t, когда самолет-разведчик находится уже на расстоянии r от исходной точки.

Однако, прежде чем приступить к анализу рассматриваемого варианта поиска, необходимо обратить внимание на некоторые совершенно очевидные обстоятельства. К моменту завершения поисковой операции, длившейся в течение T единиц времени, объем затраченных поисковых усилий равняется WvT. Однако к этому моменту времени площадь области, внутри которой вероятность наличия мишени отлична от нуля, становится равной

$\pi u^2 (T_0 + T)^2$. Следовательно, к моменту завершения поиска среднее значение поискового потенциала $\Phi = E/A$ оказывается равным $WvT/\pi u^2 (T_0 + T)^2$. Эта величина по мере увеличения T сначала некоторое время возрастает, но затем при $T = T_0$ достигает максимума, после чего начинает убывать. Максимальное значение Φ при $T = T_0$ равняется $\Phi_m = (W/4\pi u T_0)(v/u)$, т. е. обратно пропорционально T_0 и прямо пропорционально произведению отношения площадей возможной дислокации мишени в моменты времени T_0 и $2T_0$ и отношения скоростей движения мишени и наблюдателя. Отсюда следует, что, чем скорее начинается поиск, тем он результативнее, и что поиск в течение первых T_0 единиц времени протекает наиболее эффективно. Дальнейший поиск (при $T > T_0$) сопряжен с необходимостью обеспечивать поисковое покрытие постоянно расширяющейся области поиска, площадь которой уже к моменту времени $T = T_0$ оказывается слишком большой.

Возвращаясь к процедуре (23), следует прежде всего получить разумное выражение для вероятности $g(r)$, соответствующей моменту времени t, когда субъект поиска достигает точки, удаленной от исходной точки на расстояние r, а площадь области возможной дислокации мишени равняется $A(t)$. Поскольку фактические значения u и направления перемещения мишени не известны, можно принять некоторое усредненное распределение, положив

$$g(r) = \frac{2}{A}[1 - (\pi r^2/A)] = \frac{2}{A}[1 - (q/A)].$$

Максимум определенной таким образом функции $g(r)$ соответствует $r = 0$, и $g(r) \to 0$ при $q \to A$. Поскольку A — функция t и, следовательно, A — функция z, g есть функция z. Но так как $q = \alpha x$ представляет собой функцию поисковых усилий $z\beta$, можно утверждать, что A, g и z являются функциями x. Взаимозависимость этих величин задана формулами (33).

Мы требуем, чтобы произведение g на $P'(\phi)$ (где $P'(\phi)$ — производная плотности вероятности обнаружения мишени, зависящая от плотности поиска ϕ в рассматриваемой точке) равнялось либо некоторой положительной константе G, либо (если это невозможно) нулю. В случае рандомизированного поискового покрытия это требование приводит к соотношениям

$$\phi = \begin{cases} \ln(g/G) = \ln(2/AG) + \ln[1 - (g/A)] \text{ при } \phi > 0 \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{34}$$

Однако плотность поиска есть производная E по q, и, следовательно, мы приходим к дифференциальному уравнению, которое с использованием переменных, фигурирующих в формулах (33),

имеет следующий вид:

$$z'(x) \equiv \frac{dz}{dx} = k\left\{C - \ln(1+z)^2 + \ln\left[1 - \frac{x}{(1+z)^2}\right]\right\}, \qquad (35)$$

$$\text{где } k = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi u^2 T_0^2}{WvT_0}; \quad C = \ln(2/\alpha G).$$

Это уравнение можно численно проинтегрировать для различных значений k и C в интервале изменения x вплоть до $x = x_m$, когда z' обращается (приближенно) в нуль. Произведение значения z в точке $x = x_m$ (обозначим это значение через z_m) на $\pi u^2 T_0^2 = \alpha$ равняется площади всей обследованной области $Q = \pi r_m^2$, а произведение $z'(x)$ на $1/k$ равняется плотности поиска ϕ на расстоянии $r = \sqrt{\alpha x/\pi}$ от начальной точки. Другими словами,

$z'(x)$ обращается в нуль при $x = x_m$, когда $z = z_m$;
суммарное значение поисковых усилий $E_m = \beta z_m = WvT_0 z_m$;
общая обследованная площадь $Q = \pi r_m^2 = \alpha x_m = \pi u^2 T_0^2 x_m$;
плотность поиска на расстоянии $r = \sqrt{\alpha x/\pi} < r_m$ от начальной точки

$$\phi \equiv W/S = \frac{1}{k} z'(x) = (WvT_0/\pi u^2 T_0^2)(dz/dx). \qquad (36)$$

Плотность вероятности обнаружения мишени в каждый текущий момент времени и, следовательно, в каждой текущей точке x определяется формулой

$$g(x) = \frac{2/\alpha}{(1+z)^2}\left[1 - \frac{x}{(1+z)^2}\right].$$

Таким образом, для вероятности того, что поисковая операция в целом окажется успешной, имеем

$$\mathcal{P} = \int_0^Q (1 - e^{-\phi})\, g\, dq = \alpha G \int_0^{x_m} (e^{\phi} - 1)\, dx = 2e^{-C} \int_0^{x_m} (e^{z'/k} - 1)\, dx. \qquad (37)$$

Для получения количественных оценок $\mathcal{P}$ при различных значениях k и C также можно воспользоваться численными методами интегрирования.

Для некоторых частных случаев результаты расчетов по приведенным выше формулам иллюстрируются на рис. 19 и 20. Рассмотрены два значения параметра $k = \alpha/\beta = (\pi u T_0/W)(u/v)$: $k = 1$ и $k = 2$. Поскольку α есть площадь области, в пределах которой может оказаться мишень в тот момент, когда поиск только начинается, а β есть площадь, которая могла бы быть эффективно просканирована ($\mathcal{P} = 1$) за время T_0 при отсутствии задержки в разведывательном обеспечении, $k = 1$ соответствует тем случаям, когда за время T_0 мишень не может переместиться на очень большое расстояние от начальной точки. Случай, когда $k = 2$, соответствует поисковой ситуации, характеризующейся тем, что

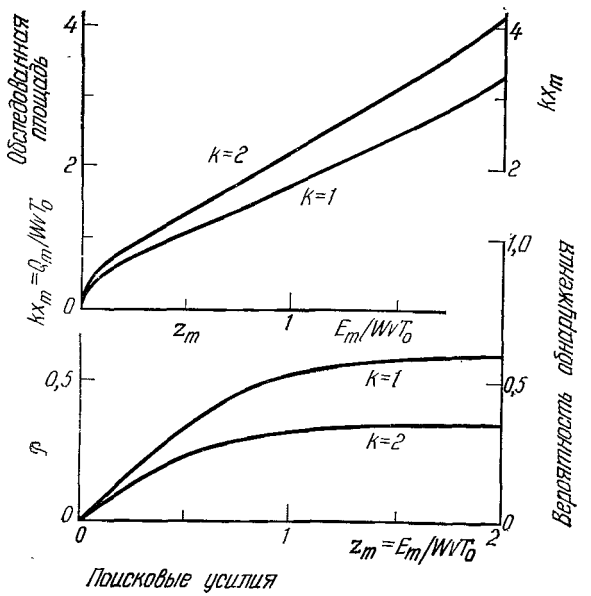


Рис. 19. Графики для определения площади с поисковым покрытием Q и вероятности обнаружения цели $\mathcal{P}$ как функций суммарных поисковых усилий $E = WvT$ в случае поиска с запаздывающим стартом и спиралевидным маршрутом. [Графики построены с помощью уравнения (35).]

за время задержки мишень может оказаться на большом расстоянии от начальной точки и наблюдатель имеет меньше шансов ее отыскать.

Заметим, что при $k = 1$ вероятность обнаружения мишени почти в два раза превышает вероятность обнаружения мишени в случае, когда $k = 2$. Мы видим также, что в обоих случаях $\mathcal{P}$ возрастает очень медленно после того, как E_m оказывается больше площади, обеспеченной поисковым покрытием к моменту времени $t = T_0$ (эта площадь равняется WvT_0). После того как поиск в центральной зоне оказывается завершенным, площадь покрытия Q по мере дальнейшей реализации поисковых усилий сначала увеличивается медленно, а затем начинает возрастать быстрее, поскольку наблюдатель, двигаясь по спирали, вынужден догонять границу быстро расширяющейся области возможного местонахождения мишени. Площадь, подлежащая поисковому покрытию, в случае $k = 2$ больше, чем в случае $k = 1$; это означает, что плотность поискового покрытия при $k = 2$ меньше, чем при $k = 1$, и, следовательно, вероятность обнаружения мишени при $k = 2$ меньше, чем при $k = 1$.

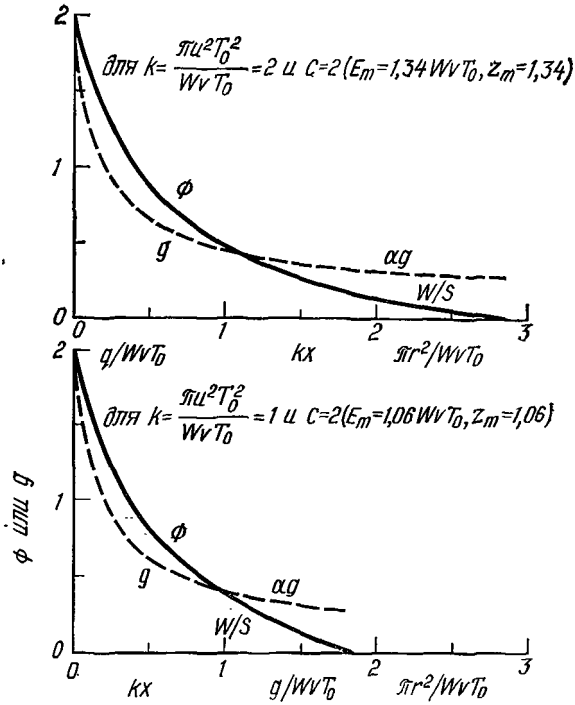


Рис. 20. Кривые зависимости Ф от уже обследованной площади q, соответствующие двум комбинациям значений C и k. Ординаты точек на пунктирных кривых пропорциональны $g(q)$ в текущий момент поиска.

На рис. 20 приведены графики функции ϕ, построенные для тех же значений параметра k и двух разных значений C (и, следовательно, z_m). Как и следовало ожидать, наибольшие значения ϕ имеют место в начале поиска, т. е. в окрестности точки, в которой удалось засечь мишень. Поисковые усилия в случае $k = 2$ распределяются по большей площади, чем в случае $k = 1$, так как область, в пределах которой может оказаться мишень, в первом случае является более обширной. Пунктирными кривыми изображены графики функции $\alpha g(x)$, значения которой берутся в момент времени, когда поиск достигает зоны с $x = \pi r^2/\alpha$. В момент окончания поисковой операции, т. е. при $x = x_m$, $g(x)$ еще не равняется нулю, поскольку, в соответствии с формулами (33), область возможной дислокации мишени оказывается при этом шире уже просканированной области. Таким образом, полученные результаты в определенной степени подтвердили предположения; однако вряд ли, основываясь только на интуиции, можно было прийти к заключению, что при $t = T_0$ поиск целесообразно прекратить

(из-за резкого снижения его эффективности при $t > T_0$), или, скажем, настаивать на том, что концентрация поисковых усилий должна быть особенно высокой в окрестности начальной точки (рис. 20).

Другой подход к решению задач, аналогичных рассмотренной выше, рассматривается в работе [4]; этот подход основывается на использовании методов теории игр.

6. ПОИСК ДИСКРЕТНО ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ОБЪЕКТОВ

Иногда приходится сталкиваться с ситуациями, которые легче моделируются в предположении, что ячейки, в которых может оказаться подлежащий обнаружению объект, размещены дискретно. Ячейками могут, в частности, быть отдельные области поверхности или пространства; однако они могут иметь и более сложную структуру. Все, что нам требуется знать,— это соотношение между усилиями, затрачиваемыми на поиск в той или иной ячейке, и вероятностью обнаружения искомого объекта. В данном случае мишень может представлять собой не единичный объект, который может оказаться только в одной из ячеек (и не может принадлежать, например, сразу двум ячейкам); здесь вполне допустимы ситуации, когда объект поиска может принадлежать одновременно нескольким ячейкам. Таким образом, сумма вероятностей попадания объекта поиска в разные ячейки может оказаться отличной от единицы. Так, например, цель поиска может заключаться в выявлении неисправности в сложном техническом устройстве; в обследуемом устройстве может оказаться не одна неисправность, а сразу несколько. Весьма интересным примером поисковой стратегии в ситуациях такого рода является стратегия поиска рудных и нефтяных месторождений. Другими примерами поисковых операций такой же степени сложности могут служить сыскные операции, организуемые полицией. В этом разделе мы дадим краткое описание ряда простых моделей, полагая, что лучше иметь простые модели, чем никаких, или же ориентироваться на модели, слишком сложные для практического использования.

Задачи дискретного поиска в определенном смысле проще задач поиска на поверхностях, рассмотрению которых посвящены предыдущие разделы. Мы обращаемся к ним только теперь, а не в самом начале главы потому, что задачи поиска на поверхностях являются классическими и в настоящее время представляют больший практический интерес.

6.1. Аналогия с поиском на поверхностях

Дискретный аналог классической задачи распределения поисковых усилий по поверхности, для которой были получены соотношения (23) — (31), выглядит следующим образом.

Имеется N ячеек, в которых будет осуществляться поиск некоторого объекта (мишени). Вероятность того, что мишень окажется в j-й ячейке, равняется (по априорным оценкам) γ_j; при этом $0 \leqslant \gamma_j \leqslant 1$, но $\sum \gamma_j$ не обязательно равняется единице. Связь между вероятностью P обнаружения мишени в j-й ячейке (если мишень действительно находится в этой ячейке) и величиной, которую назовем поисковым усилием в j-й ячейке (обозначим эту величину через ϕ_j), задается функцией $P(\phi_j)$, которая имеет вид (5), инвариантный относительно перехода от одной ячейки к другой. Мы хотим распределить поисковые усилия $E = \sum \phi_j$ по N ячейкам так, чтобы максимизировать сумму вероятностей $\gamma_j P(\phi_j)$. Эта задача детально сформулирована в работе [2].

Данная задача фактически проще задачи, которая представлена соотношениями (23) — (26), так как в дискретном случае требуется вычислить лишь γ_j ($j = 1, 2, \ldots, N$), тогда как в континуальном варианте поиска необходимо найти значения как γ_j, так и α_j для всех j [формула (24)]. Задачу дискретного поиска можно несколько усложнить, предположив, что поисковые усилия в разных ячейках имеют неодинаковую «производительность», так что вероятность обнаружения объекта поиска в j-й ячейке есть $P(\alpha_j \phi_j)$, а не $P(\phi_j)$. В этом случае задача полностью совпадает с задачей, рассмотренной в разд. 4. Мы подробно рассмотрим лишь случай, когда функция P имеет вид

$$P(u) = 1 - e^{-u},$$

поскольку получаемые при этом результаты просты, но вместе с тем широко применяются на практике.

Если исходить из допущения, что с точки зрения производительности поиска все ячейки одинаковы (т. е. $\alpha_j = 1$ для всех значений j), наша задача будет заключаться в том, чтобы

$$\text{максимизировать } \mathcal{P}(E) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j (1 - e^{-\phi_j})$$

с учетом того, что $\sum_{j=1}^{N} \phi_j = E$. Стандартная процедура, используемая при решении задач такого рода, заключается в том, чтобы

$$\text{минимизировать } J(E) = \sum_{j=1}^{N} [\gamma_j e^{-\phi_j} + \lambda \phi_j], \tag{38}$$

выбрав значение параметра λ таким, чтобы сумма всех ϕ_j ($j = 1, 2, \ldots, N$) равнялась E. Процесс решения состоит из следующих этапов:

1. Определяются числовые значения $\ln(1/\gamma_j)$, которые располагаются в возрастающей последовательности. Вычисляются так-

же частные суммы $K_n = \sum_{j=1}^{n} \ln (1/\gamma_j)$ и строится возрастающая с увеличением n последовательность $L_n = (1/n) K_n - \ln (1/\gamma_n)$.

2. Минимизация осуществляется путем приравнивания нулю производной $J(E)$ по ϕ_j. В результате получается $\lambda = \gamma_j e^{-\varphi_j}$. Требование $\sum \phi_j = E$ приводит к формуле $\lambda = (-1/n)(K_n + E)$, что позволяет исключить λ из формул для ϕ_j и $\mathcal{P}_j$.

3. Если имеет место неравенство $L_1 = 0 \leqslant E \leqslant L_2$, то поиск ведется только в ячейке 1, вероятность попадания в которую искомого объекта γ оказывается наибольшей. В этом случае $\phi_j = E$ при $j = 1$ и $\phi_j = 0$ при $j > 1$, а $\mathcal{P} = \gamma_1 (1 - e^{-E})$.

Когда выполняются неравенства $L_n \leqslant E \leqslant L_{n+1}$, поиск ведется только в n ячейках, характеризующихся относительно большими значениями вероятности попадания в них искомого объекта, и

$$\phi_j = \{(1/n)(K_n + E) - \ln (1/\gamma_j) \text{ при } j \leqslant n; \ \phi_j = 0 \text{ при } j > n;$$
$$\mathcal{P} = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_j, \ \mathcal{P}_j = \gamma_j - \exp[-(1/n)(K_n + E)] \text{ при } j \leqslant n. \tag{39}$$

Если $L_N < E$, поиск осуществляется во всех N ячейках и

$$\phi_j = (1/N)(K_N + E) - \ln (1/\gamma_j), \qquad \mathcal{P}_j = \gamma_j - \exp[-(1/N)(K_N + E)]$$
$$E = \sum_{j=1}^{N} \phi_j, \quad \mathcal{P} = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{P}_j.$$

Если после реализации поисковых усилий E мишень оказывается необнаруженной и принимается решение затратить дополнительные поисковые усилия $\Delta E = E' - E$, то производятся повторные вычисления по формулам (39), в которые вместо E подставляется E', и на j-ю ячейку ($j = 1, 2, \ldots, N$) выделяются дополнительные поисковые усилия $\phi'_j - \phi_j$. Автором построена номограмма, с помощью которой удается получать численные решения уравнений (39) с достаточной точностью (с точностью до второго десятичного знака).

Решения задач дискретного поиска другого рода, которые возникают при распределении усилий в тестовых операциях по выявлению «сбоев» в сложной экономической системе, были получены Глассом [11]. При этом вместо континуального варианта поиска, когда вероятность обнаружения является функцией непрерывно меняющихся поисковых усилий, используется дискретный вариант, при котором для тестирования каждой ячейки назначаются фиксированные моменты времени и задаются вероятности обнаружения сбоев именно в эти моменты времени. Чтобы определить последовательность обследования ячеек такой слож-

ной системы, обеспечивающую минимум полного времени поиска, используются адаптированные к рассматриваемой ситуации методы динамического программирования.

6.2. Ложные обнаружения

В большинстве случаев при практической реализации стратегии непрерывного поиска мы оказываемся вынужденными допускать, что наличие фальшмишеней не влияет на структуру математической модели поиска и приводит лишь к понижению значений некоторых из параметров модели. В случае дискретного поиска возможность появления фальшмишеней (ложных обнаружений) также усложняет анализ поисковой ситуации. Однако в ряде случаев удается в достаточной степени упростить исходные предпосылки и получить полезные с практической точки зрения результаты. Эти результаты позволяют по крайней мере системно описать поисковую операцию еще одного типа, а именно поиск нефти или железной руды. В этом случае в результате реализации определенных поисковых усилий в том или ином месте поиска может быть сделано либо положительное, либо отрицательное заключение. Если заключение по результатам поиска является положительным, то все же может оказаться, что предполагаемого полезного ископаемого в этом месте нет. Аналогично отлична от нуля и вероятность того, что ошибочным будет отрицательное заключение. Подробный анализ процесса проверки заключения об обнаружении объекта поиска и определения того «веса», который ассоциируется при этом с ошибками как первого, так и второго рода, содержится в работе Поллока [28] (библиография по этому вопросу приведена, в частности, в работе [29]). Здесь мы воспользуемся уже готовыми результатами, с тем чтобы показать, как они влияют на распределение поисковых усилий. Пример, на котором мы попытаемся продемонстрировать соответствующие математические формулы, представляет собой упрощенную модель геологоразведывательной операции, цель которой состоит в обнаружении нефтяных или рудных месторождений.

Приступая к поиску новых месторождений тех или иных полезных ископаемых, прежде всего пытаются выявить перспективные (с геологоразведывательной точки зрения) районы, которые стоит исследовать более тщательно, пытаясь обнаружить те или иные геологические образования (формации) или другие признаки, характерные для такого рода месторождений, а также для их ближайших окрестностей. Это предварительное исследование, осуществляемое частично непосредственно на местах, а частично с помощью геологических карт, позволяет оценить вероятности обнаружить богатую рудную породу в различных географических районах. Располагая такого рода априорными оценками вероят-

постей наличия в выделенных районах залежей руды, можно разработать стратегию проведения более дорогостоящей части разведывательной операции. Конечно, можно было бы без раздумий направить все дальнейшие усилия на исследование только одного района, который по результатам предварительных оценок является наиболее перспективным, но, возможно, было бы все же целесообразнее использовать эти априорные оценки как можно полнее, с тем чтобы, прежде чем предпринимать дальнейшие действия, выработать обоснованные решения относительно того, где искать и как искать. Эти оценки вероятностей наличия полезных ископаемых, которые опять обозначим через γ_j, в различных географических районах по мере развертывания разведывательной операции будут меняться; однако в самом начале, когда составляются предварительные планы, ориентируются только на эти оценки, так как никаких других исходных количественных данных нет.

В каждом районе возможного наличия залежей полезных ископаемых необходимо провести надлежащие геологические исследования с использованием ультразвуковой аппаратуры, приборов для измерения гравитационного, магнитного и электрического полей, с тем чтобы уточнить априорную оценку вероятности наличия здесь искомого полезного ископаемого. На стадии предварительного планирования следует решить, в каких масштабах должны проводиться геологические исследования такого рода. Предварительные оценки усилий, требуемых для проведения упомянутых выше исследований, могут позднее меняться, однако первоначальное распределение поисковых усилий должно базироваться на априорных оценках вероятностей γ_j. В результате геологического исследования следует принять решение либо прекратить дальнейшие изыскательские работы в данном районе, либо начать выемку грунта (экскавацию) или бурение, надеясь найти образец того полезного ископаемого, которое ищется.

Экскавация (так же как и бурение), как правило, обходится дороже, чем геологическое исследование, выполняемое с помощью технических средств различного рода; вместе с тем можно надеяться уменьшить вероятность допустить ошибку, принимая решение приступить к земляным геологоразведочным работам там, где полезного ископаемого, которое пытаются обнаружить, нет. (Другой вариант анализа рассмотренного выше процесса принятия решений рассмотрен в работе [21].)

В результате геологоразведывательных измерений (гравитационного поля, магнитного поля и т. п.) может возрасти вероятность принятия решения приступить к земляным геологоразведочным работам. Не располагая результатами предварительных геологоразведывательных измерений, можно испытывать явное нерасположение к тому, чтобы сразу же приступать к экскавации;

при наличии же подробных данных, полученных на стадии геофизического обследования местности, степень целесообразности экскавации могла бы быть оценена достаточно точно. На стадии составления предварительных планов лучшее оценочное значение вероятности принятия решения приступить к экскавации в j-м районе совпадает с априорным значением γ_j. Таким образом, один из возможных прогнозов относительно того, к чему приведут результаты исследований с помощью измерительной аппаратуры, можно сформулировать следующим образом: по мере увеличения усилий, затрачиваемых на геофизические измерения в j-м районе, от нуля до некоторого достаточно большого значения вероятность принятия решения приступить к экскавации (в этом районе) будет возрастать (начиная с нулевого значения), асимптотически приближаясь к γ_j. Другими словами, эта вероятность будет зависеть от усилий ϕ_j, затраченных на этапе предварительных геофизических исследований j-го района, примерно следующим образом: $P(\phi_j) = \gamma_j (1 - e^{-\phi_j})$.

За исключением тех случаев, когда измерения осуществляются с помощью очень точных приборов, решение производить земляные работы в определенной доле случаев окажется ошибочным, вследствие чего большая сумма денег окажется истраченной впустую. Главный вопрос состоит в следующем: как зависит отношение числа неудачных решений (когда в результате экскавации приходят к печальному заключению, что искомого полезного ископаемого в данном районе нет) к числу правильных решений (когда происходит открытие месторождения нужного полезного ископаемого) от объема усилий, затраченных на геологическое исследование, осуществляемое с помощью измерительных приборов? Теория принятия решений недвусмысленно ответить на этот вопрос не может. Действительно, ответ на данный вопрос зависит от того, *какое* оборудование применялось на этапе предварительного исследования и *как* оно использовалось. Все, что мы можем здесь сделать,— это выдвинуть ряд разумных гипотез относительно вероятностных характеристик рассматриваемого процесса и построить соответствующие этим гипотезам рабочие модели. В конечном счете выбор модели и значений фигурирующих в модели параметров придется осуществлять на основе операционных экспериментов, т. е. аналогично тому как это должно делаться в случае поиска подводной лодки с воздуха (см. разд. 2.4). Если сопоставить затраты на геологическую разведку с экономическим эффектом в случае обнаружения полезного ископаемого, то можно с уверенностью сказать, что расходы на проведение предварительных геофизических измерений в перспективных (по априорным оценкам) районах полностью себя оправдывают.

В одном предельном случае можно предположить, что объем усилий, затраченных на геофизические измерения, влияет на

вероятность принятия решения начать экскавацию грунта, но не влияет на отношение числа положительных исходов к числу отрицательных исходов экскавации. С учетом ожидаемых денежных расходов и доходов эта экстремальная модель строится следующим образом:

Оцениваемая по результатам предварительного исследования априорная вероятность наличия залежей железной руды в j-м районе равняется γ_j и является единственной количественной оценкой, которой располагают на начальной стадии планирования.

Ожидаемая прибыль, получаемая от j-го района, если залежи железной руды в этом районе имеются и их удастся в результате экскавации обнаружить, равняется R_j.

Ожидаемые затраты на экскавацию, в результате которой можно убедиться в наличии или отсутствии залежей железной руды в j-м районе, равняются D_j.

Ожидаемые расходы, связанные с проведением в j-м районе геофизических исследований с использованием измерительных приборов (с целью определения целесообразности экскавации), равняются C_j.

Априорная вероятность того, что будет принято решение провести в j-м районе экскавацию, равняется $\gamma_j(1-e^{-\beta C_j})$.

Априорная вероятность того, что это решение окажется правильным (т. е. искомое полезное ископаемое в результате экскавации будет обнаружено), предполагается в данной модели равной γ_j, т. е. равняется априорной вероятности наличия в j-м районе залежей нужного полезного ископаемого. До тех пор пока не будут проведены геофизические измерения, мы не располагаем никакой информацией, кроме оценочных значений γ_j и ожидаемых расходов; именно эти исходные данные и должны быть положены в основу при разработке первоначальной стратегии.

Таким образом, ожидаемые доходы, ассоциируемые с j-м районом, при условии что в этом районе планируется затратить усилия на проведение геофизических измерений стоимостью C_j, определяются соотношением

$$q_j=\gamma_j(\gamma_j R_j-D_j)(1-e^{-\beta C_j}).$$

Другими словами, ожидаемая чистая прибыль за счет j-го района в случае, если принимается решение проводить экскавацию, равняется $S_j=\gamma_j R_j-D_j$; доходы в объеме R_j удается получить лишь с вероятностью успешного исхода экскавации (т. е. с вероятностью γ_j), тогда как объем ожидаемых расходов D_j установлен с полной определенностью. Таким образом, в данном случае задача формулируется следующим образом:

$$\text{максимизировать } Q=\sum_j[\gamma_j S_j(1-e^{-\beta C_j})-C_j] \qquad (40)$$

при ограничении

$$\sum C_j = C.$$

Эта задача совершенно аналогична задаче (38), которая соответствует случаю простого поиска над множеством N ячеек; действительно, модель (38) принимает вид (40), если заменить ϕ_j на βC_j и γ_j на $\gamma_j S_j$. Решение задачи (40) аналогично решению задачи (38).

Проранжируем географические районы, расположив их в порядке убывания $\gamma_j S_j$, а затем построим последовательности

$$K_n = \sum_{j=1}^{n} \ln(\beta\gamma_j S_j) \text{ и } L_n = K_n - n \ln \beta\gamma_n S_n.$$

В случае если $L_1 = 0 < C < L_2$, из всех возможных районов выбирается только район 1 (характеризующийся наибольшим значением γS). На проведение геофизических измерений в районе 1 планируются расходы в объеме C; при этом ожидаемые доходы вычисляются по формуле

$$Q(C) = \gamma_1 S_1 (1 - e^{-\beta C}).$$

Если $L_n < C < L_{n+1}$ (в предположении, что $L_{N+1} \to \infty$), то обследованию подлежат только n наиболее перспективных районов; при этом на проведение геофизических измерений в j-м районе выделяются средства в объеме

$$\left.\begin{aligned} &C_j = \frac{1}{\beta}\left[\ln(\beta\gamma_j S_j) - \frac{1}{n} K_n\right] \frac{1}{n} C \ (j \leqslant n), \\ &\text{а ожидаемая прибыль определяется соотношением} \\ &Q(C) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j S_j - \frac{n}{\beta} \exp\left[\frac{1}{n}(K_n - \beta C)\right] - C. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Теперь можно определить, при каком значении C ожидаемая суммарная чистая прибыль будет наибольшей; для этого нужно приравнять нулю производную Q по C и разрешить полученное уравнение относительно Q. Найдем значение n, для которого

$$\left.\begin{aligned} &Q_{\text{макс}}(n) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j S_j - \frac{1}{\beta}(K_n + n) \text{ принимает наибольшее значение.} \\ &\text{Соответствующее оптимальное распределение средств на проведение предварительных геофизических измерений имеет следующий вид:} \\ &C_{\text{макс}}(n) = K_n/\beta \text{ и } C_j = \frac{1}{\beta}\ln(\beta\gamma_j S_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Если ни для одного из районов неравенство $\beta\gamma_j S_j < 1$ не имеет места, оптимум C достигается при $n = N$ (обследуются все районы); в противном случае n равняется наибольшему значению j, для которого $\beta\gamma_j S_j > 1$.

Когда предполагают (подобно тому как это сделано в только что приведенной модели), что инструментальное исследование не влияет на соотношение между успешными и неуспешными исходами при экскавациях и влияет лишь на вероятность принятия решения произвести экскавацию, то, возможно, рассуждают самым пессимистическим образом. Мы только что убедились в том, что это предположение приводит к необходимости проводить предварительные исследования вначале в районах с наибольшими значениями $\gamma_j S_j$.

В другом экстремальном случае предполагается, что вероятность принятия решения осуществлять экскавацию в районе j не зависит от объема усилий, затрачиваемых при предварительном исследовании этого района (т. е. γ_j не зависят от C_j), но при этом вероятность того, что экскавация приведет к успешному результату, асимптотически возрастает от значения γ_j при $C_j = 0$ до единицы, когда $C_j \to \infty$. Другими словами, ожидаемое значение вероятности принятия решения произвести экскавацию в j-м районе равняется γ_j, ожидаемые расходы на экскавацию составляют $\gamma_j D_j$, а ожидаемый экономический эффект в случае возможного положительного результата экскавации определяется выражением $\gamma_j [1 - (1 - \gamma_j) e^{-\alpha C_j}] R_j$, т. е. является возрастающей функцией C_j. В рассматриваемом случае экскавация может быть проведена в каждом из N географических районов; при этом тщательное инструментальное исследование позволяет повысить вероятность получения при экскавации положительных результатов. Эффект от предварительных исследований, согласно данной модели, более ощутим, когда значение γ_j близко к $\frac{1}{2}$, а не к единице (т. е. когда тщательное предварительное исследование может не понадобиться).

Чтобы сделать модель адекватной действительности, в ней должны найти отражение следующие три стадии геологоизыскательских работ и ассоциированные с ними акты принятия решений (другая модель геологической разведки рассмотрена в работе [9]):

1. На основе картографических данных и результатов полевых наблюдений составляется перечень мест, в которых вероятность наличия искомых полезных ископаемых достаточно высока.

2. Во всех выбранных районах производится первичное обследование с использованием простого оборудования стоимостью C_0. На основе данных, полученных в результате первичного исследования, оцениваются вероятности γ_j. Некоторые из γ_j могут оказаться близкими к единице и, следовательно, в соответствующих районах можно сразу же приступать к земляным работам. Районы, которые характеризуются значениями γ_j, меньшими некоторого нижнего порогового значения (возможно, равного $\frac{1}{2}$

или даже превышающего $\frac{1}{2}$), из первоначального списка исключаются.

3. На основе решения вариационной задачи [типа задачи (40)] некоторые из районов или, возможно, даже все районы уточненного перечня подвергают дальнейшему более интенсивному обследованию, прежде чем принять решение производить в них надлежащие геологоразведочные земляные работы.

Таким образом, нужно решить следующую вариационную задачу:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{максимизировать} & Q = \sum \gamma_j [1-\gamma_j) e^{-\alpha C_j}] R_j - C_j - \gamma_j D_j \\ \text{при ограничении} & \sum C_j = C. \end{array}\right\} \quad (43)$$

Процедура решения этой задачи выглядит следующим образом.

Проранжируем географические районы, расположив их в порядке убывания $A_j = \gamma_j (1-\gamma_j) R_j$ и приписав району с самым большим значением A индекс $j = 1$ (если бы R_j были равны между собой и γ_j превышали $\frac{1}{2}$, районы оказались бы расположенными в ряд по *возрастанию* γ, причем первое место принадлежало бы району с *наименьшим* значением этого параметра). Построим возрастающую последовательность $K_n = \sum_{j=1}^{n} \ln [\alpha\gamma_j (1-\gamma_j) R_j$ и положим $L_n = K_n - n \ln [\alpha\gamma_n (1-\gamma_n) R_n]$. Если $L_1 = 0 < C < L_2$, то тщательное геофизическое исследование проводится только в районе 1, который характеризуется наибольшей неопределенностью $\gamma_1 (1-\gamma_1) R_1$ в оценке ожидаемого экономического эффекта; что же касается других районов, то принимают решение сразу же начать там геологоразведочные земляные работы, основываясь при этом на оценках γ_j, полученных на стадии первичного обследования (с использованием процедуры выработки решений, которая дает вероятность γ_j принятия решения приступить к экскавации в j-м районе).

Тогда ожидаемая прибыль вычисляется с помощью следующих формул:

$$Q(C) = Q(0) + \gamma_1 (1-\gamma_1) R_1 (1 - e^{-\alpha C}),$$

$$Q(0) = \sum \gamma_j (\gamma_j R_j - D_j) - C_0.$$

Если $L_n < C < L_{n+1}$ (предполагается, что $L_N \to \infty$), то более тщательному обследованию подлежат лишь районы с номерами от 1 до n, причем на обследование j-го района расходуются средства в объеме C_j; решения относительно остальных районов принимаются на основе результатов первичных исследований. Рекомендуемые затраты C_j на проведение дальнейших геологических

исследований и ожидаемый экономический эффект в случае реализации намеченного плана определяются следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{\alpha}\left\{\ln\left[\alpha\gamma_j(1-\gamma_j)R_j\right]-\frac{1}{n}K_n\right\}+\frac{1}{n}C, \quad j\leqslant n,\\ Q(C) &= Q(0)+\\ &+\sum_{j=1}^{N}\left\{\gamma_j(1-\gamma_j)R_j-\frac{1}{\alpha}\exp\left[\frac{1}{n}K_n-\frac{\alpha}{n}C\right]\right\}-C,\\ Q(0) &= \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(\gamma_jR_j-D_j)-C_0. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Как и в предыдущем случае, можно так распределить расходы на дальнейшие геологические исследования по географическим районам, что ожидаемая прибыль за счет успешных исходов геологоразведывательной операции будет максимальной. При этом получаем

$$C_{\text{макс}}(n) = (K_n/\alpha) \quad \text{и} \quad C_j = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\alpha\gamma_j(1-\gamma_j)R_j\right], \quad (45)$$

$$Q_{\text{макс}}(n) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(\gamma_jR_j-D_j)-\frac{1}{\alpha}(K_n+n)-C_0, \quad (45)$$

где n — наибольшее значение индекса j, для которого $\alpha\gamma_j(1-\gamma_j)R_j > 1$. Эти результаты проиллюстрированы графиками, приведенными на рис. 21.

Таким образом, конечные результаты, получаемые с помощью рассмотренных экстремальных моделей, сходны в одних отношениях и резко отличаются в других. В обеих моделях акцентируется внимание на важности определения значения параметра β (или α), позволяющего оценить эффективность затрат C_j с точки зрения возможностей повышения вероятности успешного исхода при экскавации в j-м районе. Как только получены хотя бы грубые оценки значения этого параметра, на начальной стадии для предварительного обоснования перспективности геологоразведывательной операции и составления плана распределения усилий по намеченным географическим районам можно воспользоваться либо первой, либо второй из рассмотренных выше моделей (а возможно, и каким-нибудь промежуточным вариантом). В ходе геологоразведывательной операции эти оценки будут меняться; однако использование подходящей модели с максимально обоснованными оценками значений γ_j, R_j, D_j и α_j (или β_j) ($j = 1, 2, \ldots, N$) на начальной стадии планирования есть единственное средство, позволяющее получить количественные оценочные характеристики планируемой операции.

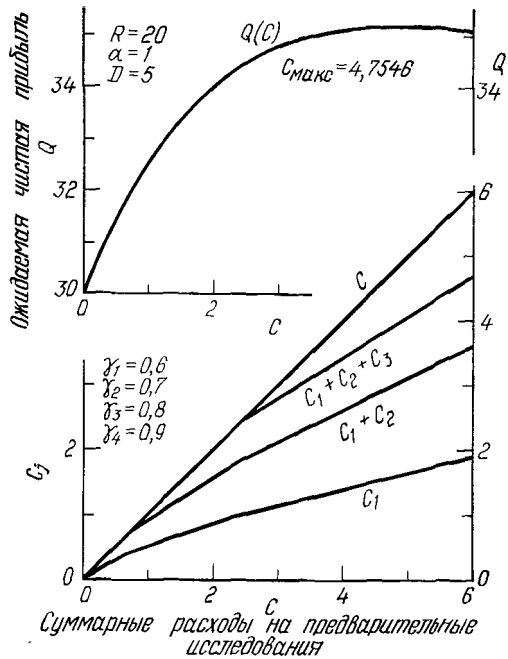


Рис. 21. Решение уравнений (44) и (45) в случае, когда число перспективных районов равняется четырем.

Например, при использовании как первой, так и второй модели мы приходим к заключению, что если для района j априорное оценочное значение $\beta\gamma_j S_j$ [или $\alpha\gamma_j (1 - \gamma_j) R_j$] меньше единицы, то этот район, вероятно, не стоит включать в перечень районов, подлежащих геологическому обследованию. Представляется более целесообразным сократить число районов в этом перечне, так чтобы оставшиеся в нем районы поиска можно было полностью обеспечить имеющимися средствами геофизических измерений. Затем с помощью конкретной модели (признанной адекватной рассматриваемой ситуации) решается вопрос о том, какие районы заслуживают бо́льших разведывательных усилий, а какие — меньших.

В заключение следует отметить, что модели, рассмотренные в данном разделе, могут найти применение не только в связи с проведением геологоразведывательных операций. Например, до испытаний нескольких образцов каждой партии продукции следует провести предварительное исследование для определения вероятности γ_j. Более детальные инструментальные исследования можно проводить с большими выборками. Можно провести параллель

между упоминавшейся ранее экскавацией и техническим испытанием (с устранением обнаруженных дефектов или фиксированием явного брака) изделий. При этом аналогом решения «не производить экскавацию» является решение признать (без дальнейших испытаний) забракованной всю партию изделий. Очевидна аналогия между рассмотренной в данном разделе геологоразведывательной операцией и сыскными операциями, проводимыми полицейскими службами.

7. ПОИСК АКТИВНО УСКОЛЬЗАЮЩЕЙ МИШЕНИ

До сих пор внимание было сосредоточено на поиске объекта, который либо остается неподвижным, либо перемещается независимо от поведения субъекта поиска. Более сложной задачей является разработка поисковых стратегий, когда мишень осведомлена о поиске и стремится ускользнуть из поля зрения того, кто ведет поиск. В настоящее время известно немного подходов к решению этой задачи, достаточно реалистичных, чтобы иметь практическое применение. Все они основываются на использовании методов теории игр (см. гл. III—5), в которой пока не так уж много получено конструктивных и практически полезных результатов. Тем не менее некоторые результаты помогают составить качественное представление о способе построения рациональной стратегии поиска.

В соответствии со сложившейся традицией в теории поиска сначала был разработан не дискретный, а континуальный вариант модели для частного случая с ускользающей мишенью. Речь идет о рассмотренной в работе [23] сверхупрощенной модели авиапатрулирования, цель которого заключается в том, чтобы воспрепятствовать прохождению через длинный пролив, имеющий переменную ширину, подводной лодки, способной часть времени (но не постоянно) находиться в погруженном состоянии; при этом осуществляется перекрестное разведывательное заграждение, характеризующееся неравномерным покрытием зоны возможного появления подводной лодки. Другим примером может служить патрулирование с целью предотвращения тайного проникновения нежелательных лиц через границу на участке определенной длины L.

Как и в большинстве игровых ситуаций, теория игр приводит в этом случае к решению (т. е. к стратегиям поведения обеих сторон), для которого характерно следующее: объект (I), пытающийся тайно перейти границу (нарушитель), и пограничный дозор (R), стремящийся воспрепятствовать проникновению нарушителя через границу, на разных отрезках границы должны действовать неодинаково (иначе одна сторона изучит действия другой и изобретет средства разрушить планы противника). Лишь непре-

рывно меняя свои действия, согласно некоторому заданному распределению вероятностей, одна сторона может заставить другую сторону действовать наугад. Допустим, что сторона I выбирает место перехода через границу случайным образом с плотностью вероятности $\Psi(x)$ пересечь границу в точке x [так что $\int_0^L \Psi(x)\,dx = 1$]. Предположим также, что сторона R размещает свой дозор также случайным образом с плотностью вероятности $\phi(x)$ того, что точка x окажется охваченной поисковыми усилиями дозора [при этом $\int_0^L \phi(x)\,dx = 1$]. Наконец, предположим, что если точка x охвачена поисковыми усилиями дозора и попытка пересечь границу имеет место именно в этой точке, то вероятность предотвращения перехода I через границу равняется $P(x)$. Эта вероятность зависит от выбора точки (т. е. зависит от x), поскольку характер местности вдоль границы меняется (так, например, в лесистой или горной местности эта вероятность мала). В конечном счете ожидаемая доля неудавшихся попыток R тайно пересечь границу определяется интегралом

$$J = \int_0^L \phi(x)\,\Psi(x)\,P(x)\,dx. \tag{46}$$

Сторона I ставит перед собой задачу так подобрать $\Psi(x)$, чтобы интеграл J принял как можно меньшее значение. Что касается стороны R, то она стремится так выбрать плотность распределения $\phi(x)$, чтобы интеграл J принял как можно большее значение. Для надежности сторона I должна выбрать плотность распределения $\Psi(x)$ такой, чтобы никакие действия стороны R не могли увеличить J, а стороне R необходимо выбрать плотность распределения $\phi(x)$ такой, чтобы никакие действия стороны I не могли уменьшить J.

Встав вначале на позицию стороны R, мы рассуждаем так: если в подынтегральном выражении соотношения (46) произведение ϕP для некоторого диапазона изменения x меньше значений ϕP в каких-нибудь других местах охраняемого участка границы, то, как только стороне I станет это известно, большее число нарушителей будет пытаться перейти границу на упомянутом выше более «слабом» отрезке границы и значение интеграла J будет уменьшено. Следовательно, надежная стратегия стороны R состоит в том, чтобы сделать плотность распределения $\phi(x)$ обратно пропорциональной $P(x)$ (усиленный дозор в тех местах, где значение P мало, и более слабый дозор там, где значение P

велико). Если говорить точнее, то сторона R должна положить

$$\phi(x) = [1/N(L)\,P(x)]; \quad N(L) = \int_0^L [1/P(x)]\,dx,$$

так что доля неудавшихся попыток перейти границу на участке L равняется (47)

$$J(L) = [1/N(L)] \int_0^L \Psi(x)\,dx = 1/N(L)$$

и не зависит от того, какой вид Ψ устанавливается стороной I.

Однако, пока сторона I не сделает того же самого с функцией $\Psi(x)$, сторона R будет иметь возможность так видоизменить $\phi(x)$, что J возрастет. Так, например, $\Psi(x)$ можно положить равной $[h/P(x)]$ на небольшом отрезке L_h участка L, на котором $P(x) < H$, и равной нулю всюду, где $P(x) > H$. В этом случае

$$\Psi(x) = \begin{cases} [1/N(L_h)\,P(x)] & \text{на отрезке } L_h, \\ 0 & \text{на остальной части } L, \end{cases} \tag{48}$$

где $N(L_h) = \int_0^{L_h} (1/P)\,dx$. Если сторона R будет придерживаться стратегии, определяемой выбором плотности распределения $\phi(x)$ по формуле (47), то интеграл J по-прежнему будет равен $[1/N(L)]$; однако если сторона R установит, что плотность распределения $\Psi(x)$ имеет вид (48), то она может изменить $\phi(x)$ так, что значение интеграла J возрастет. Например, сторона R может выбрать в качестве ϕ функцию, удовлетворяющую условиям (48), т. е. сторона R может совсем не контролировать часть охраняемого участка длиной $L - L_h$, где противник не будет пытаться перейти границу. В этом случае $J(L_h) = 1/N(L_h)$, т. е. $J > 1/N(L)$, поскольку $L_h < L$. Разумеется, если сторона R будет постоянно придерживаться такой стратегии, а сторона I это установит, то она без каких бы то ни было потерь осуществит переходы через границу на неконтролируемом отрезке $L - L_h$.

Таким образом, надежной стратегией как стороны I, так и стороны R является стратегия, основанная на выборе соответствующей плотности вероятности (Ψ и ϕ) согласно (47).

Наконец, коротко рассмотрим вопрос о дискретном поиске в тех случаях, когда мишень стремится избежать обнаружения. Задача поиска в некотором множестве дискретно размещенных ячеек, в которых может оказаться искомый объект, имеющий возможность ускользнуть из поля зрения субъекта поиска, оказывается чрезвычайно трудной. Первая попытка решения задачи

такого рода была предпринята Поррисом [26], который нашел решение крайне упрощенной задачи поиска, когда поиск осуществляется путем последовательного «заглядывания» в различные ячейки при заданной вероятности обнаружения активно ускользающего объекта поиска в каждой ячейке (если объект поиска в момент «заглядывания» в ячейку действительно в ней находится). Как и многие другие решения в теории игр, решение данной задачи реализуется в смешанных стратегиях. Объект поиска в перерывах между «заглядываниями» с заданной вероятностью перемещается из одной ячейки в другую; при этом задаются также вероятности наличия объекта поиска в различных ячейках в начальный момент времени. Субъект поиска также осуществляет смешивание стратегий, каждая из которых заключается в серии «заглядываний» в ячейки в заданной их последовательности.

В рассматриваемом случае с игрой связано получение объектом поиска определенного выигрыша каждый раз, когда субъект поиска «заглядывает» в ячейку и не находит в ней искомого объекта, и назначение цены каждому перемещению объекта поиска из ячейки в ячейку. Норрис нашел в достаточной степени законченное решение в случае, когда число ячеек равняется двум. Он установил, что если цена перемещения из одной ячейки в другую превышает некоторое пороговое значение, то наилучшая стратегия объекта поиска заключается в том, чтобы в начальный момент времени с вероятностью P оказаться в ячейке 1 и с вероятностью $(1 - P)$ — в ячейке 2, после чего никаких перемещений не предпринимать. Значение P и соответственно $(1 - P)$ определяется соотношением между вероятностями q_1 и q_2 обнаружения объекта соответственно в ячейке 1 и в ячейке 2 (предполагается, что значения q_1 и q_2 известны обеим участвующим в игре сторонам). Субъект поиска, исходя из предположения, что искомый объект придерживается именно наиболее надежной для него стратегии, может заглянуть в одну из ячеек, и если при этом искомый объект останется необнаруженным, то от априорной вероятности P следует перейти к апостериорной (подробнее это рассматривается в работе [27]). «Заглядывания» в ячейки желательно производить в такой последовательности, чтобы удерживать эти апостериорные вероятности колеблющимися в ограниченных пределах. Более того, субъект поиска должен реализовывать подобные «правильные» последовательности в соответствии со схемой смешанной стратегии.

Из таких же соображений исходят и при анализе игры, в которой объект поиска в промежутках между «заглядываниями» может переместиться из одной ячейки в другую. В тех случаях, когда число ячеек больше двух, задача становится значительно сложнее. Другие аспекты дискретного поиска при активно ускользающей мишени рассмотрены в работе [25].

Таким образом, мы видим, что в этой части теория еще недостаточно разработана, чтобы быть полезной в любой практической ситуации. Как уже отмечалось в начале главы, с точки зрения практических приложений теория поиска находится фактически в эмбриональном состоянии.

8. ВОПРОСЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ

Как неоднократно подчеркивалось на протяжении всей главы, несмотря на то что в имеющихся публикациях методологическая структура теории поиска представлена весьма основательно, типовые решения, применимые в конкретных ситуациях, все еще нуждаются в разработке. Процессы поиска являются составной частью удивительно большого числа как индивидуальных, так и групповых действий. Ищут книгу на библиотечных полках или требуемую публикацию по каталогу; ищут потерянных детей и скрывающихся дезертиров; занимаются поисками захороненных под землей развалин древних городов и нефтяных месторождений; решают задачи обнаружения вражеских подводных лодок и нарушителей границы; ищут неисправный элемент в переставшем нормально функционировать техническом устройстве и погрешности технологического процесса. Во всех этих примерах поиск характеризуется конкретными физическими, процедурными и экономическими «граничными» условиями; в каждом случае, прежде чем удастся разработать соответствующую надежную стратегию поиска, требуется осуществить серьезный анализ поисковой ситуации и провести ряд экспериментов. Лишь в немногих случаях характеристики процесса поиска можно считать тщательно исследованными, измеренными и детально проанализированными.

Теория поиска нашла практическое применение пока главным образом в военной области (см. [16] и списки литературы, приведенные в работах [7, 10]). Само собой разумеется, что многие подробности приложений такого рода держатся в секрете. Стратегия поиска заблудившегося в дикой местности индивидуума и возможности практического использования этой стратегии в некоторых других ситуациях рассмотрены в работе Келли (1973). Имеется ряд публикаций по практическим аспектам поиска неисправностей в сложных технических системах (см., например [11]), и несколько работ, посвященных геологической разведке. Небольшое количество публикаций (см., например, [20]) имеет отношение к проблеме практического применения результатов теории поиска при проведении полицией сыскных операций, в частности рассмотрена задача распределения усилий при полицейском патрулировании. Во многих других областях человеческой деятельности теоретические результаты практического применения пока не нашли.

Что касается развития самой теории, то можно отметить существенный прогресс, недавно достигнутый при анализе влияния на стратегию поиска фальшмишеней (см. [30] и [18]), и некоторый сдвиг в связи с решением чрезвычайно сложной задачи поиска в случае, когда объект поиска стремится сознательно ускользнуть из поля зрения наблюдателя. В целом же складывается впечатление, что теория поиска нуждается в дальнейшем практическом апробировании в самых различных областях человеческой деятельности. Только это позволит целенаправленно совершенствовать ее математическую структуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R. E., Dreyfus S. E., Applied Dynamic Programming, Chapter 4, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
2. Charnes A., Cooper W. W., The Theory of Search, Optimum Distribution of Search Effort, *Management Sci.*, 5, 44—50 (1958).
3. Danskin J. M., A Theory of Reconnaissance, *Operations Res.*, 10, 285—299 (1962).
4. Danskin J. M., A Helicopter vs. Submarine Search Game, *Operations Res.*, 16, 509 (1968).
5. de Guenin J., Optimum Distribution of Effort, an Extension of the Koopman Basic Theory, *Operations Res.*, 9, 1—7 (1961).
6. Dobbie J. M., Search Theory, a Sequential Approach, *Nav. Res. Log. Quart.*, 10, 323—334 (1963).
7. Dobbie J. M., A Survey of Search Theory, *Operations Res.*, 16, 525—537 (1968).
8. Dobbie J. M., Search with False Contacts, *Operations Res.*, 21, 907—925 (1973).
9. Engel J. H., Use of Clustering in Mineralogical and other Surveys, Proc. First Int. Conf. on Operations Res., Oxford, 1957, pp. 176—192.
10. Enslow P. H., Jr., A Bibliography of Search Theory and Reconnaissance Theory Literature, *Nav. Res. Log. Quart.*, 13, 177—202 (1966).
11. Gluss B. An Optimum Policy for Detecting a Fault in a Complex System, *Operations Res.*, 7, 468—477 (1959).
12. Gluss B., An Alternative Solution to the Lost at Sea Problem, *Nav. Res. Log. Quart.*, 8, 117—121 (1961).
13. Gluss B., The Minimax Path in a Search for a Circle in a Plane, *Nav. Res. Log. Quart.*, 8, 357—360 (1961).
14. Isbell J. R., An Optimal Search Pattern, *Nav. Res. Log. Quart.*, 4, 357—359 (1957).
15. Heyman M., Optimal Simultaneous Search for the Maximum by the Principle of Statistical Information, *Operations Res.*, 16, 1194—1205 (1968).
16. Koopman B. O., Search and Screening, O. E. G. Office of the C.N.O., OEG Report 56 (ATI 64 627), 1946.
17. Koopman B. O., The Theory of Search, I, Kinematic Bases, *Operations Res.*, 4, 324—346 (1956).
18. Koopman B. O., The Theory of Search, II, Target Detection, *Operations Res.*, 4, 503—531 (1956).
19. Koopman B. O., The Theory of Search, II, The Optimum Distribution of Searching Effort, *Operations Res.*, 5, 613—626 (1957).
20. Larson R. C., Urban Police Patrol Analysis, MIT Press, East Lansing, Michigan, 1972.

21. MacQueen J., Miller R. G., Jr., Optimal Persistance Policies, *Operations Res.*, 8, 362—380 (1960).
22. Mela D. F., Information Theory and Search Theory as Special Cases of Decision Theory, *Operations Res.*, 9, 907—909 (1961).
23. Morse P. M., Kimball G. E., Methods of Operations Research, OEG Report 54, 1946, 2nd Edn. MIT Press, 1951.
24. Morse P. M., Search Theory and Browsing, *The Library Quart.*, 40, 391—408 (1970).
25. Neuts M. F., A Multistage Search Game, *J. SIAM*, 11, 502—507 (1963).
26. Norris R. C., Studies in Search for a Conscious Evader, Lincoln Lab. MIT Tech. Report 279, AD 294 832, 1962.
27. Pollock S. M., Optimal Sequential Strategies for Two Region Search when Effort is Quantized, Operations Res. Center, MIT, Interim Tech. Report 14, AD 238 662, 1960.
28. Pollock S. M., Sequential Search and Detection. Operations Res. Center, MIT, Technical Report 5, 1964.
29. Pollock S. M., Search Detection and Subsequent Action, Some Problems on the Interfaces, *Operations Res.*, 19, 559—586 (1971).
30. Stone L. D., Total Optimality of Incrementally Optimal Allocation, to appear in *Nav. Res. Log. Quart.*, 20 (September 1973).
31. Stone L. D., Stanshine J. A., Optimal Search Using Uninterrupted Contact Investigation, *J. SIAM*, 20, 241—263 (1971).
32. Stone L. D., Persinger C. A., Optimal Search in the Presence of Poisson-distributed False Targets, *J. SIAM*, 23, 6—27 (1972).

III-7. Имитационное моделирование

Д. Гэйвер[1])

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе представлены различные методы и процедуры, позволяющие улучшить качество имитационных моделей. Особое внимание уделено вероятностным аспектам построения моделей, используемых в исследовании операций; изложены методы формального описания и численного анализа интересующих нас явлений, возникающих из-за наличия в модели элемента случайности, а также описаны процедуры измерения случайных ошибок в экспериментах на имитационных моделях.

Многие идеи иллюстрируются на примерах решения простых задач различного типа. Предполагается, что исследователь-практик, призвав на помощь свое воображение и изобретательность, сможет нужным образом видоизменить описанные процедуры и использовать их для достижения своих целей.

2. ЭТАПЫ ИМИТАЦИОННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В данной главе описываются различные подходы к имитации и фактически сделана попытка дать определение термина «имитация». Для более детального ознакомления с предметом читателю следует воспользоваться приведенной библиографией.

Имитационный эксперимент проводится в следующей последовательности:

1) постановка задачи: выделение основных проблем;

2) сбор эмпирической информации и анализ исходных данных, установление контактов с заказчиком;

3) формирование модели: выработка соглашений относительно принципов описания, допустимых упрощений измеряемых параметров и критериев оценки качества модели;

4) построение или выбор модели: описание подмоделей, определение параметров модели;

5) работа с моделью: проведение вычислений с целью изучения изменения результатов в зависимости от изменения условий функционирования модели, подготовка эксперимента и уменьшение дисперсии;

---

[1]) Donald P. Gaver, Naval Postgraduate School.

6) проверка достоверности: согласованности результатов вычислений с входными данными (наличие ошибок в программе) и соответствия полученных результатов реальным данным;

7) предоставление результатов заказчику: повторное выполнение работ по некоторым из указанных выше пунктов в соответствии с изучаемой задачей.

Работа обычно проводится в указанном порядке. В книге [23] этапы имитационного эксперимента описаны примерно так же.

Важно отметить те особенности указанных этапов анализа проблемы, которые *можно* отнести к общепринятому понятию «имитационное моделирование». По существу, этапы 3—7 полностью удовлетворяют тому, что в настоящее время понимается под *имитацией*. Когда используют термин «имитационная модель» или говорят о проведении имитационного эксперимента, то понимают под этим численные расчеты, и в частности получение статистической выборки на математической модели, например для оценки вероятностных характеристик некоторых выходных параметров. Всякий раз при решении новой задачи исследования операций или системного анализа необходимо, конечно, проделать этапы 1 и 2. Формирование задачи (этап 3), а также последующие упрощения следует проводить с учетом конечных целей использования модели, а именно вычисления выходных данных. Часто аналитические расчеты нельзя провести до тех пор, пока не сделаны значительные упрощения. Например, достаточно бегло просмотреть опубликованные работы по теории очередей и массовому обслуживанию, чтобы убедиться в том, сколь мало пользы они могут принести, когда необходимо проанализировать переходные режимы или процессы, зависящие от времени. В качестве возможных подходов к решению сложных задач можно использовать численный анализ и решение вероятностных уравнений, как, например, предлагалось в статье [18]; численные процедуры дискретного, или имитационного, моделирования; применение аналитических методов аппроксимации вероятностных уравнений, например методов диффузионной аппроксимации [12, 16, 25]. Возможно, популярность второго подхода (имитации) объясняется тем, что при его использовании не требуется большого опыта и знаний в области математической теории вероятностей и статистики. Однако имитационное моделирование реальных ситуаций, например распределения работ в цехе, работы ЭВМ или потоков в сети, может потребовать слишком больших затрат на построение модели, программирование и отладку программы. Если в самом начале не принять соответствующих мер, то отпущенные ресурсы времени могут быть полностью израсходованы еще до того, как удастся провести достаточное количество расчетов на ЭВМ. Очень часто уделяют излишнее внимание деталям моделирования (что приводит к трудностям при программировании),

вместо того чтобы оценить погрешности модели и, хорошо продумав последовательность работ на ЭВМ, получить содержательные результаты. При решении сложных проблем используются специальные языки программирования, ориентированные на те типы задач, которые наиболее часто встречаются на практике. В настоящей главе основное внимание уделено методам, позволяющим эффективно генерировать случайные величины и зависимости (т. е. вводить в задачи элемент случайности). Рассмотрен ряд новых методов, которые по своим показателям превосходят методы, использованные в существующих пакетах программ. Кроме того, описаны методы уменьшения дисперсии, процедуры анализа данных и оценки погрешностей.

3. ФОРМИРОВАНИЕ МОДЕЛИ

3.1. Элементы модели

При формировании имитационных моделей часто пользуются понятием объекта, которым могут быть обслуживающие приборы, покупатели, работы, ведущиеся в цехе, или очередь в задачах массового обслуживания. Взаимодействие между отдельными объектами (иногда говорят *элементами*) изменяет *переменные состояния*, значения которых определяют *состояние системы*. Состояние системы может быть вектором, т. е. упорядоченным набором чисел. Под моделью будем понимать формальный, математический, способ описания изменения состояний во времени. Детальное рассмотрение вопросов, относящихся к построению моделей, можно найти в книге [9].

3.2. Модель роста популяций

Предположим, что популяция животных или насекомых растет пропорционально своим размерам, но ее бесконечному росту препятствуют условия окружающей среды. Рассмотрим следующую простую модель. Пусть Y_n — размер популяции в конце года n. Тогда

$$Y_{n+1} = Y_n + Y_n\,(a - bY_n) + \varepsilon_{n+1}Y_n, \tag{1}$$

где a и b — положительные константы, а $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность случайных возмущений, представляющих воздействие окружающей среды на популяцию. Каждое значение ε_n можно выбрать независимо в соответствии с некоторым распределением вероятностей (например, распределением Гаусса). В данном случае Y_n представляет собой состояние системы; следует отметить, что если Y_0 задано, то можно легко получить значения последующих состояний. Такие модели можно значительно расширить, обобщить и приблизить к реальной действительности.

3.3. Упрощенные модели работ, ведущихся в цехе (пример)

Предположим, что станок (объект модели) выполняет некоторые заказы (другие объекты модели), которые появляются в течение дня. Нас будут интересовать задержки, которые могут возникнуть при выполнении заказов. Одним из возможных способов описания модели является представление на языке *дискретных стохастических процессов*. Пусть S_n обозначает время выполнения (заказа) n, A_n — интервал времени между появлениями заказов n и $n+1$, а W_n — переменная состояния, которая описывает время ожидания для заказа n. Тогда при $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$W_{n+1} = \max [W_n + S_n - A_n, 0], \tag{2}$$

и, задавая значения переменных W_1, S_n и A_n, можно получить последовательность значений переменной состояния.

При такой структуре имитационной модели состояние изменяется только с наступлением определенных событий, а именно с появлением выполненных заказов. Эта имитационная модель характеризует событие по отдельным шагам, или иногда говорят, что в ней используется подход отслеживания следующего события. Такая модель часто оказывается эффективной (см., например [9, 13]). С другой стороны, если в единицу времени наступает много событий, то более удобным может оказаться метод, в котором весь временной интервал разбивается на произвольные равные отрезки времени, по окончании каждого из которых состояние системы изменяется. Например, в задаче о работах, ведущихся в цехе, весь день можно разбить на 15-минутные интервалы. Обозначим через $A(t)$ число новых требований, которые появились в интервале от t до $t+15$, где $t = 0, 15, 30, \ldots$. Аналогично количество завершенных работ обозначим через $C(t)$. За период от t до $t+15$ число работ в цехе возрастет на величину $Z(t) = A(t) - C(t)$. Следовательно, если общее число требований, которые выполняются или ожидают своей очереди в момент t, есть $Q(t)$, то

$$Q(t+15) = \max [Q(t) + Z(t), 0]. \tag{3}$$

Используя исходные данные, можно оценить функцию распределения $Z(t)$, а через нее рекуррентно определить $Q(t)$. Весьма вероятно, что значения $A(t)$, а следовательно, и $Z(t)$ будут колебаться в течение дня, а их случайная составляющая будет представлять собой последовательность коррелированных переменных. Для описания законов изменения (моделей) переменных $A(t)$ и $C(t)$ может потребоваться анализ временных рядов; соответствующие методы описаны в разд. 1 гл. I—1 из т. 2 настоящего справочника и в книге [24]. Следует отметить, что если $Q(t)$ — количество невыполненных работ — велико, то вполне достаточно разбивки всего интервала по дням.

4. МЕТОДЫ ГЕНЕРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

В обычной имитационной модели для описания реальных событий используются случайные величины и процессы. В формуле (1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ представлены в виде последовательности случайных величин, для которых функция распределения или плотность распределения оцениваются на основе исходных данных. В формулах (2) и (3) S_n, A_n и $Z(t)$ можно моделировать (описывать) как случайные величины или процессы. Когда имитационная модель, вернее программа, ее описывающая, рассчитывается на ЭВМ, возникает необходимость реализации указанных случайных процессов с максимально возможной точностью. Ниже описывается ряд процедур, позволяющих осуществлять подобные реализации случайных процессов.

4.1. Равномерно распределенные случайные числа

Для генерации случайных величин нужно иметь возможность получать последовательность *равномерно распределенных случайных чисел*, т. е. чисел, которые ведут себя как независимые реализации или выборки случайной величины R, равномерно распределенной на единичном интервале [0, 1]. В вычислительных центрах имеются программы для генерации последовательностей *псевдослучайных чисел*, например 3, 7, 5, 1, 9, 2 . . ., где появление любой цифры от 0 до 9 приблизительно равновероятно и, к счастью, нет каких-то очевидных или неприятных взаимозависимостей между числами. Следовательно, такой последовательностью можно моделировать процесс бросания «правильной» десятигранной игральной кости. Указанные программы называются *генераторами случайных чисел*. Объединение случайных чисел дает псевдослучайные числа, содержащие нужное количество знаков. Приставка «псевдо» означает, что процесс генерации числовой последовательности начинается с некоторого исходного случайного числа; вслед за этим числом генерируются все последующие числа. В качестве машинного алгоритма обычно используется модификация *мультипликативного конгруэнтного метода*, подробно описанного в [17]. В работе [20] содержатся критические замечания относительно генераторов случайных чисел, но там же предлагаются более совершенные методы генерации случайных чисел и, кроме того, показано, как можно реализовать некоторые из наиболее часто используемых распределений (экспоненциальное, нормальное). В специализированные языки имитационного моделирования, такие, как GPSS и APL, включены процедуры, позволяющие генерировать случайные числа, однако можно использовать для этих целей программы на языке ФОРТРАН.

При помощи последовательности равномерно распределенных случайных чисел (или просто случайных чисел) можно получить последовательности случайных величин, имеющих другие законы распределения. Несколько таких методов описано ниже; следует заметить, что на практике можно использовать различные методы генерации случайных чисел, но некоторые из них оказываются более эффективными с вычислительной точки зрения.

4.2. Метод преобразования

Предположим, мы хотим получить случайное число из последовательности, обладающей функцией распределения $F(x)$, т. е. реализацию случайной величины X, где $P\{X \leqslant x\} = F(x)$.

Можно показать, что если R — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$, то $F(X) = R$ и поэтому $X = F^{-1}(R)$, где F^{-1} — функция, обратная к F. Таким образом, если с помощью описанных выше методов получено некоторое число u_n — n-й член последовательности равномерно распределенных случайных чисел, то число $x_n = F^{-1}(u_n)$ является n-м членом последовательности случайных чисел, являющихся реализациями X. Оценка возможности использования данного метода основывается на соображениях вычислительного характера: если трудно вычислить точно обратную функцию, то следует воспользоваться другими методами, которые требуют меньших затрат машинного времени.

(а) *Экспоненциальное распределение.* Пусть $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, если $x \geqslant 0$, и равна нулю в противном случае. С помощью экспоненциального распределения часто моделируют такие величины, как время отказа прибора, время между двумя последовательными вызовами обслуживающего прибора и т. д. Экспоненциальным случайным числом является в таком случае

$$x_n = -\frac{1}{\lambda} \ln (1 - u_n).$$

Такое же распределение будет иметь реализация, которая немного более эффективна с вычислительной точки зрения, а именно

$$x_n = -\frac{1}{\lambda} \ln u_n.$$

Для генерации экспоненциальных случайных чисел обычно используется метод обратного преобразования; однако существуют более эффективные вычислительные методы (см. [1]). Успех при практическом использовании метода обратного преобразования определяется наличием простого способа вычисления функции, обратной F. В том случае, когда функция F задана в виде эмпи-

рического распределения, все равно следует использовать ту же процедуру или любую, ей эквивалентную.

(б) *Распределение Вейбулла.* Пусть $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\alpha}}$ при $x \geqslant 0$ и равна нулю в противном случае. Данное распределение называется *распределением Вейбулла*, оно часто используется в теории надежности. Обратная функция в данном случае имеет вид

$$x_n = \left[-\frac{1}{\lambda} \ln u_n\right]^{1/\alpha}. \tag{5}$$

(в) *Нормальное (гауссово) распределение.* Пусть

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-z^2/2}\, dz$$

— нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2. В методе Бокса — Маллера генерация случайных чисел с нормальным распределением осуществляется путем следующего преобразования. Пусть u_n, u_{n+1} — два числа [n — е и $(n+1)$ — е] в последовательности равномерно распределенных случайных чисел; тогда с помощью соотношений

$$\begin{aligned} y_n &= (-2 \log u_n)^{1/2} \cos 2\pi u_{n+1}, \\ y_{n+1} &= (-2 \log u_n)^{1/2} \sin 2\pi u_{n+1} \end{aligned} \tag{6}$$

получается пара некоррелированных, нормально распределенных случайных чисел со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице. Отсюда следует, что преобразование

$$\begin{aligned} x_n &= \mu + \sigma y_n, \\ x_{n+1} &= \mu + \sigma y_{n+1} \end{aligned} \tag{7}$$

формирует пару нормально распределенных случайных чисел со средним μ и дисперсией σ^2. В работе [1] предлагаются методы по многим показателям более эффективные, чем метод Бокса — Маллера.

(д) *Логарифмически нормальное распределение.* Случайная величина L распределена по логарифмически нормальному закону, если ее логарифм $\log L = X$ распределен по нормальному закону. Основание логарифма следует специально указать. Мы будем пользоваться натуральным логарифмом и обозначать его ln (логарифм по основанию $e = 2{,}718\ldots$). Таким образом, $L = e^X$, и, чтобы получить случайные числа l_n, распределенные по логарифмически нормальному закону, необходимо сначала сгенерировать нормально распределенные случайные числа x_n, а потом вычислить $l_n = e^{x_n}$. Если X имеет среднее μ и дисперсию σ^2, то L имеет следующие среднее и дисперсию соответственно

$$E[L] = e^{\mu+\sigma^2/2}; \quad \mathrm{Var}[L] \equiv \sigma_L^2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1). \tag{8}$$

Логарифмически нормальные распределения напоминают гамма-распределение и распределение Вейбулла (при $\alpha > 1$) тем, что они сдвинуты вправо и унимодальны. Они часто довольно хорошо описывают различные *временные* характеристики, например времена обслуживания и времена завершения работ. Существуют и другие простые и полезные преобразования. Например, если N подчиняется распределению Пуассона, то для больших $\mu = E[N]$ распределение величины $\sqrt{N}$ ближе к нормальному распределению, чем распределение величины N. Следовательно, если X имеет нормальное распределение, распределение $N \approx X^2$ аппроксимирует распределение Пуассона.

4.3. Композиция

Реализации многих случайных величин (т. е. выборки для различных распределений) удобно получать путем комбинации некоторых случайных величин, которые проще генерировать. Такой прием называется методом композиции. Ниже приводится несколько примеров композиции.

а) *Гамма-распределение, или распределение Эрланга.* Если плотность распределения вероятностей имеет вид гамма-функции, т. е. для $x > 0$

$$f_k(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda, \tag{9}$$

где k — целое положительное число, то реализацию y можно получить, сложив k экспоненциально распределенных случайных чисел:

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln (u_1 u_2 u_3, \ldots, u_k) = -\frac{1}{\lambda} \ln \prod_{i=1}^{k} u_i. \tag{10}$$

Благодаря мультипликативной форме записи логарифм необходимо вычислять только один раз. Из выражения (10) получается ряд случайных чисел со средним k/λ и дисперсией k/λ^2.

Труднее получить гамма-распределение с $0 < k < 1$; соответствующие методы описаны в работах [2, 27]. На практике иногда бывает удобно использовать случайные числа с распределением Вейбулла или логарифмически нормальным распределением, выборки которых легко получить с помощью метода преобразования. Выборки чисел для логарифмически нормального распределения или распределения Вейбулла практически совпадают с выборкой для гамма-распределения, если их первые моменты (среднее и дисперсия) равны соответствующим моментам гамма-распределения.

б) *Распределение Пуассона.* При распределении Пуассона для того, чтобы $N = k$ событий произошли на интервале $[0, t]$, сумма

k экспонент должна быть меньше t, а сумма $(k+1)$ экспонент — больше t. Таким образом, если необходимо генерировать случайные числа, подчиняющиеся распределению Пуассона, со средним λt, следует перемножать равномерно распределенные случайные числа до тех пор, пока их произведение не станет меньше $e^{-\lambda t}$, т. е. имитируется процесс появления k пуассоновских событий, для которого выполняются следующие соотношения:

$$\prod_{i=1}^{k} u_i > e^{-\lambda t} \text{ и } \prod_{i=1}^{k+1} u_i \leqslant e^{-\lambda t}. \tag{11}$$

Если λt достаточно велико (по крайней мере $\geqslant 25$), то нормально распределенная (по Гауссу) случайная величина, округленная до целого числа, может во многих случаях служить хорошим приближением для распределения Пуассона.

(в) *Составное распределение Пуассона.* В моделях управления запасами пуассоновский случайный процесс можно использовать для генерирования суммарной величины заказов в течение некоторого периода, и в то же время другая, независимая выборка определяет *размер* (объем) каждого отдельного заказа. Иногда оказывается удобным предположить, что размер (объем) индивидуального заказа является экспоненциально распределенной случайной величиной, причем λ^{-1} — ожидаемый (средний) размер заказов. Тогда в течение интервала времени t будет заказано суммарное количество материала, которое является случайной величиной, представляющей собою сумму независимых экспоненциально распределенных величин. Аналогично можно генерировать размеры заказов, предполагая, что они имеют другое распределение, например гамма-распределение или логарифмически нормальное распределение, а затем сложить их в количестве, определяемом пуассоновским случайным числом.

(г) *Биномиальное распределение.* Если N раз проводится эксперимент с бинарным случайным исходом (0 или 1; успех или поражение; девочка или мальчик и т. д.), то число успешных исходов X будет распределено по биномиальному закону. Чтобы получить реализацию X, можно просуммировать исходы эксперимента, проведенного N раз: $i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_N$, где

$$\begin{aligned} i_j &= 1, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant u_j < p, \\ i_j &= 0, \quad \text{если} \quad p \leqslant u_j \leqslant 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь p — вероятность успешного исхода, а u является случайным числом. При таком методе необходимо N случайных чисел для каждой реализации x, что может быть неэффективно при большом N и большом числе реализаций. Вместо этого можно хранить в памяти ЭВМ таблицу биномиального распределения и, по существу, использовать обратное преобразование. Пусть

$p_X(x) = P\{X = x\}$; тогда $X = x$, если случайное число u удовлетворяет условиям

$$\sum_{j=0}^{x-1} p_X(j) < u \leqslant \sum_{j=0}^{x} p_X(j). \tag{13}$$

4.4. Метод отбраковки

В принципе с помощью метода обратного преобразования можно получить случайные величины (вернее, их реализации в виде случайных чисел), подчиняющиеся любому закону распределения. На практике иногда бывает проще воспользоваться более расточительной процедурой (равномерно распределенными случайными числами), поскольку она требует меньшего объема вычислений. Грубо говоря, в *методе отбраковки* выборки извлекаются из распределения, для которого это легко сделать, а уже затем случайным образом некоторые из них отбраковываются для того, чтобы получить случайные числа с нужным законом распределения.

Предположим, что X — случайная величина, имеющая распределение $F(x)$, а плотность вероятности $f(x) = dF/dx$. Чтобы получить некоторую выборку методом отбраковки, найдем функцию $m(x)$, такую, что $m(x) \geqslant f(x)$, и выразим через нее плотность вероятности: $m'(x) = m(x)/\mu$, где μ находится из равенства $\int_{-\infty}^{+\infty} m'(x)\,dx = 1$ или $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} m(x)\,dx$. Теперь получим два случайных числа: u_1 и u_2. Число u_1 используем для того, чтобы сделать выборку x_1 из $m'(x)$; очевидно, что необходимое преобразование можно провести, если $M'(x) = \int_{-\infty}^{x} m'(z)\,dz$ — легкообратимая функция. Теперь сравним u_2 с $f(x_1)/m(x_1)$: если $u_2 \leqslant f(x_1)/m(x_1)$, то оставляем x_1 в качестве элемента выборки из F; если же $u_2 > f(x_1)/m(x_1)$, то отбраковываем x_1 и повторяем процедуру, начиная с новой пары равномерно распределенных величин u_3 и u_4. Для того чтобы получить один элемент выборки из F, потребуется в среднем взять μ таких пар.

Описанная выше процедура часто позволяет очень быстро генерировать реализации распределений, напоминающих гамма-распределение с нецелочисленным параметром k [см. формулу (9)]. Для генерирования реализации распределения (9) можно воспользоваться функцией

$$m(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{e^{-1}}{\Gamma(k)}, & \text{если } x \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{при } 0 < k \leqslant 1. \tag{14}$$

Здесь $\lambda = 1$, но в дальнейшем ее следует умножить на λ^{-1}. Соответствующая плотность вероятности будет иметь вид

$$m'(x) = \begin{cases} \frac{ek}{e-k} x^{k-1}, & 0 < x \leqslant 1 \\ \frac{ek}{e+k} e^{-x}, & 1 \leqslant x. \end{cases} \tag{15}$$

В работе [2] показано, что математическое ожидание количества шагов, необходимых для получения случайного числа с заданным распределением, не превышает 1,37.

Тот же подход можно использовать для генерирования случайных чисел с плотностью вероятности в виде бета-функции. Такие числа часто используются для оценки сроков завершения проекта (см., в частности, [22]).

5. ПОСТРОЕНИЕ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ДИСПЕРСИИ

Теперь перейдем к рассмотрению этапа (5) из разд. 2 (работа с моделью). Если говорить абстрактно, то эксперимент на имитационной модели позволяет получить реализации отклика W (выходной характеристики), который зависит от ряда других случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$:

$$W = f(X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots). \tag{16}$$

Данную ситуацию хорошо иллюстрируют примеры из разделов 3.2; 3.3. Обычно в имитационном эксперименте стараются выяснить, каким образом распределение величины W зависит от а) параметров распределения величин X_i; б) начальных условий модели; в) общего числа итераций, которыми оперируют в данной имитационной модели, например, таких, как наибольшее значение n [время или число заказов в формулах (1), (2)]. В частности, в задаче массового обслуживания можно поставить условие, что в начальный момент все обслуживающие приборы свободны или что в начальный момент в системе имеется некоторое заданное число заявок. Подобные начальные условия, касающиеся наличных запасов, представляют интерес при имитационном моделировании задач управления запасами, а для уравнения (1) данные о размерах начальной популяции являются просто необходимыми.

Предположим, что мы установили, какие выходные характеристики (отклики) и некоторые их функции представляют для нас интерес в каждом имитационном эксперименте. Теперь сформулируем основные принципы, которым необходимо следовать при проведении имитационного эксперимента.

(1) Никогда не проводите имитационный эксперимент, когда в нем нет необходимости, т. е. когда можно с помощью математических выкладок и вычислений найти все необходимые данные.

(2) Проводите сравнительные имитационные эксперименты, когда это возможно.

Поясним первый принцип на следующем примере. Предположим, что мы рассматриваем процесс обработки, состоящий из двух этапов, и пусть S_1 и S_2 — время обработки на соответствующем этапе. Нас интересует математическое ожидание длительности всего процесса. Ясно, что нет необходимости проводить имитационный эксперимент, поскольку $S = S_1 + S_2$, а интересующая нас величина $E(S) = E(S_1) + E(S_2)$ может быть легко вычислена на основе известных распределений величин S_1 и S_2. Иногда и более сложные сетевые задачи удается полностью проанализировать без моделирования. Имитационный эксперимент следует проводить только тогда, когда это действительно необходимо, например при наличии в сети нескольких параллельных путей или путей в виде мостика Уитстона. В работах [4, 5] описываются имитационные эксперименты с моделями типа ПЕРТ. В работе [6] показано, как, используя специфику задачи управления запасами, можно повысить эффективность процедуры выборки; обсуждение этой процедуры можно найти в [9].

Для иллюстрации второго из указанных принципов предположим, что мы хотим сравнить две системы массового обслуживания, которые отличаются только интенсивностью поступления заявок. Воспользуемся в каждой реализации *одной и той же* последовательностью равномерно распределенных случайных чисел для генерирования моментов поступления заявок на каждый прибор, например

$$A_{n1} = -\frac{1}{\lambda_1} \ln u_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

$$A_{n2} = -\frac{1}{\lambda_2} \ln u_n,$$

для модели, описываемой уравнением (2). В этом случае выходные характеристики (отклики) $W(1)$ и $W(2)$ могут оказаться положительно коррелированными, и оценка разности $E[W(1)] - E[W(2)]$, заданная как средние по выборкам $\bar{W}(1) - \bar{W}(2)$, будет приводить к меньшей дисперсии, чем при использовании в формуле (17) независимых случайных чисел u_n и u_n'. Отсюда можно заключить, что оценку разности $E[W(1)] - E[W(2)]$ можно сделать более точной для заданного числа реализаций.

Из приведенных примеров следует, что в результате моделирования нужно стремиться получить статистические оценки с минимальной дисперсией. Конечно, как исследователь, так и заказчик должны знать степень точности и достоверности этих оценок.

В следующем разделе будет описано несколько оригинальных методов получения случайной выборки. Будет указано, где можно познакомиться с ними более подробно. Начнем с простейшего примера.

5.1. Метод прямой выборки

Вернемся к уравнению (16). Из этого уравнения видно, что для получения одной реализации, или выборки из W, необходимо получить выборочные значения X_1, X_2, . . . и оценить функцию f, или, что то же самое, просмотреть предыдущие данные имитационных экспериментов. В предыдущем разделе были описаны процедуры получения реализаций для X_i; способ определения функции f можно проиллюстрировать на следующей задаче о времени ожидания [см. формулу (2)]. Пусть $W_1 = 0$; тогда $w_2 = \max[s_2 - a_2, 0]$, где w_2 является реализацией W_2, а s_2 и a_2 представляют собой реализации S_2 и A_2 соответственно. Затем находим $w_3 = \max[w_2 + s_3 - a_3, 0]$ и т. д. Нас могут интересовать такие выходные характеристики (отклики системы), как, например, $E(W_{10})$ — среднее время ожидания десятой заявки или $E(W_{+10})$ — среднее время ожидания десяти первых заявок, или $E[\max W_{10}]$ — среднее значение максимального времени ожидания для последних десяти заявок и т. д.

Следует заметить, что для получения одной реализации отклика необходимо провести несколько итераций. Например, для получения одной реализации w для W необходимо иметь *независимые* выборки X: s_2, a_2, s_3, a_3, . . ., s_n, a_n, ... Будем говорить о прямой (сквозной) выборке, если все X-реализации являются независимыми выборками для каждой отдельной w-реализации. Заметим, что несмещенная оценка $E[W]$ получается путем простого усреднения. Если осуществляется расчет k независимых реализаций, который начинается с данными начальными условиями и ведется до самого конца, то

$$\hat{E}[W] = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} w^{(j)} = \overline{w}, \tag{18а}$$

где $w^{(j)}$ — значение отклика, вычисленное на j-й реализации. Поскольку выборки независимы, дисперсия выборки является несмещенной оценкой $\mathrm{Var}[W]$ и

$$s_w^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k} (w^{(j)} - \overline{w})^2. \tag{18б}$$

Возможно, более важно то, что дисперсия оценки (17) равна s_w^2/k. Следует отметить, что, поскольку выборка является независимой по всем реализациям, дисперсия оценок отклика линейно уменьшается с ростом k, однако специальные процедуры выборки (например, метод Монте-Карло) позволяет повысить точность при меньшем числе выборок. Ряд таких методов приводится ниже; хотелось бы указать на целесообразность использования также

и комбинаций этих методов. Работоспособность такого приема обычно можно оценить только эмпирически на основании контрольного прогона.

5.2. Дополняющие (до единицы) переменные (метод компенсаций)

Вернемся к уравнению (2). Из него следует, что W_{n+1} увеличивается с ростом S_n и убывает при возрастании A_n. Интуитивно совершенно ясно, что во многих задачах обслуживания времена ожидания положительно коррелированы с временами обслуживания и отрицательно — с интервалами времени между приходами заявок. Такую же зависимость иногда удается обнаружить и в других задачах; эту особенность можно использовать для того, чтобы несколько увеличить точность по сравнению с точностью метода прямой выборки. Для реализации предложенной идеи воспользуемся равномерно распределенным случайным числом u [например, с помощью преобразования (3)], чтобы получить реализацию X. Для определенности будем считать, что $X = S_n$ из уравнения (2). Тогда, если u оказывается малым числом, x также может быть малым [как, например, в формуле (4)], а $(1 - u)$ и $X(a)$ — отрицательно коррелированная реализация, зависящая от $(1 - u)$, велики. Возьмем для примера уравнение (2) и покажем, каким образом образуются парные, или дополняющие, реализации, приводящие к $W(1)$ и $W(2)$. Пусть G — функция распределения времени обслуживания заявок, а F — функция распределения времени поступления заявок. Тогда для реализации $W(1)$

$$s_n(1) = G^{-1}(u_n), \quad a_n(1) = F^{-1}(u'_n),$$

в то время как для реализации $W(2)$ (19)

$$s_n(2) = G^{-1}(1 - u_n), \quad a_n(2) = F^{-1}(1 - u)'_n.$$

Здесь $\{u_n\}$ и $\{u'_n\}$ — взаимно независимые последовательности независимых, равномерно распределенных случайных величин. Следует отметить, что в работе [26] предложена другая идея построения метода компенсации, которая состоит в том, чтобы менять местами случайные числа в двух последовательных дополняющих реализациях:

$$\begin{aligned} &W(1)\colon s_n(1) = G^{-1}(u_n), \ a_n(1) = F^{-1}(u'_n), \\ &W(2)\colon s_n(2) = G^{-1}(u'_n), \ a_n(2) = F^{-1}(u_n). \end{aligned} \tag{20}$$

Чтобы получить оценку отклика, просто усредняют отклики дополняющих пар:

$$w_A^{(j)} = \frac{w^{(j)}(1) + w^{(j)}(2)}{2}; \tag{21}$$

$$\text{тогда } \hat{E}[W]_A = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} w_A^{(j)} = \overline{w}_A. \tag{22}$$

Дисперсия оценочной функции (21) выражается с помощью соотношения

$$s^2_{\hat{E}[w]_A} = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(w_A^{(j)} - \overline{w}_A)^2. \tag{23}$$

Следует принять во внимание, что в формуле (23) не оценивается величина Var $[W]$. Для дисперсии Var $[W]$ несмещенной оценкой будет

$$\widehat{\mathrm{Var}}[W] = \frac{1}{2(k-1)}\left[\sum_{j=1}^{k}(w^{(j)}(1) - \overline{w}(1))^2 + \sum_{j=1}^{k}(w^{(j)}(2) - \overline{w}(2))^2\right]. \tag{24}$$

Из эмпирических соображений следует, что для случая сильно загруженных систем процедура (20) лучше, чем (19).

5.3. Стратификация

Вместо того чтобы ограничиться рассмотрением двух отрицательно коррелированных откликов, иногда более целесообразно анализировать три или более откликов, используя идею так называемой стратификации. Предположим, что приведен параллельно расчет трех реализаций. Рассмотрим проблему выбора трех особых вариантов входной переменной X, которые обозначим соответственно через $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$. Возьмем однородные подобласти (страты) с одинаковой вероятностью $\left(\frac{1}{3}\right)$ — интервалы $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$. Выберем интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Тогда u будет равномерно распределенным случайным числом на интервале $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ и $x(1) = F^{-1}\left(\frac{1}{3} + u_1\right)$, а $x(2) = F^{-1}\left(\frac{2}{3} + u_1\right)$, $x(3) = F^{-1}(u_1)$, где F — функция распределения X. Следующая реализация выбирается из интервала $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Однако для этого может быть использован «разброс». Заметим, что два случайных числа — одно, чтобы выбрать подынтервал (страту), а другое, чтобы получить

результат,— обеспечивают входными данными три параллельные реализации. Внутри подынтервалов можно также воспользоваться методом компенсации и в результате получить шесть реализаций. Проведя усреднение по всем реализациям, получим окончательную оценку, а дисперсии вычисляются так же, как в (18б).

5.4. Выборка по значимости

Основная идея метода *выборки по значимости* состоит в том, что выборка проводится из распределения или процесса, отличного от того, который представляет непосредственный интерес, а затем производится корректировка результата, чтобы получить несмещенную оценку. В качестве иллюстрации возьмем следующую задачу: оценить вероятность того, что некоторая случайная величина (например, требования на производственные запасы) Z, имеющая функцию распределения $F(z)$ и плотность вероятности $f(z)$, превышает величину h:

$$P(Z > h) = \int_h^\infty f(z)\,dz. \tag{25}$$

Эту задачу можно сформулировать в виде задачи о математическом ожидании. Пусть $I(z)$ — функция следующего вида:

$$I(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geqslant h, \\ 0, & \text{если } z < h. \end{cases} \tag{26}$$

Нужно найти $E[I(Z)]$. Если произвести выборку k раз непосредственно из F, то элементарной оценкой $E[I(z)]$ будет

$$\widehat{E[I(Z)]} = \frac{\text{Число случаев, когда } Z \text{ превышает } h}{k}. \tag{27}$$

Очевидно, что дисперсия такой оценки определяется следующим образом:

$$\mathrm{Var}\{\widehat{E[I(Z)]}\} = \frac{[1-F(h)]\,F(h)}{k}, \tag{28}$$

а относительная погрешность такой оценки находится с помощью соотношения

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}\{\widehat{E[I(Z)]}\}}}{E[I(Z)]} = \sqrt{\frac{F(h)}{[1-F(h)]\,k}}. \tag{29}$$

Таким образом, когда значение величины h становится большим, вероятность, которую мы стремимся оценить, оказывается малой и относительная погрешность будет большой. Проще говоря, это

отражает тот простой факт, что если $Z > h$ — маловероятное событие, то $I(Z)$ скорее всего будет равно нулю.

В методе выборки по значимости требуется найти другое распределение вероятностей, которое позволяет чаще получать выборки в интересующей нас области. Пусть $g(v)$ является нужной нам плотностью распределения вероятностей. Теперь

$$P\{Z > h\} = \int_h^\infty f(z)\,dz = \int_h^\infty \frac{f(v)}{g(v)} \cdot g(v)\,dv.$$

Пусть V — случайная величина, имеющая плотность вероятности g; тогда очевидно, что функция I для нового отклика

$$I_V(v) = \begin{cases} \dfrac{f(v)}{g(v)}, & \text{если } v \geqslant h, \\ 0, & \text{если } v < h \end{cases}$$

будет иметь требуемое математическое ожидание, а удачно выбрав функцию g, можно иногда существенно улучшить точность оценки.

5.5. Управляющие переменные и регрессия

Предположим, что мы хотим оценить $E[W]$, применив метод возмущений к уравнению (16). В этом случае можно повысить точность, формулируя близкую по смыслу задачу, которую можно решить математическими методами и в дальнейшем использовать в качестве вспомогательного средства. Рассмотрим уравнение

$$W^* = f^*(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*),$$

где f^* может быть функцией, отличной от f, или $X_1^*, X_2^* \ldots$ являются случайными величинами с другой, более удобной функцией распределения, чем функция распределения величин X_1, $X_2 \ldots$. Теперь, если удастся провести реализацию X_1 и X_1^*, X_2 и X_2^* и т. д. таким образом, что они окажутся зависимыми (например, положительно коррелированными), то W и W^* будут зависимы, а этим уже можно воспользоваться, чтобы получить новую, почти несмещенную оценку, но с меньшей дисперсией, чем в случае метода прямой выборки. Пусть оценка имеет вид

$$\widehat{E[W]}_R = \overline{W} + \beta_0(\overline{W}^* - E[W^*]);$$

тогда, минимизируя дисперсию оценки, получаем

$$\beta_0 = -\frac{\operatorname{cov}[W, W^*]}{\operatorname{Var}[W^*]}.$$

Параметр β_0 следует оценить на основе исходных данных. Далее можно поступить следующим образом:

а) Провести имитационный эксперимент как для W, так и для W^*, чтобы получить пары коррелированных величин W_1, W_1^*; W_2, W_2^*; . . .; W_k, W_k^*. В таком эксперименте для получения x_1 и x_1^* и т. д. можно использовать одни и те же равномерно распределенные случайные числа.

б) Определить $E[W^*]$ с помощью аналитических методов (вспомогательная задача выбиралась именно с такой целью);

в) Вычислить $\overline{w}$, $\overline{w}^*$ и s_{w^*}. Если Var $[W^*]$ удается найти аналитически, то это только улучшает и ускоряет процедуру.

г) Вычислить $\hat{\beta}_0 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (w_i - \overline{w})(w_i^* - \overline{w}^*) \frac{1}{s_{w^*}^2}$.

д) Вычислить оценку $E[\hat{W}]_R = \overline{w} - \hat{\beta}_0 (\overline{w}^* - E[W^*])$. Такая оценка не является несмещенной, поскольку β_0 необходимо оценивать на основе исходных данных; почти несмещенную оценку можно получить за счет расщепления набора данных или воспользовавшись методом отсечения. Более детально последний метод рассматривается в следующем разделе. Использование указанного метода позволяет также получать доверительные пределы для неизвестного параметра.

5.6. Управление и методы рекуррентных событий в сетях массового обслуживания

Одна из трудностей, с которой приходится сталкиваться как при имитационном моделировании, так и при анализе результатов многих имитационных экспериментов, проведенных на моделях различных стохастических процессов, состоит в том, что очень часто в них отсутствует независимость. Однако в работах [8, 9, 19] показано, что в некоторых сетях массового обслуживания встречаются точки регенерации; такие точки как бы разделяют всю историю системы на независимые и одинаково распределенные отрезки. Например, в работе [19] описывается имитационный эксперимент с моделью замкнутой циклической сети станций обслуживания. Цель эксперимента состояла в том, чтобы оценить интенсивность обслуживания на каждом этапе в установившемся режиме (интенсивность обслуживания равна сумме времен занятости по всем станциям на данном этапе, деленной на время проведения эксперимента). В работе [19] показано, что соответствующим образом взвешенная линейная комбинация наблюдаемых интенсивностей обслуживания на всех этапах дает более точную (с меньшей дисперсией) оценку интенсивности обслуживания на i-м этапе ($i = 1, 2, 3, \ldots, s$), чем прямая оценка интенсивности обслуживания на этапе i. Автор предлагает использовать аналитические методы определения весовых коэффициентов, когда

время обслуживания имеет экспоненциальное распределение, а затем, основываясь на этих оценках, получить оценки весов для неэкспоненциальных распределений. Кроме того, в работе [19] сообщается, что в обоих случаях наблюдается удовлетворительное уменьшение доверительных интервалов.

6. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Имитационные эксперименты часто требуют и в свою очередь генерируют огромное количество данных. Уже на начальных этапах эксперимента появляются данные, имеющие отношение к результатам исследования. Как раз в это время следует собирать подходящую информацию, оценивать ее с точки зрения всей задачи, проверять, не содержится ли в ней ошибки, а затем суммировать и использовать в процессе моделирования. Процедуры статистической обработки данных неформально-исследовательского типа [29] особенно полезны на этом этапе исследований, поскольку с их помощью удается иногда выяснить неожиданные факты, касающиеся исходных данных для моделирования. (Например, в самом ли деле время обслуживания не зависит от длины очереди или действительно ли по одному и тому же закону распределены ежедневные заявки на производственные запасы?) Менее пригодны формальные методы, такие, как процедуры проверки гипотез. Весьма вероятно, что рассогласование и несоответствие грубой модели и исходного процесса (например, для экспоненциального распределения) легче обнаружить и оценить, если на окончательном этапе вычислительного эксперимента провести проверку чувствительности модели.

Сложность внутренней структуры данных обусловлена тем, что многие *результаты* имитационных экспериментов являются реализациями случайного процесса, т. е. динамическими (*временными*) *рядами*. В результате последовательные наблюдения не являются независимыми — факт, который не учитывается в большинстве используемых статистических процедур. Кроме того, часто в целях уменьшения дисперсии специально вводятся зависимости между реализациями, например в методе компенсаций [дополняющие (до единицы) переменные]. И наконец, взаимозависимые наблюдения явно далеки от такого удобного распределения, как нормальное (гауссово), для которого имеются общеизвестные стандартные статистические процедуры проверки, как, например, t-статистика Стьюдента для сравнения средних значений, анализа дисперсии и т. д. Общий и весьма полезный подход к решению таких проблем состоит в преобразовании данных (см. [14]). В реальных задачах исследования операций часто встречаются данные (временные ряды), которые описываются

асимметричными распределениями с длинными правыми «хвостами»— несколько гипертрофированными вариантами экспоненциального или логарифмически нормального распределения. Действительно, такой особенностью обладают следующие величины: времена обслуживания, размеры заказов, интервалы времени между моментами поступления требований, длины очередей, времена ожидания и т. д. В такой ситуации, прежде чем проводить дальнейший анализ, можно применить операцию логарифмирования.

Следует отметить, что в настоящее время поведение статистических процедур или статистических оценок по отношению к нестандартным наборам данных обычно изучается с помощью имитационных экспериментов [3].

Теперь кратко рассмотрим, как методы статистического анализа используются в некоторых типичных ситуациях, возникающих в имитационных экспериментах.

6.1. Независимые реализации

Предположим, что мы хотим изучить некоторую переменную случайного отклика W и получили n независимых реализаций $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Прежде всего очень полезно представить получаемые результаты графически в виде гистограмм, распределений по выборке, причем это удобно делать на специальной бумаге или на полулогарифмической бумаге. При этом сразу обнаруживаются экстремальные выбросы или неожиданные сгущения; в частности, они могут объясняться ошибками в машинной программе. Затем можно применить обычные статистические методы для того, чтобы получить а) точечную оценку $E[W]$, например через $\bar{w}$; точечную оценку $\mathrm{Var}[W]$, например через s^2, и т. д.; б) оценки доверительных интервалов для $E[W]$, например используя t-распределение Стьюдента, доверительные интервалы для $\mathrm{Var}[W]$, но скорее всего не обычным методом χ^2, так как результаты будут чувствительны или неустойчивы к отклонениям W от нормального закона распределения. В данном случае будет полезна процедура отсечения, которая подробно изложена в работе [21]. Доверительные интервалы для других, более сложных оценок также можно получить с помощью метода отсечения.

Метод отсечения. Процедуру отсечения мы проиллюстрируем на примере построения приближенных доверительных границ для некоторого параметра; при этом мы воспользуемся сложной оценкой, полученной из имитационной выборки. В качестве параметра возьмем дисперсию среднего времени ожидания первых k заявок в системе с одним обслуживающим прибором [11]. Если имеется

n независимых реализаций, то можно вычислить

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (w_i - \overline{w})^2,$$

где w_i — среднее время ожидания для первых k заявок в i-й реализации, а $\overline{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1} w_i$. Оценка s^2 является несмещенной оценкой σ^2 — параметра, который нас интересует. В данном случае критерий χ^2 нельзя использовать для получения приближенных доверительных границ, поскольку случайные величины w_i не распределены по нормальному закону. Далее поступаем следующим образом:

а) вычисляем $\theta(s^2)$, где θ — преобразование, в результате которого, как правило, выборочные распределения s^2 становятся симметричными; например, преобразования вида $\theta(\cdot) = \log(\cdot)$ или $\theta(\cdot) = \sqrt[3]{\cdot}$ подходят для наших целей, причем преобразование $\theta(\cdot) = \log(\cdot)$ используется чаще;

б) вычисляем $\theta_{-j}(s^2)$ — оценки, в которых отброшено j-е наблюдение w_j, например

$$\theta_{-1}(s^2) = \log\left[\frac{1}{n-2} \sum_{i=2}^{n} (w_i - \overline{w}_{-1})^2\right], \quad \overline{w}_{-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} w_i,$$

таких величин будет n;

в) вычисляем *псевдослучайные величины*

$$y_j = n\theta(s^2) - (n-1)\,\theta_{-j}(s^2), \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

г) вычисляем средние значения и дисперсии для псевдослучайных величин:

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j,$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \overline{y})^2;$$

д) берем $\overline{y} = \widehat{\theta(s^2)}$ в качестве несмещенной оценки $\theta(\sigma^2)$, а $\theta^{-1}(\overline{y})$ — в качестве почти несмещенной оценки σ^2;

е) считая псевдослучайные величины независимыми, рассматриваем распределение

$$t = \frac{\overline{y} - \theta(\sigma^2)}{s_y/\sqrt{n}}$$

как t-распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы. Следовательно, выражение

$$\bar{y} - t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \frac{s_y}{\sqrt{n}}, \quad \bar{y} + t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \frac{s_y}{\sqrt{n}}$$

является приближенным $(1-\alpha)\cdot 100$-процентным доверительным интервалом для θ (σ^2), если $t_{1-\alpha/2}^{n-1}$ представляет собой процентиль $(1-\alpha/2)\cdot 100$ для распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

6.2. Сравнения

Часто возникает необходимость сравнивать различные отклики, например w_1 и w_2. Для этого предварительно следует сравнить их графические изображения. Помимо того, что было предложено в разд. 6.1, можно построить график зависимости x_{1i} от x_{2i} или исследовать условную гистограмму x_{1i}, когда значение x_2 лежит в заданном интервале, и т. д. В частности, нас может интересовать оценка разности $E[W_1] - E[W_2]$. В этом случае, если имеются независимые реализации $w_{11}, \ldots, w_{1,n_1}$ и $w_{21}, \ldots, w_{2,n_2}$, t-статистика Стьюдента даст доверительные границы для интересующей нас разности. Правда, возникают осложнения, если дисперсии $\mathrm{Var}[W_1]$ и $\mathrm{Var}[W_2]$ различны; это так называемая проблема Беренса — Фишера. Подходы к ее решению изложены в работе [28]. В этом случае также можно применить подходящее преобразование. При сравнении W_1 и W_2 было замечено, что если использовать одни и те же случайные числа при генерировании реализаций для сравнения, то разности $w_{1i} - w_{2i}$ часто дают более точные доверительные границы, чем при использовании независимых реализаций [11]. В тех ситуациях, о которых говорилось выше, не следует пользоваться непараметрическими тестами из двух выборок (например, проверкой знака или критерием Уилкоксона). В работе [10] показано, как учитывать влияние перекрестных зависимостей.

6.3. Установление соотношений и зависимостей

Имитационные модели можно использовать для того, чтобы установить зависимость одного или нескольких откликов от некоторых основных параметров. Например, может представлять интерес вопрос о том, какое влияние на среднее время прохождения заявки по всей сети окажет изменение среднего времени обслуживания либо среднего времени обработки на некотором этапе в сети обслуживания. Вполне возможно, что удастся параметрически выразить $E[W]$ через $E[X_i]$. Обычно в таких случаях

пытаются «подобрать» соответствующую функцию в виде

$$E[W] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i],$$

например используя метод наименьших квадратов. Такую «подгонку» можно выполнить с помощью соответствующих пакетов программ, имеющихся в большинстве вычислительных центров. Более того, указанная процедура может оказаться полезной даже в тех случаях, когда строгие математические условия (теорему Гаусса — Маркова) нельзя проверить. Исследователю следует тщательно проверять адекватность подобной «подгонки» путем анализа соответствующих разностей и соблюдать особую осторожность, проводя экстраполяцию. Чтобы представить подобранную функцию соответствующим образом, можно воспользоваться также математической теорией приближений. Следует обратить внимание на тот факт, что в указанной процедуре можно заменить метод наименьших квадратов любым другим из недавно разработанных нелинейных методов аппроксимации; для целей регрессионного анализа можно использовать так называемые робастные процедуры Эндрюса и др., которые подробно рассмотрены в работе [15].

6.4. Динамические процессы

Имитационное моделирование часто используется при изучении динамических многошаговых процессов обслуживания (на транспорте, в вычислительных системах), в системах управления кадрами и производственными запасами, при решении проблем, связанных с производством и хранением продукции. Для таких задач и соответствующих процессов может наблюдаться стремление к статистическому равновесию или установившемуся режиму. Иногда желательно оценить характеристики таких режимов, в частности среднее время ожидания и среднее время прохождения через систему заявок или товаров. Такие характеристики можно найти путем усреднения отдельных откликов, полученных в одной реализации процесса, считая, что установившийся режим не достигнут. При этом возникают определенные трудности, поскольку а) существует неопределенность относительно того, когда фактически выполняются условия равновесия, т. е. когда можно начинать усреднение, и б) значения откликов, следующих один за другим, не являются независимыми. Следует заметить, что взаимозависимость откликов затрудняет оценку дисперсии среднего значения по выборке и, следовательно, оценку точных доверительных границ.

Для анализа указанных проблем были предложены различные методы. В работах [9, 16] авторы получают доверительные грани-

цы, воспользовавшись особенностями некоторых задач с большим числом обслуживающих приборов, например тем, что существуют рекуррентные события. В частности, в работе [9] автор предлагает применять спектральный статистический анализ для получения оценок дисперсии при наличии зависимых событий. Такой подход можно применять, поскольку во многих вычислительных центрах в настоящее время существуют соответствующие пакеты программ. В статье [7] обсуждается вопрос эффективности использования среднего значения по выборке в качестве оценки в точно таких же ситуациях и высказывается предположение о том, что такую оценку целесообразно применять во многих имитационных моделях.

Что касается п. «а», то следует рассмотреть возможность применения в задаче метода сглаживания (скользящего среднего) и, графически изображая процесс, указать момент, когда, по существу, наступает равновесие. Например, если процесс начинается с нуля, то можно подобрать кривую роста, например с помощью логистической кривой, и в результате удается весьма просто описать приближение к равновесию. В заключение следует отметить, что в настоящее время имеются прекрасные возможности для плодотворной работы в рассмотренной области научных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahrens J. H., Dieter U., Computer Methods for Sampling from the Exponential and Normal Distributions, *Communications ACM*, 15, No. 10 (October 1972).
2. Ahrens J. H., Dieter U., Computer Methods for Sampling from the Gamma, Beta, Poisson, and Binomial Distributions, *Computing*, 13 (1974).
3. Andrews D. F., Bickel P., Hampel F., Huber P., Rogers W., Tukey J; Robust Estimates of Location, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972.
4. Burt J., Garman M., Monte Carlo Techniques for Stochastic Network Analysis, Proc. Fourth Annu. Conf. on Applic. of Simulation, 1970.
5. Burt J. M., Gaver D. P., Perlas M., Simple Stochastic Networks, Some Problems and Procedures, *Nav. Res. Log. Quart.*, 17, No. 4 (December 1970).
6. Carter G., Ignall E., Virtual Measures for Computer Simulation Experiments, RAND Corp., P-4817, Santa Monica, April 1972.
7. Chipman J., Kadiyala K., Madansky A., Pratt J., Efficiency of the Sample Mean When Residuals Follow a First-Order Stationary Markoff Process, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 63 (1968).
8. Crane M., Iglehart D. L., Statistical Analysis of Discrete Event Simulations, Proc. 1974 Winter Simulation Conf., 1974.
9. Fishman G. S., Concepts and Methods in Discrete Event Simulation, Wiley-Interscience, Wiley, New York, 1973.
10. Gastwirth J., Rubin H., Effect of Dependence on the Level of Some One-Sample Tests, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 66 (December 1971).
11. Gaver D. P., Methods for Assessing Variability, With Emphasis on Simulation Data Interpretation, Proc. Int. Symp. on Uncertainties in Hydrologic and Water Resource Systems, Univ. of Arizona, Tucson, Arizona, 1972.

12. Gaver D. P., Shedler G. S., Approximate Models for Processor Utilization in Multiprogrammed Computer Systems, *SIAM J. Comput.*, 2, No. 3 (September 1973).
13. Gaver D. P., Thompson G. L., Programming and Probability Models in Operations Research, Brooks/Cole, Monterey, California, 1973.
14. Hald A., Statistical Theory with Engineering Applications, Wiley, New York, 1952.
15. Huber P., Robust regression: Asymptotics, Conjectures, and Monte Carlo, *Ann. Stat.*, 1, No. 5 (September 1973).
16. Iglehart D. L., Limiting Diffusion Approximations for the Many Server Queue and the Repairman Problem, *J. Appl. Prob.*, 2, No. 2 (December 1965).
17. Knuth D., The Art of Computer Programming, Vol. II, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969. [Имеется перевод: Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ.— М.: Мир, 1977.]
18. Koopman B. O., Air-Terminal Queues Under Time Dependent Conditions, *Operations Res.*, 20, No. 6 (November — December 1972).
19. Levenberg S., Efficient Estimation Via Simulation of Work Rates in Closed Queueing Networks, IBM Res. Lab., San Jose, California, 1974.
20. Marsaglia G., Random Numbers Fall Mainly in the Planes, *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, 60 (1968).
21. Miller R. G., Jackknifing Variances, *Ann. Math. Stat.*, 35, No. 4 (1964).
22. Moder J. J., Phillips C. R., Project Management with CPM and PERT, Van-Nostrand Reinhold, New York, 1970.
23. Naylor T. H., Balintfy J. L., Burdick D. S., Chu K., Computer Simulation Techniques, Wiley, New York, 1966.
24. Nelson C. R., Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting, Holden Day, San Francisco, 1973.
25. Newell G. F., Applications of Queueing Theory, Chapman-Hall, London, 1971.
26. Page E. S., On Monte Carlo Methods in Congestion Problems, II, *Operations Res.*, 13 (1965).
27. Phillips D. T., Beightler C., A Procedure for Generating Gamma Variates With Non-Integer Parameter Sets, Proc. Fifth Annu. Conf. on Applic. of Simulation, 1971.
28. Scheffé H., Practical Solutions of the Behrens-Fisher Problem, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 65 (December 1970).
29. Tukey J. W., Exploratory Data Analysis, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1977.

III-8. Вычислительные аспекты имитационного моделирования

Д. Гордон[1)]

Имитационное моделирование, понимаемое в широком смысле, охватывает многие области человеческой деятельности. Сюда можно отнести такие разные имитационные модели, как летательная аппаратура в аэродинамических трубах, тренажеры для пилотов и военные игры. В данной главе обсуждается один из аспектов имитационного моделирования, а именно использование вычислительных машин для имитационных экспериментов с дискретными моделями систем, особенно с моделями систем, включающих стохастические (случайные) процессы. Обычно в таких системах рассматриваются процессы обслуживания заявок, которые имеют разное время обслуживания, изучаются процессы принятия решения о выборе последовательности исходов. Характеризуются эти системы (или процессы) такими факторами, как функция распределения длины очереди и время реакции (отклика). В конце данной главы приведена библиография по применению методов имитационного моделирования для дискретных систем.

Когда говорят о системе, в которой протекают случайные процессы, то понимают под этим то, что существуют случайные события, наступление которых изменяет состояние системы дискретно, в некоторые определенные моменты времени. Тогда как в исследовании операций разрабатываются методы анализа случайных процессов, в имитационном моделировании просто «имитируют» последовательность событий, прослеживая изменение состояний системы. В данной главе описываются методы и приемы программирования, позволяющие представлять и отслеживать сложные последовательности событий, которые могут происходить случайно и асинхронно. Поскольку события наступают как результат некоторых случайных процессов, то в моделях требуется генерировать и измерять случайные числа; необходимые для этого методы рассмотрены в предыдущей главе.

1. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ

Имитационный эксперимент, по существу, представляет собой некоторую вычислительную процедуру. К нему обращаются, когда не удается сформулировать задачу в виде математической модели,

---

[1)] Geoffrey Gordon, IBM Corporation.

которую можно было бы решить различными методами, разработанными в области исследования операций. В отличие от этих методов для имитационного эксперимента не требуется приводить модель к специальной форме. Такой подход обладает значительной гибкостью, и отработанную в результате имитационного эксперимента модель можно привести в хорошее соответствие с исследуемой системой. Исследователь оказывается фактически в положении экспериментатора и оперирует с моделью так, как ему хотелось бы оперировать с самой системой. Соответственно получаемые на модели результаты во многом схожи с наблюдениями и измерениями, которые можно было бы получить в самой системе. Какие бы ни были заданы вопросы о поведении системы, ответы следует формулировать в четких количественных терминах. Например, на вопросы типа «При каких условиях некоторый параметр системы будет оптимальным?» следует отвечать после того, как будет исследован целый набор условий и удастся обнаружить условия, при которых достигается оптимальное значение параметра.

Для имитационных экспериментов разработано большое число систем программирования, включающих специальные языки программирования для описания моделей. Одни из них универсальны, другие же предназначены для описания специальных типов систем. Некоторые из них описаны в работах, указанных в списке литературы, приведенном в конце главы. В системы программирования входят алгоритмы управления последовательностью событий, а также «служебные» подпрограммы для статистической обработки и подготовки выходных результатов. Значительная часть всей работы по проведению и подготовке имитационного эксперимента выполняется с помощью специализированных языков моделирования, поскольку они позволяют пользователю сконцентрировать внимание на задаче построения самой модели, а не на технических деталях проведения имитационного эксперимента. Тем не менее универсальные языки программирования, такие, как ФОРТРАН, АЛГОЛ и PL/1, также используются при моделировании. В частности, существует несколько типов имитационных моделей, в которых алгоритмы обработки событий существенно проще, чем процедуры, необходимые для представления случайных процессов, и в результате не составляет большого труда написать соответствующие программы на неспециализированном языке. В последнем случае появляется возможность использовать знакомый язык и открывается доступ к другим пакетам программ, которые разработаны специально для анализа систем такого типа, как моделируемая. Конечно, универсальные языки в равной степени применимы и для более простых видов имитационного моделирования.

Построение модели несколько упрощается, если в нее не входит время. Например, процесс принятия решения может состоять из ряда последовательных шагов, а интерес представляет только конечный результат. В данном случае поэтапный вычислительный метод, включенный в моделирование, может быть использован для выполнения расчетов в соответствии с последовательностью шагов.

Методы Монте-Карло образуют другую самостоятельную группу. Эти методы используются при изучении математических уравнений путем статистических испытаний. Например, если анализ системы приводит к необходимости вычисления сложного многомерного интеграла, то можно использовать методы Монте-Карло. С точки зрения имитационного моделирования решение таких задач состоит в многократном повторении реализаций некоторого случайного события. Конечно, при этом весьма существенными являются проблемы генерирования и измерения случайных величин, рассмотренные в предыдущей главе.

Эконометрические модели являются примерами несколько другого класса задач, которые могут оказаться относительно простыми с точки зрения проведения имитационного эксперимента. В эти модели в качестве одного из параметров входит время, но обычно в такой форме, что значения переменных вычисляются через регулярные интервалы, скажем каждый год. В этом случае управление вычислениями осуществляется довольно легко. Трудности же состоят в том, чтобы понять, в каком порядке следует проводить расчеты по уравнениям, когда в них присутствуют «запаздывающие» переменные (т. е. переменные, которые необходимо учитывать в нескольких интервалах времени и, следовательно, использовать в вычислительной процедуре несколько раз). Однако такие вопросы относятся скорее к проблемам формирования модели, чем к методам и процедурам самого имитационного эксперимента. Модели, в которых необходимо только решать систему уравнений через равные промежутки времени, возникают в таких областях, как экономические, общественные и социальные науки.

2. МОДЕЛИ СИСТЕМ

Поскольку модели, используемые при имитационных экспериментах, не требуется укладывать ни в какую жесткую схему, то к настоящему моменту не выработана определенная терминология для описания имитационных моделей. Однако широкое распространение получили три термина, которые будут использованы, чтобы внести ясность в последующее изложение. Термин *объект* выбран для обозначения отдельного структурного элемента системы. Считается, что каждый объект имеет *признаки*, кото-

рые описывают его свойства или состояние. Кроме того, существуют *действия*, которые вызывают изменения в системе либо через изменение значений признаков, либо путем создания (или уничтожения) объектов.

В каждом специализированном языке имитационного моделирования имеется собственный набор терминов для описания имитационных моделей, но введенные выше три основных понятия будут всегда присутствовать, хотя в языке могут и не использоваться термины «объект», «признак» и «действие».

Исследователь должен прежде всего сформировать модель системы. Отсутствие установившихся формальных правил и понятий дает ему большую свободу, но при построении имитационной модели всегда имеется опасность, что слишком подробное описание реальной системы приведет к модели, содержащей намного больше деталей, чем нужно на самом деле. Поскольку имитационный эксперимент представляет собой поэтапный вычислительный процесс, а для целей исследования может потребоваться много имитационных экспериментов с различными условиями, то общий объем вычислений растет очень быстро с увеличением размеров модели. Таким образом, очень важно бывает понять и точно решить, какая степень детализации фактически необходима, чтобы ответить на вопросы, касающиеся свойств системы. В дальнейшем при построении модели следует свести число используемых деталей до необходимого минимума. Объем вычислений определяется в основном общим числом событий, которые необходимо имитировать. Имитационная модель значительно упрощается, если удается объединить ряд элементарных действий в некоторое обобщенное действие. Например, пусть в ЭВМ поступают сигналы-сообщения от сети терминалов; эти сигналы-сообщения нужно представить в виде некоторой модели. В данном случае целесообразнее использовать единственный источник сигналов, закон поступления которых задается в соответствии с законом поступления сигналов от всей сети в целом. При этом можно приписывать каждому сигналу в качестве признака случайный источник его генерации, а не пользоваться отдельными источниками для каждого терминала. В результатах удается избежать процедуры, связанной с опросом отдельных терминалов и определением наличия или отсутствия от них сообщений.

Различные типы событий в модели рассматриваются в разных масштабах времени, или, как еще говорят, имеют свою временну́ю шкалу, причем диапазон изменения масштабов таких шкал времени является важным показателем степени детализации модели. В приведенном выше примере сети терминалов использование в модели единственного источника позволяет рассматривать события, происходящие в десятые доли секунды, тогда как попытка моделирования полной процедуры опроса терминалов, вероятно,

привела бы к необходимости одновременного рассмотрения наборов событий как с миллисекундным масштабом времени, так и с десятисекундной или даже минутной шкалой времени. Уменьшение диапазона изменения масштабов времени приводит к упрощениям, которые ускоряют и облегчают процесс моделирования.

Конечно, анализ и изучение методов опроса терминалов могут быть предметом специального имитационного эксперимента, в результате которого, в частности, могут быть получены статистические характеристики входных сигналов. Такие статистические характеристики являются необходимыми исходными данными для изучения свойств вычислительной системы. Последнее замечание указывает нам другой метод упрощения процесса исследования: разбиение исходной модели на части, которые либо независимы, либо связаны не слишком жестко.

При моделировании большинства систем не составляет особого труда решить, какие объекты следует включать в рассмотрение. Например, в имитационной модели цеха объектами, очевидно, являются станки и обрабатываемые на них детали. Однако некоторые дополнительные соображения могут оказать влияние на степень сложности модели. Например, если в цехе имеется группа одинаковых станков, на каждом из которых можно изготовлять любую деталь, то желательно рассматривать данную группу станков как отдельный объект, а в качестве признаков такого объекта взять общее число станков в группе и число станков, работающих в текущий момент времени. Оперируя с таким объектом, можно использовать меньший объем массивов данных. Однако сделанное упрощение подразумевает, что группа станков загружается деталями из одной очереди, тогда как в реальной системе, вероятно, существует отдельная очередь для каждого станка. Заказчик и исследователь должны вместе решить, насколько существенны последствия такого «огрубления» реального процесса. Аналогичные вопросы возникают и при наличии деталей различного типа. В этом случае приходится решать, следует ли представлять каждый тип деталей в виде отдельного объекта или же использовать один общий объект, а тип деталей рассматривать как признак. Последнее допущение в общем случае приведет к более простой модели.

Моделируя другие системы, приходится проявлять изобретательность при выборе объектов. При этом могут возникнуть трудности, связанные с представлением признаков в числовой форме. Например, в социальных исследованиях иногда необходимо разбить популяцию на довольно произвольные группы, а для модели экономической системы может понадобиться разделить рынок на некоторое число частей по типу покупателей или их географической принадлежности. Такие качественные показатели, как удовлетворение спроса, уровень жизни или отклик на полити-

ческую статью, часто необходимо свести к некоторому набору чисел. Очевидно, что справедливость и достоверность такого способа отображения спорна, но тем не менее данные необходимо представлять в числовой форме, поскольку в имитационном эксперименте мы имеем дело с числами, а сам эксперимент представляет собой некоторую вычислительную процедуру. В подобных экспериментах часто приходится использовать довольно искусственные исходные данные, но, несмотря на это, такие исследования обычно оказываются достоверными, поскольку позволяют получать относительные характеристики, например ранжированные показатели.

С практической точки зрения важно четко различать постоянные и вре́менные объекты. Вернемся опять к модели цеха, где станки являются постоянными объектами, которые рассматриваются на протяжении всего процесса моделирования, тогда как обрабатываемые детали представляют собой типичный пример вре́менных объектов, которые появляются и исчезают в процессе имитационного эксперимента. Для двух указанных типов объектов в общем случае используются различные способы представления и записи данных. Постоянные объекты можно компактно и эффективно представлять в виде таблиц, а вре́менные объекты лучше записывать в переменные массивы, для работы с которыми обычно используются процедуры обработки списков, изложенные ниже.

3. МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОГО ЦЕХА

Принципы построения и проведения дискретного имитационного эксперимента продемонстрируем на следующем примере. Рассмотрим простейший механический цех (или отдельный этап производственного процесса в более сложном механическом цехе). Предположим, что в цехе обрабатываются детали пяти типов. Детали поступают в случайные моменты времени и, кроме того, они распределены случайно по различным типам. В цехе имеется три станка, каждый из которых может обрабатывать деталь любого типа. Если станок свободен в момент прихода детали, то обработка детали начинается сразу. Если же в момент прибытия детали все станки заняты, то деталь будет ждать обслуживания. По окончании обработки детали отправляются к месту назначения, зависящему от их типа. Дальнейшее продвижение деталей (после того как они покинули цех) прослеживаться не будет. Однако будет запоминаться общее число деталей каждого типа, обработанных и отправленных по назначению.

Ясно, что в данной системе имеется два типа объектов: детали и станки. В модели будет существовать поток вре́менных объектов, представляющих детали, которые поступают на обработку и покидают систему. В данном случае нецелесообразно ставить в соот-

ветствие разным типам деталей различные объекты, тип детали является скорее ее признаком. Как уже отмечалось ранее, проще рассматривать группу станков как один постоянный объект модели, а в качестве признаков использовать общее число станков и количество станков, занятых в текущий момент времени. Действиями, которые вызывают изменения в системе, являются поступление деталей, ожидание, обработка и отправление из цеха.

4. ОТОБРАЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Чтобы записать состояние системы в любой момент времени, необходимо сформировать некоторый набор чисел. Такой набор чисел называют *отображением системы*, поскольку он отражает состояние системы. Имитационный эксперимент протекает следующим образом. На основе отображения системы принимается решение о том, когда должно наступить следующее событие и каков его тип. Далее проверяется осуществимость такого события, т. е. возможность выполнения действия, соответствующего данному событию. После этого производятся изменения в отображении системы, которые вызваны рассматриваемым событием.

В отображении должно содержаться число, представляющее собой индикатор времени («часы»). Это число будет возрастать, но увеличение будет происходить не равными частями, а в зависимости от наступления событий в системе. Другими словами, время в модели будет отслеживаться по моментам наступления событий; в такие моменты «часы» модели переводятся вперед. Запись каждой детали будет состоять из четырех чисел, представляющих тип детали, время поступления, время обработки и момент времени, когда деталь будет участвовать в следующем событии. Первые три элемента являются случайными величинами, которые генерируются с помощью методов, описанных в предыдущей главе. Время наступления следующего события в общем случае зависит от состояния системы и будет получено в процессе имитационного эксперимента.

На рис. 1 представлена схема организации отображения системы. На рисунке выделены четыре блока, в которых представлены последовательные состояния системы. Блоки следует читать слева направо и сверху вниз. Блок в левом верхнем углу относится к исходному состоянию. Описание отображения системы будет проводиться в соответствии с обозначениями данного блока, который будем называть блоком № 1.

Верхняя строчка в блоке № 1 описывает очередную деталь, которая должна поступить в систему. Как показано на рисунке, это деталь типа 2, на ее обработку потребуется 75 мин, а поступить она должна в момент времени 1002. Указанный момент времени,

	Тип детали	Длительность обработки	Время поступления	Момент наступления следующего события
Следующая деталь	2	75	1002	1002
Детали, ожидающие обработки	4	52	992	—
	3	84	976	—
Детали, находящиеся в обработке	3	43	972	1040
	1	21	936	1017
	2	62	896	1003
Счетчик времени				1000

Счетчики обработанных деталей	1	2	3	4	5
	12	22	20	31	15

	Тип детали	Длительность обработки	Время поступления	Момент наступления следующего события
Следующая деталь	1	68	1018	1018
Детали, ожидающие обработки	2	75	1002	—
	4	52	992	—
	3	84	976	—
Детали, находящиеся в обработке	3	43	972	1040
	1	21	936	1017
	2	62	896	1003
Счетчик времени				1002

Счетчики обработанных деталей	1	2	3	4	5
	12	22	20	31	15

	Тип детали	Длительность обработки	Время поступления	Момент наступления следующего события
Следующая деталь	1	68	1018	1018
Детали, ожидающие обработки	2	75	1002	—
	4	52	992	—
Детали, находящиеся в обработке	3	84	976	1087
	3	43	972	1040
	1	21	936	1017
Счетчик времени				1003

Счетчики обработанных деталей	1	2	3	4	5
	12	23	20	31	15

	Тип детали	Длительность обработки	Время поступления	Момент наступления следующего события
Следующая деталь	1	68	1018	1018
Детали, ожидающие обработки	2	75	1002	—
Детали, находящиеся в обработке	3	84	976	1087
	4	52	992	1069
	3	43	972	1040
Счетчик времени				1017

Счетчики обработанных деталей	1	2	3	4	5
	13	23	20	31	15

Рис. 1. Модель механического цеха.

конечно, является также моментом наступления следующего события.

Сразу под верхней строкой находится список деталей, которые поступили раньше и в данный момент ожидают обслуживания; этот список может содержать произвольное число строк. В рассматриваемый момент времени в данном списке указаны две детали, ожидающие обслуживания. Как видно из рисунка, они внесены в список в порядке поступления. Поскольку ожидающие обслуживания детали еще не обработаны, то невозможно предсказать время наступления для них следующего события. Для этого пришлось бы просмотреть всю схему, выяснить, существует ли

деталь, которая будет ожидать обслуживания в момент освобождения станка, и поставить на обслуживание первую деталь из очереди.

Следующие строки чисел относятся к деталям, которые в текущий момент находятся в процессе обработки; в данном примере таких деталей может быть только три (по числу станков). Как только началась обработка детали, сразу же можно получить время ее окончания и использовать его в качестве момента наступления следующего события. В рассматриваемый момент времени станки заняты обработкой трех деталей, что и представлено в виде трех строк, записанных в том порядке, в каком будет завершена обработка деталей. И наконец, имеется число, представляющее время («счетчик времени», «часы»); вначале оно равно 1000; кроме того, имеется пять счетчиков для обработанных деталей каждого типа. Заметим, что обычно не принято вычислять случайные величины заранее. Вместо этого часто вычисляют каждую величину в нужный момент. Однако в таком случае имитационную программу пришлось бы постоянно переключать с одной подпрограммы на другую — то на подпрограмму проверок и и пересчетов отображения системы, то на подпрограмму вычисления случайных величин.

5. ПРОЦЕСС ИМИТАЦИИ (ИМИТАЦИОННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ)

Рассмотрим более подробно отображение системы на рис. 1. Предположим, что все события, которые могли осуществиться к моменту времени 1000, уже произошли. Пусть данный момент является началом очередного цикла. Прежде всего следует определить время наступления следующего возможного события; найти его можно путем просмотра всех моментов наступления событий. Поскольку список деталей, обрабатываемых в данный момент, упорядочен по времени окончания, то фактически остается только сравнить время в момент прихода очередной заявки с временем, указанным в первой строке массива данных, относящихся к деталям, находящимся в обработке. Следуя данным, приведенным в блоке № 1, определим, что следующим событием является поступление новой детали в момент 1002, поэтому в блоке № 2 счетчик времени устанавливается на 1002.

Если при поступлении детали обнаруживается, что все станки заняты, ее ставят в очередь. При этом соответствующее место в списке данных (первая строка) освобождается, и освободившееся место сразу же заполняется данными о детали, которая поступит в систему в момент времени 1018. Теперь можно начинать следующий цикл. Следующим событием является завершение обработки детали в момент времени 1003. В блоке № 3 на рис. 1 показано состояние системы к моменту окончания этого события. Счет-

чик времени установлен на 1003, а обработанная деталь покидает систему после того, как число в счетчике обработанных деталей, относящееся к деталям данного типа, увеличивается на единицу. Поскольку в очереди были детали, первая из них по списку ставится на обработку. Время ее обработки равно 84; следующее событие, связанное с окончанием обработки данной детали, наступит в момент 1087. В рассматриваемом случае новая деталь, поступившая на обработку, имеет самое большое время окончания обработки, и поэтому она ставится в конец списка деталей, находящихся на обработке. В результате все записи сдвигаются на одну позицию как в списке деталей-очередников, так и в списке деталей, находящихся в обработке. Обработка очередной детали будет закончена в момент 1017, что, как и раньше, приводит к увеличению числа на счетчике готовых деталей на единицу, а на обработку поступает первая деталь из списка очередников. Однако время обработки этой детали оказалось достаточно малым, так что ее обработка будет закончена раньше, чем одной из деталей, уже находящихся в процессе обработки. Поэтому вновь поступившая деталь занимает вторую строку в соответствующем списке. Это и показано на последнем блоке рис. 1.

6. НАКОПЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Целью имитационного эксперимента, без сомнения, является выяснение некоторых свойств и характеристик системы. В только что рассмотренном примере подсчитывалось и запоминалось лишь число обработанных деталей каждого типа. В зависимости от целей имитационного эксперимента могут быть собраны и другие статистические данные. В программы языков имитационного моделирования включены процедуры и подпрограммы для накопления некоторых типичных статистических данных. Среди широко используемых статистик надо отметить следующие:

а) число объектов данного типа или число моментов наступления некоторого события;

б) коэффициент использования прибора, вычисляемый либо как отношение времени занятости прибора к общему времени наблюдения, либо как среднее число случаев использования прибора;

в) распределения случайных величин, таких, как время обработки и время отклика (срабатывания), вместе с их средними значениями и средними квадратическими отклонениями.

7. ОБРАБОТКА СПИСКОВ

При описании модели механического цеха удобно представлять записи в виде трех массивов в зависимости от того, к каким деталям относится соответствующая запись: к поступающим деталям,

деталям, находящимся в очереди, или к деталям в процессе обработки. Имитационный эксперимент был описан с использованием представления о перемещении записей с одного места на другое, возможно, с некоторой пересортировкой соответствующих записей. Машинная программа оказалась бы очень неэффективной, если бы в ней использовался такой подход, поскольку он требует перемещения (перезаписи) большого объема данных. Значительно лучших показателей управляемости и эффективности можно достичь, если воспользоваться *процедурой обработки списков*. Для этой процедуры каждая запись формируется из некоторого числа последовательно расположенных слов (или байтов), часть из которых зарезервирована для формирования списка. В каждой записи в стандартной позиции содержится адрес следующей записи списка. Это так называемый указатель. Указатель первой записи списка содержится в специальном слове, которое хранится в в известной ячейке; такое слово называют либо «верхушкой», либо «заголовком» списка. Последняя запись в списке на месте указателя содержит команду «конец списка». Если список оказывается пустым, то эта команда стоит непосредственно в заголовке списка.

Указатели, начиная с заголовка, размещают записи в специальном порядке, благодаря чему в программе можно отыскать нужные записи, используя последовательность указателей. Такие списки обычно называют цепочками (или последовательными списками). Может существовать другой набор указателей, проходящий через всю цепочку от конца к началу, так что программа будет продвигаться вдоль цепочки в любом направлении. Запись может также входить более чем в одну цепочку; в таком случае необходимо зарезервировать место для указателей каждой возможной цепочки.

Теперь операции удаления и добавления записи или изменения порядка в цепочке сводятся к процедуре обработки указателей. Например, для того чтобы удалить запись C из цепочки A, B, C, D . . ., достаточно указатель в записи B «переориентировать» на D. Если некоторая запись стирается, то ее место в памяти ЭВМ можно использовать под запись из другой цепочки, но соответствующие переобозначения (перекодировку) можно произвести позже. Например, для того чтобы поместить запись Z между B и C, указатель записи B направляют к Z, а в указатель записи Z помещают адрес записи C. Таким образом, процесс изменения цепочки состоит из серии перемещений и вставок.

Легко видеть, что при обработке списков не требуется «физически» перемещать записи. Таким образом, с помощью данной процедуры можно эффективно изменять категорию записи путем перенесения ее из одной цепочки в другую, и, кроме того, данная процедура позволяет легко управлять списками, которые непре-

рывно меняют свои размеры. Именно это крайне необходимо при создании имитационных программ. Поэтому обработка списков является неотъемлемой частью основных языков для дискретного имитационного моделирования систем, включая имитационные программы на языках GPSS и SIMSCRIPT, которые будут описаны ниже.

8. ЯЗЫКИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Поскольку имитационные модели не укладываются в единую формальную структуру, то не удивительно, что существует много различных подходов к созданию языков имитационного моделирования (здесь, видимо, нецелесообразно рассматривать их в деталях). Подробные списки литературы можно найти в работах [24, 26, 30, 36, 37]. Несмотря на указанное разнообразие языков, при их создании использовались два общих метода. В качестве примера использования этих методов следует указать систему GPSS (систему имитационного моделирования общего назначения [9—13, 15, 17, 19, 35]) и SIMSCRIPT [8, 22, 24, 29].

Указанные языки являются наиболее широко используемыми языками имитационного моделирования. Оба представляют собой языки общего назначения в том смысле, что их можно применять в самых разных задачах. В следующих разделах описаны принципы функционирования этих систем программирования, а способ их использования будет продемонстрирован опять на примере работы механического цеха.

9. АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ИМИТАЦИОННЫМИ МОДЕЛЯМИ

Помимо языковых различий, существуют и различия в методах, используемых для управления последовательностью событий. Основные различия связаны с обработкой и управлением условными событиями. Например, в модели механического цеха окончание обработки детали представляет собой изолированное событие, если нет очереди на обслуживание, но при наличии очереди сразу же на обработку поступает первая деталь из очереди. Все эти изменения в системе происходят в один и тот же момент времени. Такие взаимосвязанные изменения можно по-разному интерпретировать: либо как одно сложное событие, либо как набор элементарных одновременно наступающих событий. Последний подход используется в языке GPSS. В частности, указанный пример с деталями в цехе следовало бы рассматривать в GPSS как три отдельных события. Однако соответствующие изменения в системе производятся одновременно и не затрагивают события, происходящие в других объектах, хотя они могут происходить в тот же момент времени.

О таком типе управления говорят как о процессе взаимодействия [24]. Процесс рассматривается как набор упорядоченных по времени событий, через которые должен пройти объект. Метод управления процессом взаимодействия будет «вести» каждый объект через столько событий (состояний), сколько их может быть в текущий момент времени. Чтобы метод был эффективным, должен определяться момент, когда объект, оказавшийся заблокированным, можно снова перемещать, и именно тогда объект вновь начинают «вести» по процессу. Метод управления процессом взаимодействия используется в таких языках, как SIMPL/1 [14], SIMULA [6] и SOL [27].

В языке SIMSCRIPT используется другой метод управления, который обычно называют методом расписания событий. При использовании этого метода управления весь процесс обработки деталей следует рассматривать как одно событие, а все изменения, которые могут произойти в результате наступления данного события, осуществляются с помощью одной подпрограммы. Указанная подпрограмма должна «решить», является ли событие простым событием завершения обработки или сложным событием, при котором требуется, чтобы из очереди была взята другая деталь и поставлена на обработку. Метод расписания событий используется также в языке GASP II [33].

Так называемый метод просмотра действий является третьим, достаточно общим методом организации управления имитационным экспериментом. При использовании этого метода в программу вводятся отдельные «часы» для каждого объекта системы, которые регистрируют и показывают те моменты времени, когда данный объект будет причиной наступления следующего события. Описание действий включает условия, при которых эти действия осуществляются. Когда все события рассмотрены, просматривают все действия, чтобы выяснить, должны они осуществиться или нет. Таким образом составлены язык CSL [1] и его расширенные варианты [3, 4].

10. СПОСОБ ОРГАНИЗАЦИИ ЯЗЫКА GPSS

В основе языка GPSS лежит структурно-блочный принцип, т. е. используется набор блоков различного типа, каждый из которых, по существу, представляет собой макроинструкцию, описывающую некоторое действие системы. Записи о событиях, проходящие через блочную схему, используются для описания и анализа временных объектов, а отдельное событие соответствует записи внутри некоторого блока. В записях содержатся параметры, необходимые для того, чтобы регистрировать признаки временных объектов. Постоянные объекты описываются с помощью таких элементов программы, как хранилища и очереди

с соответствующими признаками, например степенью использования запасов или длиной очереди.

Вернемся к рассмотренному примеру. Записи, которые являются записями о событиях в языке GPSS, логично разделить на три категории: поступление, ожидание и обработка детали. При обработке списков можно было бы реализовать эти записи при помощи трех списков, но очевидно, что такой способ составления программы зависит от того, какая конкретная модель используется. Более рационально можно организовать программу, если все записи о событиях разделить на записи, относящиеся к будущим событиям и записи о событиях, которые уже произошли, но в текущий момент заблокированы. Позиция в структурной схеме переносится затем в запись о событии. В языке GPSS используются эти две основные цепочки, которые называются соответственно цепочкой будущих событий и цепочкой текущих событий. Существуют также и другие цепочки, но о них будет рассказано в дальнейшем.

В модели механического цеха записи о событиях для деталей, находящихся в обработке, и о появлении следующей детали следует поместить в цепочку будущих событий, составленную в хронологическом порядке. Записи о событиях для деталей, ожидающих обслуживания, следует поместить в цепочку текущих событий, составленную в порядке поступления деталей. В тех случаях, когда назначаются приоритеты, записи о событиях будут организованы в цепочки текущих событий в порядке установленных приоритетов и прихода деталей в пределах приоритетного класса (т. е. детали с одинаковым приоритетом образуют очередь), тогда как записи о будущих одновременных событиях будут организованы в приоритетном порядке. Каждое текущее событие зависит от некоторого другого события, изменяющего состояние системы. Это может быть будущее событие, такое, как завершение обработки детали, но в общем случае им может оказаться некоторое другое «запаздывающее» событие. Как только некоторое событие наступило, может быть разблокирована целая серия текущих событий, которые должны произойти одновременно. В частности, один объект может участвовать в серии событий в одно и то же время. В системе GPSS это соответствовало бы группе последовательных блоков, ни в один из которых время не входит. Используемый в GPSS метод управления («процесс взаимодействия») приводит к тому, что очередная запись о событии проходит через все допустимые для нее блоки, и только после этого начинается обработка следующей записи.

События, которые происходят одновременно в изучаемой схеме, в имитационном эксперименте обрабатываются последовательно. Определенную трудность представляет установление логической последовательности действий, особенно при наличии приоритетов. Очевидно, что цепочку текущих событий следует периоди-

чески просматривать для отыскания записей, которые уже можно перемещать. Такой просмотр, естественно, производится в порядке установленных приоритетов. На некотором этапе просмотра одна из записей будет передвинута, что приведет к изменению, которое может разблокировать запись с более высоким приоритетом. Поскольку разблокированная запись была просмотрена ранее, то она оказывается пропущенной. Если просмотр будет продолжаться дальше по цепочке, то некоторая запись с более низким приоритетом получит преимущество либо непосредственно, либо косвенно через промежуточные события. Даже если этого не произойдет, влияние данного изменения на запись с более высоким приоритетом будет обнаружено только при следующем просмотре, когда «часы» уже будут переставлены вперед. Указанная трудность усугубляется появлением новых записей о событиях, которые становятся текущими, когда «часы» начинают показывать следующий момент времени. Приоритеты этих записей необходимо сравнить с приоритетами заблокированных записей.

Для того чтобы устранить противоречия в правилах приоритетов, используют следующие два приема. Во-первых, все новые записи, которые поступают из цепочки будущих событий, объединяют (с учетом приоритетов) с записями в цепочке текущих событий, причем это осуществляют до того, как предпринимаются попытки передвинуть соответствующие записи. Во-вторых, просмотр начинают сначала всякий раз, когда происходит такое изменение состояния, в результате которого может разблокироваться запись с более высоким приоритетом. Если просмотр начинается сначала при любом изменении состояния, то такая процедура может потребовать больших затрат машинного времени. В системе GPSS можно определить и указать почти все состояния, которые разблокируют или сделают запись важной для текущего момента. Но именно такие изменения приводят к необходимости нового просмотра. Эффективность программы значительно возрастает благодаря тому, что повторные просмотры проводятся только тогда, когда данные изменения наступают. Это достигается двумя способами. Во-первых, из цепочки текущих событий удаляются записи, которые ожидают некоторого конкретного события, представленного записью, входящей в конкретный блок, а возвращаются такие записи, которые ожидают, когда постоянный объект окажется в некотором заданном состоянии, но такие записи временно блокируют. Их помещают во вспомогательную цепочку, которая используется для того, чтобы хранить и разблокировать эти записи, когда наступит нужное событие. Если изменение относится к любому из указанных типов, то оно приводит к тому, что просмотр начинается с самого начала.

11. МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОГО ЦЕХА НА ЯЗЫКЕ GPSS

На рис. 2 изображена структурная схема модели механического цеха, которая формализована в системе GPSS. В начале стоит блок GENERATE, в котором формируются записи событий; каждая запись описывает одну деталь, подлежащую обработке. Функция *F N* 1 управляет распределением времени поступления деталей в цех. В записях могут содержаться параметры, относящиеся к признакам объектов, которые представлены с помощью этих записей. В блоке ASSIGN каждой детали присваивается номер типа как один из ее параметров; конкретное значение параметра получается из распределения, задаваемого с помощью функции *F N* 2. Запись поступает в блок QUEUE, где помещается в очередь, в которой находится до тех пор, пока не появится свободное место в постоянном объекте (так называемом хранилище), которому присвоена метка MACH, а емкость принята равной трем. Как только появляется свободное место, запись занимает его, поступая в блок ENTER. Затем запись немедленно переходит в блок DEPART и исключается из очереди, а затем поступает в блок ADVANCE на время обработки соответствующей детали. Процесс взаимодействия в системе GPSS организован таким образом, что если станок свободен в момент поступления детали, то запись пройдет через все блоки: от блока GENERATE до блока ADVANCE.

После того как обработка закончена, запись переходит в блок LEAVE и освобождает станок, поступает в блок TABULATE, где

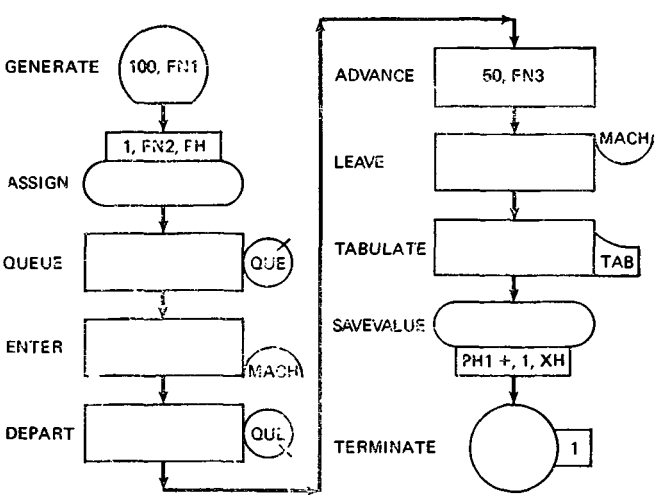


Рис. 2. Модель механического цеха на языке GPSS.

регистрируется время пребывания в системе, а затем переходит в блок SAVEVALUE, где происходит увеличение на единицу показания счетчика числа деталей соответствующего типа, и наконец запись поступает в блок TERMINATE, где она стирается.

Для каждого блока создан собственный оператор ввода. Вместе с оператором управления (которых около восьми) эти операторы составляют программу ввода. По окончании имитационного эксперимента программа автоматически распечатает результирующее сообщение. В данном случае в нем будут приведены значения статистических данных об очереди и распределении времени обработки вместе со статистическими данными о занятости станков. Хотя в системе автоматически накапливаются все данные, их можно редактировать, выделяя только ту информацию, которая представляет интерес. По желанию можно получать результаты в графическом виде.

12. СТРУКТУРА СИСТЕМЫ SIMSCRIPT

В противоположность системе GPSS программа на языке SIMSCRIPT слабо структуризована. Действия представляются с помощью программ обработки событий, а сами программы составляются из подпрограмм, описывающих события, которые наступают или могут наступить в результате данного действия. Структура данных для представления объектов системы приводится во вводной части программы. Постоянные объекты описываются с помощью самостоятельных слов, массивов или многоиндексных таблиц для записи признаков или сбора статистической информации. Вре́менные объекты представляют с помощью записей, которые можно объединять в списки (или другие наборы). Специальные инструкции создают и стирают вре́менные объекты в различных местах модели. Другие инструкции предназначены для составления файлов, записи и извлечения вре́менных объектов из списков в соответствии с некоторыми логическими условиями или при изменении очереди.

Специальный вид вре́менного объекта имеет название «сообщение о событии». Его цель — управлять ходом имитационного эксперимента. Указанный объект выполняет те же функции, что и запись о событии в системе GPSS. Однако в отличие от записи в GPSS в системе SIMSCRIPT «сообщение о событии» может и не пройти через весь процесс. Сообщение о событии обычно стирается после выполнения события, а для следующего события формируется новое сообщение. В каждом сообщении о событии содержится имя того события, которое следует включить в общий список событий. После того как сообщение о событии сформировано, специальная инструкция фиксирует его, в результате чего либо в текущий момент времени, либо с некоторой задержкой будет

выполнена программа обработки события. Алгоритм управления имитационным экспериментом хранит сообщение о событиях в хронологическом порядке и устанавливает «стрелки на часах» так, что они показывают момент наступления следующего события.

Программы обработки событий осуществляют все изменения в состоянии, которые вызваны соответствующим событием. Как уже отмечалось в разд. 9, в программы могут быть включены тесты, позволяющие выяснить, какие условия преобладают, и принять решение о том, какие изменения следует произвести. Программы обработки событий должны включать также процедуру, необходимую для сбора статистических данных, которая, например, переключает счетчики или запоминает моменты времени, откуда отсчитываются времена переходов. Сообщение о событии, вызвавшее запуск программы обработки событий, обычно стирается. Однако его можно еще раз включить в график событий, что, например, может быть сделано для генерации потока поступающих объектов на основе статистики об интервалах времени между заявками. Если выполнение события влечет за собой наступление некоторого другого события, то программа должна сформировать соответствующие сообщения о событии и составить график их выполнения либо в текущий момент времени, либо в будущем.

Программа на языке SIMSCRIPT включает генератор печати результатов, с помощью которого исследователь описывает форму отчетности, перечисляя данные, которые необходимо вывести на печать, и задавая форматы печати этой информации.

13. МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОГО ЦЕХА НА ЯЗЫКЕ SIMSCRIPT

При записи модели механического цеха на языке SIMSCRIPT двумя главными действиями являются прибытие деталей и их уход из цеха. На рис. 3 показаны программы обработки событий для управления прибытием и уходом деталей. Приведенная схема является слегка модифицированным вариантом примера из книги [5], где читатель может найти более подробное описание. Используется второй вариант языка SIMSCRIPT II [25]. Рассмотрена система с одним обслуживающим прибором, однако все построения легко обобщить на случай нескольких обслуживающих приборов. Кроме того, считается, что детали различного типа неразличимы. Модель пригодна для получения периодической информации о длине очереди и для хранения данных для анализа результатов имитационного эксперимента с помощью отдельной программы на языке ФОРТРАН, которая вызывается имитационной программой.

В подготовительной части (не показанной на рис. 3) определяются все элементы системы, а в части MAIN (также не показанной на рис. 3) программа приводится в исходную позицию, осу-

Подпрограмма события „прибытие детали"

```
 1 EVENT ARRIVAL SAVING THE EVENT NOTICE
 2 RESCHEDULE THIS ARRIVAL IN
   EXPONENTIAL.F(MEAN.INTERARRIVAL, 1) MINUTES
 3    LET T = TIME.V*1440
 4    ADD T-T.1 TO S(N.QUEUE+SERVER+1)
 5    LET T.1 = T
 6    LET MAX.Q = MAX.F(MAX.Q,N.QUEUE+SERVER+1)
 7 IF SERVER = BUSY,
 8    CREATE A TASK
 9    FILE THIS TASK IN QUEUE
10    RETURN
11 ELSE
12 LET SERVER = BUSY
13 SCHEDULE A DEPARTURE IN
   EXPONENTIAL.F(MEAN.SERVICE, 2) MINUTES
14 RETURN
15 END
```

Подпрограмма события „уход детали из системы"

```
 1 EVENT DEPARTURE
 2 LET T = TIME.V*1440
 3 ADD T-T.1 TO S(N.QUEUE+SERVER+1)
 4 LET T.1 = T
 5 IF QUEUE IS EMPTY,
 6    LET SERVER = IDLE
 7    RETURN
 8 ELSE
 9 REMOVE THE FIRST TASK FROM THE QUEUE
10 DESTROY THIS TASK
11 SCHEDULE A DEPARTURE IN
   EXPONENTIAL.F(MEAN.SERVICE, 2) MINUTES
12 RETURN
13 END
```

Рис. 3. Модель механического цеха на языке SIMSCRIPT [5].

ществляется запуск и останов имитационной модели. На рис. 3 изображены две основные программы обработки событий. В первой, называемой ARRIVAL, используется сообщение о событии, которое не уничтожается, а постоянно перестраивается для описания прибывающих деталей. (В программе MAIN формируется запись для первого события ARRIVAL.) Оператор 2 предназначен для перестройки сообщений о событии. В нем используется экспоненциальная функция для генерации случайных моментов поступления деталей. Оператор 3 и аналогичный оператор в подпрограмме DEPARTURE используется для того, чтобы переводить в мину-

ты время, которое первоначально может быть задано в единицах дней. Операторы 4—6 предназначены для статистической обработки данных. Обозначение S (N. QUEUE + SERVER + 1) используется для нахождения элемента массива S, который определен в подготовительной части программы. Переменная N. QUEUE является числом заявок, ожидающих обслуживания в массиве QUEUE. Оператор 7 служит для проверки занятости обслуживающего прибора. Программа продолжает работу в зависимости от значения этого оператора. Если прибор занят, то формируется временный объект с меткой TASK, который помещается в массив QUEUE. Если же прибор свободен, то запись события с меткой DEPARTURE формируется и вводится в график программы. Оператор RETURN передает управление имитационному алгоритму для отыскания следующего события.

Когда заявка должна покинуть прибор, включается программа второго события, которая называется DEPARTURE. В этом случае запись события автоматически стирается. После того как накоплен статистический материал для гистограммы длины очереди, работа программы зависит от того, имеются или нет ожидающие заявки. Если их нет, то обслуживающий прибор становится свободным, а если же заявки есть, то первая запись удаляется из массива QUEUE и стирается. Затем формируется новая запись события DEPARTURE и составляется соответствующий график. Последняя часть программы осуществляет вывод результатов на печать.

Для событий, которые наступают одновременно, в подготовительной части программы вводится оператор, устанавливающий порядок выполнения этих событий: PRIORITY ORDER IS ARRIVAL, DEPARTURE, COLLECTION AND END. OF. SIMULATION.

14. СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЯЗЫКОВ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Выше уже было отмечено, что языки GPSS и SIMSCRIPT являются представителями современных языков имитационного моделирования различного типа. Их сравнение позволяет сопоставить два различных подхода к управлению имитационным экспериментом, а именно процесс взаимодействия и метод расписания событий. На примере этих двух языков хорошо видны возможные пути построения имитационных программ.

Сильнее всего заметен контраст между жестко структуризованным форматом GPSS и чрезвычайной гибкостью SIMSCRIPT'а. Относительная негибкость языка GPSS часто приводит к тому, что соответствующие модели требуют большего объема памяти по сравнению с моделями, написанными на языке SIMSCRIPT.

Особенно это заметно для больших моделей. С другой стороны, при использовании языка GPSS упрощается процесс программирования, так как не надо оговаривать структуру отображения системы, а накопление статистических данных и распечатка результатов автоматизированы.

Благодаря жесткой структуре GPSS можно легко научиться составлять программы на этом языке, поэтому специалист по системному анализу может обычно сам составить программу для модели системы, которую он изучил, и при этом ему не обязательно хорошо разбираться в программировании. Как и следовало ожидать, такая особенность языка GPSS используется при создании имитационных программ специального назначения, для которых разрабатываются языки программирования, наиболее полно соответствующие типу исследуемой системы.

Язык GPSS в основном состоит из набора макрокоманд, которые выполняются в режиме интерпретации, тогда как операторы SIMSCRIPT'а транслируются в эффективные машинные коды. В результате программы на языке GPSS работают медленнее, чем на языке SIMSCRIPT. Однако большое время работы программы не всегда является определяющим фактором, так как при подготовке и проведении имитационного эксперимента затраты на формирование и проверку модели обычно значительно превышают затраты на моделирование.

Метод управления процессом взаимодействия, по крайней мере его реализация в GPSS, имеет преимущество в том, что содержит набор правил, по которым осуществляется обработка событий. Однако, как уже отмечалось в разд. 10, последнее может привести к очень большим затратам времени из-за повторных просмотров соответствующих массивов. То, что весь процесс функционирования моделируемой системы необходимо разбивать на элементарные события, также приводит к увеличению временных затрат на программирование и расчет модели на ЭВМ. Используемый в SIMSCRIPT'е метод управления, при котором составляется расписание наступления событий, повышает эффективность процесса программирования, однако при этом на пользователя возлагается очень большая ответственность, поскольку он должен учесть все возможные взаимодействия, возникающие при обработке события.

ЛИТЕРАТУРА

Основные работы:

1. IBM Corp., Bibliography on Simulation, Form No. 320—0924, 112 East Post Road, White Plains, New York, 1966.
2. Malcolm D. G., Bibliography on the Use of Simulation in Management Analysis, *Operations Res.*, 8, 169—177 (1960).

3. Naylor T. H., Simulation and Gaming: Bibliography, *Computing Rev.*, **10**, 1, 61—69 (January 1969)
4. Shubik M., Bibliography on Simulation, Gaming, Artificial Intelligence and Allied Topics, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 55, 736—751 (1960).

Общие вопросы:

1. Beekman M., Kunzi H. P., Eds., Digital Simulation, Springer-Verlag, New York, 1971.
2. Chorafas D. N., Systems and Simulation, Academic Press, New York, 1965.
3. Emshoff J. R., Sisson R. L., Design and Use of Computer Simulation Models, Macmillan, New York, 1970.
4. Evans G. W., Wallace G. F., Sutherland G. L., Simulation Using Digital Computers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
5. Fishman G. S., Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation, Wiley, New York, 1973.
6. Gordon G., System Simulation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
7. Hollingdale S. H., Ed., Digital Simulation in Operations Research, American Elsevier, New York, 1967.
8. Maisel H., Gnugnoli G., Simulation of Discrete Stochastic Systems, Science Research Associates, Palo Alto, California, 1972.
9. Martin F. F., Computer Modeling and Simulation, Wiley, New York, 1968.
10. McLeod J., Ed., Simulation, McGraw-Hill, New York, 1968.
11. McMillan Jr., Claude and Richard Gonzales, Systems Analysis: A Computer Approach to Decision Models, Revised Ed., R. D. Irwin, Homewood, Illinois, 1965.
12. Mize J. H., Cox J. G., Essentials of Simulation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.
13. Naylor T. J., Balintfy J. L., Burdick D. S., Chu Kong, Computer Simulation Techniques, Wiley, New York, 1966.
14. Reitman J., Computer Simulation Applications: Discrete-Event Simulation for the Synthesis and Analysis of Complex Systems, Wiley, New York, 1971.
15. Smith J., Computer Simulation Models, Hafner, New York, 1968.
16. Stephenson R. E., Computer Simulation for Engineers, Harcourt Brace Johanovitch, New York, 1971.
17. Tocher K. D., The Art of Simulation, D. Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey, 1963.

Языки имитационного моделирования:

1. Buxton J. N., Laski J. G., Control and Simulation Language, *Computer J.*, 5, 3, 194—199 (1962).
2. Buxton J. N., Ed., Simulation Programming Languages, Proc. IFIPS Working Conf., Oslo, 1967, North-Holland, Amsterdam, 1968.
3. Clementson A. T., Extended Control and Simulation Language, *Computer J.*, 9, 3, 215—220 (1966).
4. Clementson A. T., Extended Control and Simulation Language II, User's Manual, Unieversity of Birmingham, England, 1972.
5. Connors M. M., Claude Coray, Cuccaro C. J., Green W. K., Low D. W., Markowitz H. M., The Distribution System Simulator, *Management Sci.*, 18, 8, 425—453 (1972).
6. Dahl O. J., Nygaard K., SIMULA — An ALGOL-Based Simulation Language, Communications ACM, 9, 9, 671—678 (1966).
7. Deman Prem Bhushan, Donaghey C. E., Wyatt J. B., OSSL — A Specialized Language for Simulating Computer Systems, Proc. AFIPS 1972 Spring Joint Computer Conf., AFIPS Press, Montvale, New Jersey, 1972, pp. 799—814.

8. Dimsdale B., Markowitz H. M., A Description of the SIMSCRIPT Language, *IBM Systems J.*, 3, 1, 57—67 (1964).
9. Efron R., Gordon G., A General Purpose Digital Simulator and Examples of its Application, Prt 1 — Description of the Simulator, *IBM Systems J.*, 3, 1, 21—34 (1964).
10. Gordon G., A General Purpose Systems Simulation Program, Proc. of EJCC, Washington D. C., Macmillan, 1961, pp. 87—104.
11. Gordon G., A General Purpose Systems Simulator, *IBM Systems J.*, 1, 1, 18—32 (1962).
12. Gordon G., The Application of GPSS V to Discrete System Simulation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
13. IBM Corp., GPSS V User's Manual, Form No. SH20—0851, 112 E. Post Road, White Plains, New York, 1970.
14. IBM Corp., SIMPL/1 User's Manual, 112 E. Post Road, White Plains, New York, 1972.
15. Gould R. L., GPSS/360 — An Improved General Purpose Simulator, *IBM Systems J.*, 8, 1, 16—27 (1969).
16. Granger R. L., Robinson G. S., COMSL — A Communication System Simulation Language, Proc. AFIPS 1970 Fall Joint Computer Conf., 1970, pp. 407—414.
17. Greenberg S., GPSS Primer, Wiley, New York, 1972.
18. Greenlaw P. S., Hottenstein M. P., PROSIM: A Production Management Simulation, International Textbook, Scranton, Pennsylvania, 1969.
19. Herscovitch H., Schneider T., GPSS III — An Expanded General Purpose Simulator, *IBM Systems J.*, 4, 3, 174—183 (1965).
20. Hills P. R., SIMON — A Computer Simulation Language in ALGOL, Digital Simulation in Operations Research, American Elsevier, New York, 1967, pp. 105—115.
21. Jacoby K., Fachenthal D., Cassel A., SMPS — A Toolbox for Military Communications Staffs, AFIPS 1966 Spring Joint Computer Conf., Spartan Books, Washington, D. C., 1966, pp. 149—157.
22. Karr H. W., Kleine H., Markowitz H. M., SIMSCRIPT 1.5, California Analysis Center, Santa Monica, California, 1966.
23. Kelley D. H., Buxton J. N., Montecode — An Interpretive Program for Monte-Carlo Simulations, *Computer J.*, 5, 88—93 (1962).
24. Kiviat P. J., Digital Computer Simulation: Computer Programming Languages, The Rand Corp., RM-5883-PR, Santa Monica, California. 1969.
25. Kiviat P. J., Villanueva R., Markowitz H. M., The SIMSCRIPT II Programming Language, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
26. Kleine H., A Survey of Users' Views of Discrete Simulation Languages, *Simulation*, 14, 5, 225—229 (1970).
27. Knuth D. E., McNeley J. L., SOL: A Symbolic Language for General Purpose System Simulation, *IEEE on Electronic Computers*, EC-13, 4, 401—414 (1963).
28. Levin H., Introduction to Computer Analysis, ECAP for Electronics Technicians and Engineers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
29. Markowitz H. M., Hausner B., Karr H. W., SIMSCRIPT — A Simulation Language, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
30. Palme J., A Comparison Between SIMULA and FORTRAN, BIT, 8, 3, 203—209 (1968).
31. Parslow R. D., AS, An ALGOL Simulation Language, in Simulation Programming Languages, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 86—100.
32. Petrone L., On a Simulation Language Completely Defined on to the Programming Language PL/1, in Simulation Programming Languages, North-Holland Amsterdam, 1968, pp. 61—85.
33. Pritsker A. B., Kiviat P. J., Simulation with GASP II. A FORTRAN Based Simulation Language, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

34. Pugh III, A., DYNAMO II User's Manual. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1973.
35. Schriber T. J., Simulation Using GPSS, Wiley, New York, 1974.
36. Teichroew D., Lubin J. F., Computer Simulation — Discussion of the Technique and Comparison of Languages, *Communications ACM*, 9, 10, 723—741 (1966).
37. Teichroew D., Truitt T. D., Discussion of Computer Simulation Techniques and Comparison of Languages. *Simulation*, 9, 181—190 (1967).

Прикладные вопросы:

1. Amstutz A. E., Computer Simulation of Competitive Market Response MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.
2. Apter M. J., The Computer Simulation of Behaviour, Hutchinson and Co., London, 1970.
3. Borko H., Ed., Computer Applications in the Behavioral Sciences, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
4. Boulden J. B., Buffa E. S., Corporate Models, On-Line Real-Time Systems, *Harvard Bus. Rev.*, 48, 4, 65—83 (1970).
5. Conway R. W., Maxwell W. L., Miller L. W., Theory of Scheduling, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
6. Coplin W. D., Simulation in the Study of Politics, Markham, Chicago, Illinois, 1968.
7. Crecine J. P., A Computer Simulation Model of Municipal Budgeting, *Management Sci.*, 13, 786—815 (1967).
8. Forrester J. W., Industrial Dynamics, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1961. [Имеется перевод: Форрестер Д. Основы кибернетики предприятия (Индустриальная динамика).— М.: Прогресс, 1971.]
9. Forrester J. W., Urban Dynamics, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1969. [Имеется перевод: Форрестер Д. Динамика развития города.— М.: Прогресс, 1974.]
10. Fraser A., Burnell D., Computer Models in Genetics, McGraw-Hill, New York, 1970.
11. Fromm G., Klein L. R., The Brookings-SSRC Quarterly Econometric Model of the United States, Model Properties, *Am. Econ. Rev.*, 55, 348—361 (1965).
12. Guetzkow H., Ed., Simulation in the Social Sciences, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
13. Guetzkow H., Chadwick A. F., Brody R. A., Noel R. C., Snyder R. C., Simulation in International Relations: Developments for Research and Teaching, Prentice-Hall, New York, 1963.
14. Hamilton H. R., Goldstone S. E., Milliman J. W., Pugh III A. L., Roberts E. R., Zellner A., Systems Simulation for Regional Analysis, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.
15. Harbaugh J. W., Bonham-Carter G., Computer Simulation in Geology, Wiley, New York, 1970.
16. Knight D. E., Curtis H. W., Fogel L. J., Eds., Cybernetics, Simulation, and Conflict Resolution, Third Annual Symposium of the American Society for Cybernetics, Spartan Books, New York, 1971.
17. Lowry I. S., Seven Models of Urban Development, A Structural Comparison, *J. Amer. Inst. Planners*, 31, 2 (1965).
18. MacDougall M. H., Computer System Simulation: An Introduction, *Computing Surveys*, 2, 3, 191—209 (1970).
19. Naylor T. H., Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems. Wiley, New York, 1971. [Имеется перевод: Нейлор Т. Х. Имитационные эксперименты с моделями экономических систем.— М.: Мир, 1975.]
20. Orcutt G. H., Greenberger M., Korbel J., Rivlin A. M., Microanalysis of

Socioeconomic Systems—A Simulation Study, Harper and Row, New York, 1961.
21. Patten B. C., Ed., Systems Analysis and Simulation in Ecology, Academic Press, New York, 1971.
22. Pool I. S., Abelson R., Popkin S., Candidates, Issues, and Strategies, A Computer Simulation of the 1960 Presidential Campaign, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1965.
23. Schmidt J. W., Taylor R. E., Simulation and Analysis of Industrial Systems, Richard D. Irwin, Homewood, Illinois, 1970.
24. Seaman P. H., Soucy R. C., Simulating Operating Systems, *IBM Systems J.*, 8, 4, 264—279 (1969).
25. Taylor J. G., Navarro J. A., Simulation of a Court System for the Processing of Criminal Cases, *Simulation*, **10**, 5, 235—240 (1968).
26. Tomkins S. S., Ed., Computer Simulation of Personality, Wiley, New York, 1963.
27. Weber J. H., A Simulation Study of Routing and Control in Communication Networks, *Bell System Tech. J.*, 43, 6, 2639—2676 (1964).

III-9. Динамическое программирование

Э. Денардо[1)]

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамическое программирование (ДП) связано с многошаговыми процессами принятия решений. Не очень точно *многошаговый процесс принятия решений* можно определить как деятельность, при которой принимаются последовательные решения, направленные на достижение единой цели. Многошаговые процессы принятия решений встречаются в самых различных ситуациях, как, например, в задачах управления запасами, при приготовлении обеда или управлении космическим кораблем. *Динамическое программирование* можно весьма грубо определить как набор математических процедур, используемых при анализе многошаговых процессов принятия решений. Таким образом, динамическое программирование представляет собой скорее раздел прикладной математики, чем нечто более специальное.

Динамическое программирование можно рассматривать как единую теорию благодаря ряду идей и приемов, которые с удивительным постоянством используются при математическом анализе таких весьма различных задач, как упоминавшиеся выше. Эти идеи и приемы и составляют сущность динамического программирования; в данной главе сделана попытка раскрыть их содержание.

Истоки динамического программирования скрыты в тумане, хорошие идеи имеют глубокие корни. Укажем только шесть ранних работ: изучение водных ресурсов Массе [18]; исследования Вальда [22] и Арроу, Блекуэлла, Гиршика [1] процессов последовательного принятия решений в статистике; статьи [2, 14], в которых рассматриваются задачи управления запасами, и, наконец, книга Беллмана [3], посвященная рассмотрению функциональных уравнений. Безусловно, Беллман один из первых понял суть принципа оптимальности и с удивительной изобретательностью стал применять его буквально к сотням оптимизационных задач, возникающих в математике, технике, экономике, исследовании операций и других областях знаний. Многие его результаты собраны в книгах [4, 5]. Искаас в работе [16] ввел *принцип перехода*, который представляет собой вариант принципа оптимальности.

Система ссылок в настоящей главе построена не совсем обычно. За исключением предыдущего краткого обзора истории вопроса,

---

[1)] Eric V. Denardo, Yale University.

далее нет никаких указаний на то, где и кем были получены соответствующие результаты. Вместо этого даются ссылки на наиболее доступные источники приведенных теоретических сведений. Одним из таких источников служит книга [11].

2. ПРОТОТИП МНОГОШАГОВОГО ПРОЦЕССА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Каждый многошаговый процесс принятия решений представляет собой развитие следующей задачи: найти кратчайший путь в направленной, ациклической сети. Наша основная цель состоит в том, чтобы раскрыть содержание тех идей и приемов, которые превращают динамическое программирование в единую теорию. Именно под таким углом зрения и будем рассматривать задачу о кратчайшем пути.

Предварительно кратко опишем направленную сеть. *Направленная сеть* состоит из непустого конечного множества узлов S и подмножества T множества $S \times S$. Элементы подмножества T будем называть *дугами* (или ребрами) сети. Наличие дуги (i, j) указывает на возможность движения от узла i к узлу j. *Путем* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ называется *конечная последовательность узлов*, таких, что (i_k, i_{k+1}) является направленной дугой для $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Путь, у которого $i_1 = i_n$, $n \geqslant 2$, называется *циклом*. Сеть называется *циклической*, если она содержит один или более циклов. В противном случае говорят, что сеть *ациклическая*.

В направленной ациклической сети всегда можно пометить узлы целыми числами от 1 до N таким образом, что для каждой дуги (i, j) справедливо неравенство $i < j$. Предположим, что такая нумерация произведена. Рассмотрим рис. 1, на котором изображена ациклическая сеть с девятью узлами. У каждой дуги (i, j) указана ее длина t_{ij}, например $t_{47} = 15$. В качестве *длины пути* возьмем сумму длин входящих в него дуг.

Предположим, что необходимо найти кратчайший путь от узла *1* до узла *9*. Кратчайшим путем от узла *1* до узла *9* является путь через узлы (*1*, *3*, *4*, *5*, *7*, *9*), и его длина составляет 19 единиц. Итак, мы довольно легко путем простого просмотра получили решение, но теперь будем решать эту задачу с помощью динамического программирования, чтобы понять сущность его методов. Пусть f_i — длина кратчайшего пути от узла *1* до узла i. По определению, $f_1 = 0$. Мы также знаем, что $f_9 = 19$. Из определения f_i следует, что $f_i + t_{ij}$ равняется длине кратчайшего пути от узла *1* до узла j, при условии что последней дугой пути является дуга (i, j). Кратчайший путь от узла *1* до узла j должен содержать некоторую дугу в качестве конечной, и поэтому

$$f_j = \min_{i \mid (i, j)} \{f_i + t_{ij}\}. \tag{1}$$

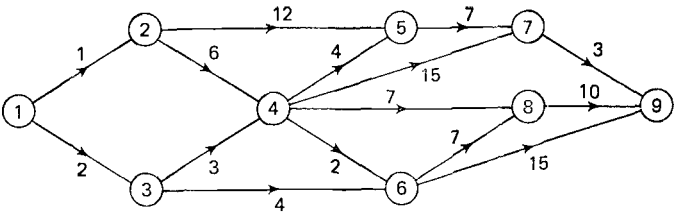


Рис. 1. Задача о кратчайшем пути.

Говорят, что дуга (i, j) *выходит* из узла i и *входит* в узел j. Отметим, что для всех дуг (i, j), входящих в узел j, имеет место неравенство $i < j$. Последнее означает, что выражение (1) можно использовать для последовательного вычисления f_j при $j = 2, 3, 4, \ldots, 9$. Например, дуги $(4, 7)$ и $(5, 7)$ входят в узел 7 и f_7 можно вычислить по формуле (1), как только станут известны f_4 и f_5. Теперь суммируем вышеизложенные рассуждения.

Алгоритм обратной прогонки [1])

Шаг 1. Положить $v_1 = 0$ и $v_k = \infty$ для $k = 2, 3, \ldots 9$. Положить $j = 2$.

Шаг 2. Для каждой дуги (i, j), входящей в узел j, положить

$$v_j \leftarrow \min \{v_j, v_i + t_{ij}\}. \tag{2}$$

Шаг 3. Остановиться, если $j = 9$. В противном случае $j \leftarrow (j + 1)$ и вернуться к шагу 2.

В вышеизложенном алгоритме шаг 2 состоит в замене v_j на $v_i + t_{ij}$ всякий раз, когда последняя величина меньше v_j. Шаг 2 выполняется для каждой дуги, входящей в узел j, причем сравнение проводится по возрастанию номеров j. Шаг 2 оканчивается при $v_j = f_j$. Для лучшего понимания и освоения алгоритма обратной прогонки целесообразно использовать его для нахождения кратчайшего пути в сети, изображенной на рис. 1. Если действовать в строгом соответствии с этим алгоритмом, то будет получена длина кратчайшего пути, но не сам путь. Для нахождения кратчайшего пути необходимо запоминать (хранить) номера дуг (i, j), которые составляют путь длиной v_j.

Следует отметить, что название «алгоритм обратной прогонки» является не совсем удачным. В данном случае вычисления ведутся в направлении стрелок. Можно изменить направление стрелок, и тогда ход вычислений будет противоположен направлению стрелок. Алгоритм обратной прогонки пригоден для вычислений в ациклических сетях. Более того, расчеты можно начинать в *любом* конце сети и двигаться в обратном направлении к другому концу сети.

[1]) Запись $x \leftarrow (y)$ означает, что переменная x принимает значение переменной y. Например, $j \leftarrow (j + 1)$ означает, что j увеличивается на единицу.

Термин «обратная прогонка» ассоциируется с операцией, выполняемой с дугой (i, j) на втором шаге алгоритма. Следующий алгоритм выполняет те же операции, но в другой последовательности.

Алгоритм прямой прогонки

Шаг 1. Положить $v_1 = 0$ и $v_k = \infty$ для $k = 2, 3, \ldots, 9$. Положить $i = 1$.

Шаг 2. Для каждой дуги (i, j), исходящей из узла i, положить

$$v_j \leftarrow \min \{v_j, v_i + t_{ij}\}. \tag{3}$$

Шаг 3. Остановиться, если $i = 8$. В противном случае $i \leftarrow (i + 1)$ и перейти к шагу 2.

Убедиться в том, что прямая и обратная прогонки отличаются по существу, можно весьма простым способом, а именно используя их для получения кратчайшего пути в сети, изображенной на рис. 1. Предположим, что шаг 2 обратной прогонки осуществлен для $j = 2, 3, 4$; в результате стали известны кратчайшие пути до узлов *2*, *3*, *4*. Теперь предположим, что шаг 2 прямой прогонки выполнен для $i = 1, 2, 3$; тогда известна v_j — длина кратчайшего пути от узла *1* до узла j, а для финальной дуги (i, j) пути справедливо условие $i \leqslant 3$. К этому моменту вычислений уже найдены $v_3 = 2$, $v_4 = 5$, $v_5 = 13$, $v_6 = 6$. Более короткий путь (1, 3, 4, 5) до узла *5* будет найден на следующей итерации шага 2, когда будут произведены сравнения длин дуг, выходящих из узла *4*.

В алгоритмах прямой и обратной прогонки, хотя и отличных по существу, предусматривается одно *сложение* и одно *сравнение* на каждую дугу. Следовательно, оба алгоритма обладают одинаковым быстродействием. Тем не менее существует важное, хотя и тонкое, различие. В алгоритме прямой прогонки дуги рассматриваются для тех узлов, кратчайшие пути до которых известны, т. е. дуги, выходящие из узла i, являются основой вычислений, когда $v_i = f_i$. В алгоритме обратной прогонки рассматриваются дуги для тех узлов, кратчайшие пути до которых еще неизвестны, т. е. дуги, входящие в вершину j, используются при вычислениях, когда f_j еще неизвестна.

Именно в силу последнего обстоятельства предпочтение чаще отдается алгоритму прямой прогонки. Этот алгоритм можно применять при любой структуре множества кратчайших путей. Далее будет рассмотрен пример, в котором использование неравенства (6) позволяет увеличить быстродействие алгоритма прямой прогонки.

Отметим, что достаточно легко найти самый длинный путь в ациклической направленной сети; следует просто заменить min на max в (1) — (3) и на первом шаге алгоритмов положить $-\infty$ вместо $+\infty$.

С математической точки зрения только что рассмотренная задача совершенно тривиальна. Несмотря на это, именно к ней сводят-

ся многие задачи динамического программирования, которые возникают в исследовании операций. Весьма не просто распознать задачу динамического программирования, столкнувшись с ней на практике, но те идеи и приемы динамического программирования, которые изложены ниже, должны облегчить процесс распознавания подобных задач.

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИНЦИПЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача о кратчайшем пути иллюстрирует ряд характерных особенностей, которые присущи значительно более сложным многошаговым процессам принятия решений. Ниже перечислены некоторые из них. Напомним, что в исходной задаче требовалось определить кратчайший путь до узла *9*, т. е. вычислить f_9 и найти путь, длина которого равна f_9. Однако, вместо того чтобы решать задачу непосредственно, было осуществлено погружение ее в класс задач о кратчайшем пути, а именно вычислялись f_j для всех j. Последняя особенность характерна фактически для каждой модели многошагового процесса принятия решений, что и нашло отражение в следующем подходе.

Исходная задача *погружается* в множество оптимизационных задач; для каждого узла решается своя задача.

Погружение кажется шагом назад и ненужным усложнением задачи в тех случаях, когда интерес представляет только одна задача из семейства задач. Тем не менее, как мы скоро увидим, погружение часто приводит к эффективным вычислительным процедурам.

Множество решений оптимизационных задач описывается *функциональным уравнением*, аналогичным уравнению (1).

Для целей настоящего изложения можно считать, что функциональное уравнение представляет собой систему уравнений, которые связывают несколько оптимизационных задач. В такой системе каждое уравнение соответствует одному узлу. Более того, эти уравнения содержат обычно операторы типа min, max или minimax справа от знака равенства, а переменные типа f_i и f_j — по обе стороны от него.

Решение множества оптимизационных задач можно найти с помощью так называемого *алгоритма обратной прогонки*, который равнозначен упорядоченной процедуре решения последовательности функциональных уравнений

Отметим, что в алгоритме обратной прогонки предусматривается проведение *ровно одной* вычислительной операции для каждой дуги. Таким образом, едва ли существует более эффективный алгоритм, чем обратная прогонка, конечно, если дуги не связаны

между собой. Последнее указывает на сильные и слабые стороны динамического программирования: оно пригодно для решения проблем, не обладающих специальной структурой, но следует ожидать, что ДП окажется недостаточно эффективным при наличии некоторой структуры.

Как уже отмечалось, алгоритм обратной прогонки пригоден для проведения вычислений в ациклических сетях. Вычисления можно начать с одного конца сети и двигаться в направлении другого конца. То же самое справедливо для алгоритма прямой прогонки. Алгоритм обратной прогонки можно обобщить и использовать для решения задач, в которых есть элемент случайности; для алгоритма прямой прогонки это нельзя сделать.

Теперь можно сосредоточить внимание на таком сложном вопросе, как принцип оптимальности. Для этого необходимо ввести понятие подпути. Пусть $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ содержит путь $(i_p, \ldots, i_q)$ в качестве *подпути*, если выполняется условие $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. Например, путь $(2, 4, 6, 8)$ на рис. 1 содержит несколько подпутей, включая $(2, 4, 6)$ и $(4, 6)$.

> *Принцип оптимальности* (1-й вариант): подпуть кратчайшего пути сам является кратчайшим путем.

Поясним этот принцип. Путь $(1, 3, 4, 5, 7, 9)$ является кратчайшим путем от вершины 1 до вершины *9*. Согласно принципу оптимальности, $(3, 4, 5, 7)$ есть кратчайший путь от узла *3* до узла *7*. При желании это легко проверить, обратившись опять к рис. 1. Но в этом нет необходимости, поскольку если бы существовал более короткий путь p между узлами *3* и *7*, то составной путь $(1, p, 9)$ был бы короче кратчайшего пути от вершины *1* до вершины *9*, что невозможно.

Принцип оптимальности тесно связан с понятием функционального уравнения. Во многих случаях из одного следует другое. Однако, если длину пути определить как длину самой длинной дуги, в нем содержащейся (а не как сумму длин дуг!), то подпуть кратчайшего пути не обязательно будет кратчайшим путем.

Предыдущий вариант принципа оптимальности применим, к сожалению, только к сетевым оптимизационным моделям. Более универсальный вариант принципа включает понятие стратегии. В частности, для примера на рис. 1 *стратегия* определяет дугу (i, j), входящую в каждый из узлов j, кроме первого (т. е. $j \neq 1$). (Узел *1* отличается тем, что в него не входит дуга.) Одна из возможных стратегий иллюстрируется на рис. 2; существует еще 63 других стратегий. Полезно заметить, что стратегия рис. 2 определяет кратчайший путь от узла *1* до каждого другого узла. Стратегия называется *оптимальной для узла* j, если она определяет дуги, образующие кратчайший путь от узла *1* до узла j.

> *Принцип оптимальности* (2-й вариант): существует стратегия, которая оптимальна для каждого узла.

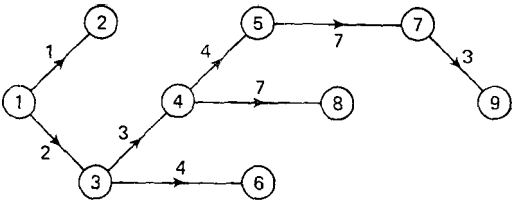


Рис. 2. Оптимальная стратегия.

В этом варианте принципа оптимальности утверждается, что существует стратегия, которая оптимальна одновременно для всех узлов. Может показаться, что в утверждение вкралась ошибка: для того чтобы стратегия была оптимальной для некоторого узла, она должна быть субоптимальной для другого узла. Такое интуитивное представление опровергается как схемой на рис. 2, так и аналогичными результатами, полученными для хорошо исследованных многошаговых процессов принятия решений.

Одним из достоинств второго варианта принципа оптимальности является относительная простота формулировки, поэтому он может служить в качестве утверждения теоремы. Действительно, исследования в области динамического программирования направлены, в частности, на то, чтобы описать классы оптимизационных задач, для которых справедлив второй вариант принципа оптимальности.

Обсуждение третьего, самого распространенного варианта принципа оптимальности, в котором используется понятие состояния, пока отложим.

4. ПРИМЕР

Анализ следующего примера проливает свет на только что рассмотренные принципы динамического программирования и позволяет ввести его основную концепцию. Рассмотрим следующую задачу математического программирования:

максимизировать $\{p_1(x_1) + p_2(x_2) + \ldots + p_N(x_N)\}$

при ограничениях

$$c_1(x_1) + c_2(x_2) + \ldots + c_N(x_N) \leqslant K,$$

$$0 \leqslant x_n \leqslant B, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

$$x_n \text{ — целые}, \; n = 1, 2, \ldots, N.$$

Здесь K и B — константы. В этом разделе будем предполагать, что функция $c_n(x)$ неотрицательна и принимает целые значения, причем $c_n(0) = 0$. Предположим, что $p_n(x)$ — произвольная функ-

ция, но обладает следующим свойством: $p_n(0) = 0$. Функции c_n и p_n заданы, а переменными задачи являются $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Можно дать несколько интересных интерпретаций сформулированной задачи. Будем считать, что x_n — число единиц произведенного продукта n, при производстве которого потребляется ресурс $c_n(x_n)$, а прибыль составляет $p_n(x_n)$ условных единиц. В такой интерпретации задача оптимизации состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль при условии, что будет израсходовано K или меньше единиц ресурса.

В данной задаче время не играет центральной роли; мы сведем эту задачу к многошаговому процессу принятия решений в предположении, что различные продукты должны производиться один за другим. Пусть первым производится продукт 1, затем продукт 2 и т. д. до продукта N, который должен производиться последним. Рассмотрим ситуацию, которая может сложиться после того, как произведены продукты от 1 до $(n-1)$. Прежде всего останется недоиспользованным некоторый ресурс y. Поскольку ресурс потребляется целыми «порциями», то y будет целым числом, лежащим где-то между 0 и K. Оставшиеся y единиц ресурса необходимо распределить для производства продуктов с номерами от n до N. Пусть

$f(n, y)$ — максимальная прибыль, которую можно получить путем распределения y единиц ресурса для производства продуктов с номерами от n до N.

Величина $f(1, K)$ является решением исходной оптимизационной задачи, которая была *погружена* в семейство из $N(K+1)$ задач; теперь требуется определить $f(n, y)$ для $n = 1, 2, \ldots, N$ и $y = 0, 1, 2, \ldots, K$.

Данная ситуация описывается с помощью пары (n, y). Будем говорить, что производство x_n единиц n-го товара *допустимо*, если

$$c_n(x_n) \leqslant y, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant B, \quad x_n \text{ — целые значения.}$$

Другими словами, производство x_n допустимо, если при этом потребуется ресурса не больше, чем его отпущено. Отметим, что $p_n(x_n) + f[n+1, y - c_n(x_n)]$ — максимальная прибыль, которую можно получить путем распределения y единиц ресурса для производства продуктов с номерами от n до N, *при условии* что произведено x_n единиц продукта n.

Приведенное выражение справедливо, поскольку ресурс, оставшийся после производства n-го продукта, по определению, распределен оптимально. Максимизируем это выражение по x_n, а именно будем искать

$$f(n, y) = \max_{x_n} \{p_n(x_n) + f[n+1, y - c_n(x_n)] \mid x_n \text{ — допустимо}\}. \quad (4)$$

Выражение (4) справедливо при $n=N$, если положить[1]

$$f(N+1, y)=0, \quad y=0, 1, \ldots, K. \tag{5}$$

Соотношения (4), (5) представляют собой *функциональные уравнения*. Заметим, что в левой части уравнения (4) стоит функция $f(n, y)$, а в правой части содержатся значения $f(n+1, z)$ для различных z. При использовании *алгоритма обратной прогонки* уравнение (4) решается в порядке убывания n, т. е. сначала вычисляется $f(N, y)$ для каждого y, затем вычисляется $f(N-1, y)$ для каждого y и т. д., вплоть до $f(1, K)$.

Легко видеть, что это задача о самом длинном пути в ориентированной ациклической сети. Пусть каждой паре (n, y) соответствует один узел сети. В такой сети из узла (n, y) выходит целый набор дуг; каждая дуга соответствует конкретному допустимому значению x_n и входит в узел $[n+1, y-c_n(x_n)]$. Длина дуги равна $p_n(x_n)$; задача состоит в поиске самого длинного пути от узла $(1, K)$ до *некоторого* узла $(N+1, z)$, где свободная переменная z указывает количество недоиспользованного ресурса. Функциональное уравнение можно также решить методом прямой прогонки. Действительно, из того факта, что, ничего не производя, мы ничего не расходуем, непосредственно следует неравенство

$$f(n, y) \leqslant f(n, y+1). \tag{6}$$

Более того, неравенство (6) дает возможность достичь предельной скорости вычислений методом прямой прогонки, так как можно исключать из рассмотрения дуги, связанные с узлами, для которых (6) не выполняется как строгое неравенство. В книге [11] подробно обсуждаются как этот, так и ряд других примеров.

5. СОСТОЯНИЯ

Понятие «состояние» играет центральную роль в динамическом программировании. В данной главе под состояниями будем понимать следующее.

> Переход осуществляется из состояния в состояние: состояние заключает в себе предысторию процесса, т. е. состояние описано с той степенью подробности, которая позволяет провести вычисление (оценку) текущих альтернативных решений.

Поясним это на примерах. Для сетевой модели, изображенной на рис. 1, узлы являются состояниями. Дуги, выходящие из некоторого узла, изображают различные решения, которые можно

[1]) Предположение (5) означает, что недоиспользованный ресурс бесполезен. Такое предположение часто оказывается нереалистичным. Можно заменить (5) подходящей функцией дохода или ввести понятие издержек за переход ресурса в следующий период.

принимать в данном узле (состоянии). При таком толковании можно говорить, что переход происходит из состояния в состояние, а состояния представляют собой точки, в которых принимаются решения. Приведенное утверждение означает, что дуги, выходящие из узла, не имеют никакого отношения к тому, как был достигнут тот или иной узел, т. е. не зависят от входящих дуг.

В задаче о распределении ресурса в качестве состояния возьмем пару (n, y). Напомним, что состояние (n, y) изображает ситуацию, когда требуется распределить y единиц ресурса для производства продуктов с номерами от n до N. В паре (n, y) содержится информация, вполне достаточная для принятия текущего решения, а именно указать, сколько единиц продукта n должно быть произведено. В данной ситуации, например, не нужно знать, как происходил переход в состояние (n, y).

Элементы состояния часто называют *переменными состояния*. Например, в модели распределения ресурса две переменные состояния: n и y. В моделях динамического программирования состояния часто группируются в стадии и переход осуществляется от одной стадии к другой. В модели распределения ресурса переход происходит из состояния (n, y) в состояние $(n+1, z)$ для некоторого z, так что n есть номер стадии. При $S_n = \{(n, y) \mid y = 0, 1, 2, \ldots, K\}$ множество состояний S_n называется стадией n, а переход осуществляется от стадии n к стадии $n+1$. В задачах динамического программирования стадии встречаются реже, чем состояния. Например, в задаче о кратчайшем пути (рис. 1) имеются состояния, но нет стадий, так как нельзя сгруппировать состояния в множества таким образом, чтобы происходил переход от одного множества к другому.

Итак, выше мы имели дело с состояниями. Погружение равносильно введению понятия *пространство состояний*, которое представляет собой множество состояний. В функциональном уравнении оптимальный отклик рассматривается как функция стартового состояния, а принцип оптимальности устанавливает взаимосвязь между оптимальными откликами для различных стартовых состояний.

Вообще говоря, весьма непросто сформулировать задачу оптимизации таким образом, чтобы ее можно было решить с помощью динамического программирования. Это требует некоторой изобретательности и определенного навыка. Именно здесь кроется одна из причин того, почему понятиям состояния и стадии придается такое большое значение. Постановка задачи всецело зависит от того, как выбраны состояния (или стадии).

Теперь можно сформулировать третий традиционный вариант принципа оптимальности. Под *стратегией* будем понимать процедуру принятия решения, которая определяет одно решение для состояния. *Оптимальной стратегией* называется стратегия, кото-

рая является оптимальной одновременно для каждого состояния. Во втором варианте принципа оптимальности утверждалось, что оптимальная стратегия существует. В третьем варианте рассматриваются такие отклонения от оптимальной стратегии, при которых изменяется только первое решение, а все остальные остаются без изменения.

Принцип оптимальности (3-й вариант). Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что, какими бы ни были начальные состояние и решение, оставшиеся решения образуют оптимальную стратегию для состояния, возникающего после первого перехода.

Приведенная формулировка принципа оптимальности представляет собой словесную запись утверждения, содержащегося в функциональном уравнении. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить 3-й вариант с выражением, представленным непосредственно перед уравнением (4); они, по существу, совпадают.

6. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Для многих многошаговых процессов принятия решений будущие состояния нельзя предсказать совершенно точно. Например, торговец знает свои текущие запасы, но не знает, сколько покупателей потребует его товар в течение ближайшего месяца. Никогда точно не известна будущая отдача сегодняшних капиталовложений. Страховые полисы продаются и покупаются только потому, что будущее всегда содержит элемент неопределенности. В самом деле, перед человечеством встает масса проблем многошагового принятия решений, и во многих из них неопределенность играет центральную роль.

Ниже приводится простая, удобная модель многошагового принятия решений в условиях неопределенности. В модели есть стадии, и состояние (n, i) представляет собой элемент стадии n. Исходными данными для модели являются:

$R_i^k(n)$ — вознаграждение, которое будет получено, если в состоянии (n, i) выбирается решение k;

$P_{ij}^k(n)$ — вероятность перехода из состояния (n, i) в состояние $(n+1, j)$ при выборе решения k.

Горизонт планирования состоит из N периодов, пронумерованных целыми числами от 1 до N. Переход осуществляется от периода n к периоду $n+1$, а процесс принятия решений заканчивается в периоде N. Рассматриваемая модель имеет много приложений и самых различных интерпретаций; из-за ограниченного объема книги мы не будем на них останавливаться, но читатель может обратиться к работам [15, 20, 21]. Модели такого типа называются *марковскими* моделями процесса принятия решений;

название хорошо отражает связь теории марковских цепей с динамическим программированием.

Пусть требуется максимизировать математическое ожидание суммарного дохода, полученного за весь плановый период.

$f(n, i)$ — максимальное значение математического ожидания дохода, который можно получить за периоды $n, n+1, \ldots, N$, если процесс находится в состоянии (n, i).

Следует отметить, что величина

$$R_i^k(n) + \sum_j P_{ij}^k(n) f(n+1, j) \tag{7}$$

представляет собой математическое ожидание дохода при начальном состоянии (n, i), выборе решения k и использовании оптимальной стратегии для периодов от $n+1$ до N. Но тогда эта величина не может быть больше чем $f(n, i)$. Более того, из 2-го варианта принципа оптимальности следует, что если найти максимум выражения (7) по k, то получим

$$f(n, i) = \max_k \{R_i^k(n) + \sum_j P_{ij}^k(n) f(n+1, j)\}. \tag{8}$$

Соотношение (8) справедливо при $n < N$, а также при $n = N$, если положить [1])

$$f(N+1, j) \equiv 0. \tag{9}$$

Соотношения (8) — (9) следует рассматривать как функциональное уравнение. Методом обратной прогонки данное функциональное уравнение решается в направлении убывания n. В данном случае метод прямой прогонки непригоден, поскольку модель описывает процесс, содержащий элемент неопределенности.

Обычно при формулировке проблем планирования во времени используется понятие процентной ставки. Пусть α — процентная ставка за один период. Предположим, что каждую единицу дохода, полученного за период n, можно вложить сразу же в производство и получить $1+\alpha$ единиц дохода в период $n+1$. Таким образом, при $(1+\alpha)c = 1$ для лица, принимающего решение, оказывается безразлично — получить одну единицу дохода в период $n+1$ или извлечь из единичного дохода полезность c в период n. Чтобы найти стратегию, которая приводит к наибольшей величине математического ожидания полезности в текущий момент, достаточно ввести величину c в выражение (8) после знака $+$.

---

[1]) Как и в случае (5), условие (9) можно заменить некоторой терминальной функцией дохода (или вознаграждения), наиболее подходящей для конкретной прикладной задачи.

7. ЯЗЫК ДЛЯ ОПИСАНИЯ МНОГОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Система обозначений — язык математики. Хорошая система обозначений выявляет структуру изучаемого предмета, а плохая — маскирует ее. Некоторые математики утверждают, что создание языка, соответствующего заданному объекту исследования, представляет собой наиболее творческий акт в математике. Во всяком случае, проблемы многошагового принятия решений предстают перед нами в несчетном многообразии форм, и поэтому было бы желательно создать язык (или выработать систему обозначений), охватывающий все многошаговые модели. Такой язык позволил бы выявить общую структуру разнообразных многошаговых процессов принятия решений.

Ниже представлена схема обозначений, с помощью которой удается описать различные многошаговые процессы принятия решений, возникающие при исследовании операций. (Исключение составляют в основном задачи оптимального управления с непрерывным временем, которые можно записать с помощью системы дифференциальных уравнений.)

Множество S возможных (или наблюдаемых) состояний называется *пространством состояний*, а элемент s из S определяет конкретное *состояние*. С каждым состоянием s связано множество $D(s)$. Элемент d из множества $D(s)$ называется *решением*. Будем предполагать, что $D(s)$ не пусто, или что (то же самое) состояния являются точками (моментами) принятия решений. Стратегия δ представляет собой правило, согласно которому определяется допустимое решение для каждого состояния. Фактически *стратегия* δ ставит в соответствие каждому состоянию s некоторый элемент $\delta(s)$ из множества $D(s)$. Набор всех таких δ образует *пространство стратегий* Δ. Последнее означает, что выбор решения в некотором состоянии никоим образом не ограничивает выбор во всех других состояниях. (По существу, Δ представляет собой декартово произведение множеств $D(s)$ по s.)

Одна из идей динамического программирования состоит в том, что каждая стратегия δ должна быть связана с функцией прибыли v^δ, где $v^\delta(s)$ определяет агрегированную прибыль, которую можно получить, исходя из состояния s и используя стратегию δ. Выражение «используя стратегию δ» означает, что в состоянии s выбирается решение $\delta(s)$; затем предполагается, что процесс перешел в состояние s', т. е. реализуется состояние s', в котором выбирается решение $\delta(s')$, и т. д. Функция прибыли имеет довольно сложную структуру, поскольку она зависит от последовательности состояний и решений, от вознаграждений, которые связаны с этими состояниями и решениями, а также от способа агрегирования вознаграждений.

Вместо того чтобы иметь дело непосредственно со всей последовательностью решений, сосредоточим внимание на состоянии s и отдельном решении d. Для этого рассмотрим некоторый усеченный многошаговый процесс принятия решений. Пусть такой процесс ведет себя точно так же, как и исходный, но в течение только одного перехода, а затем останавливается. Закон перехода и способ агрегирования вознаграждений отражены в неявном виде через терминальную функцию прибыли v. Таким образом, должен произойти переход из состояния s в состояние s', при котором в воображаемом процессе будет получено вознаграждение $v(s')$, а затем процесс останавливается. Состояние s, решение d и терминальная функция вознаграждения v являются тремя переменными для *локальной функции дохода*, определяемой следующим образом:

$h(s, d, v) =$ суммарному доходу, получаемому в усеченном одношаговом процессе; процесс начинается из состояния s, принимается решение d, а термальная функция вознаграждения есть v.

Функция v отображает множество S на действительную ось. Не существует «корректной» функции v, а введение этой функции преследует единственную цель, а именно записать чисто формальным образом способ перехода процесса от состояния к состоянию и метод агрегирования вознаграждений. Варьируя функцию v, можно восстановить значения вознаграждений и закон протекания процесса.

Локальная функция дохода является понятием довольно трудным для понимания, но следующие два примера должны пролить свет на ее свойства. Видоизменим немного модель распределения ресурса [см. уравнения (4), (5)]. Для этой модели состояние s определяется парой (n, y), решением является x_n, а локальная функция дохода имеет вид

$$h[(n, y), x_n, v] = p_n(x_n) + v[n+1, y - c_n(x_n)], \quad n < N. \tag{10}$$

Объяснение записи (10) довольно простое: переход осуществляется в состояние $[n+1, y - c_n(x_n)]$ и в данной точке получается (выплачивается) терминальное вознаграждение. Поскольку прибыль аддитивна, эта величина добавляется к $p_n(x_n)$.

Выражение (10) несправедливо при $n = N$. Действительно, мы раньше потребовали, чтобы состояниям соответствовали связанные с ними решения, т. е. чтобы множество $D(s)$ было не пусто. Последнее не позволяет вводить состояния вида $(N+1, z)$. Таким образом, переход осуществляется из состояния N вообще в «никуда», и

$$h[(N, y), x_N, v] = p_N(x_N). \tag{11}$$

Здесь следует обратить внимание на то, что, изменяя v, можно на основе формул (10), (11) восстановить закон протекания процесса, величины вознаграждений и способ их агрегирования.

Пересмотрим марковскую модель принятия решений [(8), (9)]. Для марковской модели состояние s определяется парой (n, i), решением является k, а локальная функция дохода определяется выражением

$$h[(n, i), k, v] = R_i^k(n) + \sum_j P_{ij}^k(n) v(n+1, j), \quad n < N. \tag{12}$$

Выражение (12) представляет собой математическое ожидание; действительно, терминальное вознаграждение $v(n+1, j)$ умножается на вероятность перехода в данное состояние и берется сумма по всем j. Поскольку процесс принятия решений прекращается на шаге N, переход осуществляется из стадии N вообще в никуда и

$$h[(N, i), k, v] = R_i^k(N). \tag{13}$$

Предыдущие два примера очень хорошо иллюстрируют смысл локальной функции дохода. Как легко видеть, ее использование упрощает описание многошагового процесса принятия решений, чем мы и воспользуемся в следующем разделе.

Хорошая система математических обозначений позволяет выразить основные идеи некоторого раздела науки. В данном случае мы убеждены в том, что введение локальной функции дохода проясняет смысл понятия «состояние». Заметим, что определение локальной функции дохода основано на предположении о том, что состояние представляет собой описание предыстории процесса со степенью подробности, позволяющей провести вычисление (оценку) текущих альтернативных решений. Если бы состояния не обладали указанным свойством, то вышеприведенное определение локальной функции дохода не имело бы смысла. Но данное свойство является основным среди свойств состояний, и поэтому запишем его еще раз.

> *Свойство состояний*: состояние является краткой записью предыстории процесса, причем степень детализации такова, что позволяет определить локальную функцию дохода.

Другими словами, локальная функция дохода может зависеть лишь от s, d и v.

Три ключевые идеи динамического программирования легко прояснить с помощью локальной функции дохода. Одна из них касается функции прибыли v^δ, которую нам бы хотелось связать со стратегией δ. Предполагается, что величина $v^\delta(s)$ является агрегированной прибылью для стартового состояния s и при использовании стратегии $\delta(s)$. Итак, пусть процесс начинается из состояния s, выбрано решение $\delta(s)$ и осуществлен переход в состояние s'.

Для лица, принимающего решения, должно быть совершенно безразлично: продолжать стратегию δ и получить агрегированную прибыль $v^{\delta}(s')$ или же получить вознаграждение $v^{\delta}(s')$ и остановиться. Другими словами, разумно предположить, что v^{δ} будет решением уравнения

$$v^{\delta}(s) = h[s, \delta(s), v^{\delta}], \text{ все } s \text{ из } S, \tag{14}$$

поскольку в левой части (14) записан доход, который принесет постепенное использование стратегии δ, а справа — прибыль от использования решения $\delta(s)$ при терминальной функции вознаграждения v^{δ}. Уравнение (14) называется *уравнением оценки стратегий*.

С математической точки зрения представляет интерес следующий вопрос: существует ли какое-нибудь решение уравнения (14), и если да, то сколько таких решений? Конечно, было бы очень хорошо доказать, что уравнению (14) удовлетворяет точно одна функция. В таком случае можно было бы определить v^{δ} как единственную неподвижную точку оператора $h[s, \delta(s), \cdot]$.

Теперь вернемся ко второму варианту принципа оптимальности. Он утверждает, что существует стратегия π, которая является оптимальной одновременно для всех состояний. Для такой стратегии функция прибыли v^{π} будет наилучшей из всех возможных в том смысле, что

$$v^{\pi}(s) \geqslant v^{\delta}(s) \text{ при всех } s \text{ из } S \text{ и всех } \delta \text{ из } \Delta. \tag{15}$$

С математической точки зрения неравенство (15) показывает, что существует стратегия, функция прибыли которой является верхней огибающей функций прибыли для всех других стратегий.

В третьем варианте принципа оптимальности рассматривается возмущенная стратегия π, в которой первое решение $\pi(s)$ изменено, а все остальные решения остались прежними. В третьем варианте утверждается, что изменение только $\pi(s)$ не оказывает влияния на доход, полученный после перехода, и поэтому

$$v^{\pi}(s) \geqslant h(s, d, v^{\pi}) \text{ при всех } s \text{ и всех } d. \tag{16}$$

На основе формул (14) и (16) получаем

$$v^{\pi}(s) = \max_{d}\{h(s, d, v^{\pi})\} \text{ при всех } s. \tag{17}$$

Таким образом, оказалось, что принцип оптимальности эквивалентен утверждению о том, что оптимальная функция прибыли v^{π} существует и является решением уравнения (17). Уравнение (17) представляет собой *функциональное уравнение* динамического программирования, записанное в довольно общей форме. С математической точки зрения возникают следующие вопросы: 1) существует ли решение уравнения (17)? 2) существует ли точно одно решение? 3) является ли это решение оптимальной функцией прибыли? Другими словами, вопрос состоит в том, является ли функ-

ция v^{π}, определенная соотношением (15), единственной неподвижной точкой оператора $\max_j\{h(s, d, \cdot)\}$.

Итак, нам удалось изложить некоторые основные идеи динамического программирования, используя понятие локальной функции дохода. Предполагается, что функция прибыли для конкретной стратегии является решением уравнения (14) и что существует стратегия, функция прибыли которой удовлетворяет неравенству (15). Кроме того, предполагается, что функция прибыли для такой стратегии является единственным решением уравнения (17). Возможно, кому-нибудь удастся доказать приведенные утверждения как теоремы, в которых в качестве гипотезы будет взято некоторое предположение о структуре локальной функции дохода. Благодаря таким теоремам принцип оптимальности решений задачи можно было бы заменить на гипотезу, касающуюся внутренней структуры многошагового процесса.

Условия, при которых выполняются соотношения (14), (15), (17), действительно были обнаружены, и сейчас продолжают находить все новые подтверждения их справедливости. Методика исследований этого вопроса настолько сложна, что мы не будем здесь на ней останавливаться. Укажем только, что данный вопрос и связанные с ним проблемы определяют одно из основных направлений исследований в области динамического программирования [7—9].

8. МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В данном разделе описывается наиболее изученная, известная и полезная модель принятия решений в условиях неопределенности. В модели имеется конечное множество состояний, которые для удобства пронумерованы числами от 1 до m. Для каждого состояния задан конечный набор решений, связанных с данным состоянием. В этой модели локальная функция дохода имеет вид

$$h(i, k, v) = R_i^k + c\sum_{j=1}^{m} P_{ij}^k v_j \tag{18}$$

Здесь обозначение $v(j)$ сокращено до v_j, поскольку в дальнейшем окажется, что $v(j)$ является элементом вектора v размерности $m \times 1$.

Поясним кратко выражение (18). Решение принимается в периоды 0, 1, 2 и т. д. до бесконечности. Периоды представляют собой равные промежутки времени, и c — показатель дисконтирования за период. Естественно предположить, что

$$0 \leqslant c \leqslant 1. \tag{19}$$

Условие (19), помимо всего, означает, что процентная ставка неотрицательна. Предположим, что в период n наблюдается состоя-

ние i и выбрано решение k. Из локальной функции дохода следует, что вознаграждение R_i^k получается сразу, а также, что вероятность перехода в состояние j в период $(n+1)$ равна P_{ij}^k. Напомним, что (8) является функциональным уравнением для марковской модели принятия решений и, таким образом, соотношение (18) определяет вариант той же модели, но с бесконечным горизонтом планирования. Теперь естественно предположить, что

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}^k \leqslant 1. \tag{20}$$

Условие (20) означает, что процесс может остановиться на некотором шаге, т. е. не осуществится переход в некоторое состояние в следующем периоде.

Заметим, что процесс принятия решений начинается в нулевой (начальный) период и может продолжаться бесконечно. Процесс не имеет «конца», от которого начинается алгоритм обратной прогонки.

Стратегия δ определяет решение $\delta(i)$ для состояния i. Вознаграждения, получаемые при стратегии δ, можно выразить с помощью m-мерного вектора R^δ, а вероятности переходов можно записать в виде матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P}^\delta$ размера $m \times m$, а именно

$$(\mathbf{R}^\delta)_i = R_i^{\delta(i)}, \tag{21}$$

$$(\mathbf{P}^\delta)_{ij} = P_{ij}^{\delta(i)}. \tag{22}$$

Модель с дисконтированием (переходный режим). Рассмотрим модель, в которой будем считать выполненной одну из следующих гипотез:

(I) $c \sum_{j=1}^{N} P_{ij}^k < 1$ при всех i, k.

Гипотеза (I) определяет так называемую модель с *дисконтированием*. Эта гипотеза справедлива, если соотношение (20) выполняется как строгое неравенство или же если $c < 1$. Гипотеза (II) фактически является обобщением гипотезы (I).

(II) *Для каждой стратегии δ все собственные значения $c\mathbf{P}^\delta$ по абсолютной величине меньше 1.*

Гипотеза (II) определяет *переходный режим*; в литературе приводятся простые методы ее проверки [20].

Для того чтобы $(cP^\delta)^n \to 0$ при $n \to \infty$, достаточно выполнения любой из двух гипотез: (I) или (II). При этом неймановская последовательность $I + (cP^\delta) + (cP^\delta)^2 + \ldots$ сходится к матрице, обратной к $(\mathrm{I} - c\mathbf{P}^\delta)$; здесь I — единичная матрица размера $m \times m$.

Поскольку в модели имеется m состояний, то функцию прибыли для стратегии δ можно записать в виде m-вектора $\mathbf{v}^\delta$, а уравнение

стратегий (14) можно переписать в матричных обозначениях. Если взять $\mathbf{R}^\delta$ и $\mathbf{P}^\delta$ в соответствии с формулами (21), (22), то уравнение стратегий примет вид

$$\mathbf{v}^\delta = \mathbf{R}^\delta + c\mathbf{P}^\delta\mathbf{v}^\delta, \text{ или} \tag{23}$$

$$(\mathbf{I} - c\mathbf{P}^\delta)\,\mathbf{v}^\delta = \mathbf{R}^\delta. \tag{24}$$

Мы уже знаем, что для матрицы $(\mathbf{I} - c\mathbf{P}^\delta)$ существует обратная матрица, и поэтому

$$\mathbf{v}^\delta = (\mathbf{I} - c\mathbf{P}^\delta)^{-1} R^\delta. \tag{25}$$

Отсюда следует, что уравнение стратегий имеет единственное решение, когда справедлива либо гипотеза (I), либо гипотеза (II).

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования, предполагая, что выполняется одна из гипотез [(I) или (II)]:

максимизировать[1] $\left\{\sum_i \sum_k\right\} R_i^k x_i^k$

при ограничениях

$$\sum_k x_i^k - c\sum_j \sum_k x_j^k P_{ji}^k = \alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ x_i^k \geqslant 0 \text{ при всех } i,\ k.$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — любые положительные фиксированные числа. Известно, что данная задача допустима и ограничена, а ее любой оптимальный базис обладает следующими свойствами. Для каждого i переменная x_i^k положительная только для одного k. Кроме того, $\pi(i) = k$ всякий раз, когда $x_i^k > 0$ и стратегия π является оптимальной. Таким образом, стратегия π удовлетворяет формуле (15) и второму варианту принципа оптимальности. К тому же $\mathbf{v}^\pi$ представляет собой вектор двойственных переменных и удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости для любого оптимального базиса прямой задачи. Между прочим, данная задача линейного программирования является леонтьевской системой, одна из особенностей которой состоит в том, что один и тот же базис оптимален для всех положительных правых частей системы. Именно поэтому значения констант α_i несущественны, если только они положительны.

В литературе можно найти три других подхода к решению рассмотренной задачи. Один из них называется *методом итеративных стратегий* [15], а другой — *методом Ньютона — Рафсона* [6]. Доказано, что если выполняется гипотеза (I) или (II), то оба указанных метода совпадают и представляют собой блочное преобразование (ведущую операцию) двойственного симплекс-метода, примененное к данной задаче линейного программирования. Поскольку в настоящее время широко используются программы для

[1]) Если опущены пределы суммирования, то предполагается, что суммирование ведется по всему набору индексов.

решения задач линейного программирования большой размерности, то мы не будем останавливаться на этих специальных методах. Третий метод известен как процедура *последовательной аппроксимации*; иногда его называют методом итеративных оценок. При использовании этого метода в качестве начального приближения берется некоторый m-мерный вектор $\mathbf{v}^0$, а затем последовательно применяется уравнение

$$\mathbf{v}_i^n = \max_k \left\{ R_i^k + c \sum_j P_{ij}^k \mathbf{v}_j^{n-1} \right\} \tag{26}$$

для вычисления вектора $\mathbf{v}^n$ на основе $\mathbf{v}^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Можно доказать, что $\mathbf{v}^n$ сходится к $\mathbf{v}^*$ — оптимальной функции прибыли при $n \to \infty$. В литературе также обсуждаются два варианта реализации итерационного уравнения (26). При одном подходе предлагается проводить вычисления, используя метод Зейделя. В другом используется идея более быстрого вычисления внутренних произведений за счет увеличения числа сложений и уменьшения числа умножений.

Метод последовательной аппроксимации имеет преимущество по сравнению с методами линейного программирования. Он не позволяет производить анализ чувствительности так же легко и просто, как методы линейного программирования, зато при его использовании можно быстрее получать решения задач, в которых очень много состояний, а число возможных решений для каждого состояния не слишком велико. Подтверждения последних утверждений можно найти в книге [11].

Модель без дисконтирования. В другой интересной марковской модели нет ни дисконтирования, ни вероятности остановки процесса. Для такой модели выполняется следующая гипотеза:

$$\text{(III)} \qquad c = 1, \ \sum_j P_{ij}^k = 1 \text{ при всех } i \text{ и всех } k.$$

Гипотеза (III) определяет случай модели *без дисконтирования*. В данной модели процесс решения продолжается бесконечно, вознаграждение выплачивается в каждый период, а будущий доход не дисконтируется. Суммарная прибыль, полученная за первые n периодов, вероятно, должна стремиться к бесконечности при $n \to \infty$, причем независимо от того, какая используется стратегия. Следовательно, суммарное вознаграждение уже не является критерием, согласно которому можно выделять хорошие и плохие стратегии.

В моделях без дисконтирования чаще всего требуется максимизировать средний процент роста доходов в единицу времени. В этом случае говорят о темпе роста доходов. Критерий, состоящий в максимизации темпа роста доходов, оказывается не всегда удачным; так, например, темп роста доходов равен нулю в двух слу-

чаях: (0, 0, 0, ...) и (10^6, 0, 0, ...). Мы ограничимся рассмотрением задачи максимизации темпа роста, хотя более гибкие и чувствительные критерии предполагались и анализировались в работе [19]. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\text{максимизировать } \left\{\sum_i \sum_k R_i^k x_i^k\right\}$$

при ограничениях

$$\sum_k x_i^k - \sum_j \sum_k x_j^k P_{ji}^k = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_i \sum_k x_i^k = 1, \quad x_i^k \geqslant 0 \text{ при всех } i, k. \tag{27}$$

Приведенная задача допустима и ограничена. Известно, что любой оптимальный базис задачи обладает следующими свойствами. Для каждого i переменная x_i^k положительна не более чем для одного k, а определенные ниже переходные вероятности образуют одну эргодическую цепь $\{P_{ij}^k \mid x_i^k > 0\}$. Темп роста доходов для данной эргодической цепи является наибольшим среди всех эргодических цепей.

Короче говоря, решение вышеприведенной задачи линейного программирования позволяет найти эргодическую цепь с максимальным темпом роста. Данная цепь всегда дает наилучший темп роста для состояний, которые ее образуют. В большинстве практических случаев такие состояния достижимы из других состояний, и указанная эргодическая цепь дает наилучший темп роста для всех состояний. Тем не менее в сложных случаях при наличии нескольких цепей задачу линейного программирования (27) приходится решать многократно, используя процедуру типа декомпозиции; подробно эта процедура описана в работах [10, 12].

Максимальный темп роста для модели без дисконтирования можно также найти с помощью метода итеративных стратегий. В очень простых случаях метод итеративных стратегий равнозначен блочному преобразованию в двойственном симплекс-методе точно так же, как в модели с дисконтированием. Однако в более сложных случаях симплекс-метод обычно оказывается более эффективным по сравнению с методом итеративных стратегий [6, 11].

Метод последовательной аппроксимации также можно применить при анализе модели без дисконтирования. Можно непосредственно использовать формулу (26) при $c = 1$. При благоприятных условиях $v_i^{n+1} - v_i^n$ стремится к темпу роста, достигаемому для лучшей цепи. Но даже при таких условиях $\mathbf{v}^n$ стремится к бесконечности. Последнее приводит к серьезным вычислительным трудностям, которые можно преодолеть путем вычитания константы, равной v_i^n, из каждого элемента $\mathbf{v}^n$ либо после каждой итерации (26), либо время от времени.

Теоремы о магистрали. Предположение о бесконечном горизонте планирования не очень логично; в конце концов все превращается в прах. Во многих прикладных задачах плановый горизонт достаточно длинный, но длина его неизвестна. Теоремой о магистрали называется утверждение такого рода: если горизонт планирования состоит более чем из N периодов, то для получения текущего решения достаточно предположить, что горизонт бесконечен. Теорема о магистрали позволяет принять разумное решение при неизвестном горизонте планирования, если только он достаточно велик. Теоремы о магистрали были сформулированы как для данной марковской модели, так и для ряда других многошаговых процессов принятия решений. Магистральные теоремы представляют большой интерес, но довольно сложны, и мы не будем на них останавливаться, а отошлем читателя к работе [20].

Марковские задачи о восстановлении. Марковские модели принятия решений можно обобщать в самых разных направлениях. Возможно, наиболее полезное обобщение получается, когда рассматриваются неравные и(или) переменные времена переходов. В такой модели величина cP_{ij}^k заменяется на

$$Q_{ij}^k = P_{ij}^k \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dF_{ij}^k(t), \tag{28}$$

где $F_{ij}^k(\cdot)$ — интегральная функция распределения времени перехода в состояние j из состояния i при выборе решения k; P_{ij}^k — вероятность перехода из состояния i в состояние j при выборе решения k; α — мгновенное значение процентной ставки.

В данной модели предполагается, что переход из состояния в состояние и наблюдение состояния осуществляются мгновенно, а отрезок времени между переходами из состояния в состояние может иметь переменную или случайную длину. Всякий раз, когда наблюдается некоторое состояние, следует выбрать решение, которое уже нельзя изменять до тех пор, пока процесс не перейдет в новое состояние, где выбирается новое решение, и т. д. Данная модель представляет собой комбинацию теории марковских цепей и теории восстановления; обычно ее называют *марковской задачей о восстановлении*, хотя иногда о ней говорят как о модели принятия решений для полумарковского процесса. В случае экспоненциального времени перехода F_{ij}^k является интегральной функцией экспоненциального распределения, параметры которой могут зависеть от i, j, k.

Все вышесказанное относительно марковских моделей решений с дисконтированием и переходных режимов справедливо также и для марковских задач восстановления при условии, что cP_{ij}^k везде заменяется на Q_{ij}^k. Например, задача линейного програм-

мирования имеет тот же смысл, что и раньше, но в ограничениях на месте cP_{ij}^k стоит Q_{ij}^k [17].

Марковская задача о восстановлении без дисконтирования имеет место, когда процентная ставка $\alpha = 0$. В этом случае P_{ij}^k и Q_{ij}^k совпадают. Пусть

$$t_i^k = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}^k \int_0^\infty t\, dF_{ij}^k(t).$$

Из вышеприведенного следует, что t_i^k является математическим ожиданием времени перехода из заданного состояния i при решении k. Задача линейного программирования для марковской задачи восстановления без дисконтирования имеет тот же смысл, что и в исходной модели, при условии что ограничения (27) заменяются условием (29) [12]:

$$\sum_i \sum_k t_i^k x_i^k = 1. \tag{29}$$

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном кратком изложении динамического программирования внимание было сосредоточено на трех важных моментах. Во-первых, были описаны вычислительные методы ДП, которые состоят в основном из алгоритма обратной прогонки, процедуры последовательных приближений и линейного программирования. Во-вторых, были рассмотрены те основополагающие понятия и формальные построения, которые составляют сущность теории ДП, а именно понятия состояния и погружения, функциональные уравнения и принцип оптимальности, локальная функция дохода. И наконец, в-третьих, были отмечены вопросы и проблемы, возникающие при попытке изучения формальной структуры, лежащей в основе процесса принятия решения и дающей начало функциональным уравнениям. Для изучения этой структуры требуются локальная функция дохода и уравнения неподвижной точки.

Любое конспективное изложение такой разветвленной области, как динамическое программирование, неизбежно является неполным. В сущности, ничего не было сказано о структурированных многошаговых проблемах принятия решений, для которых получены интересные качественные результаты [20]. Два важных вопроса вообще не обсуждались: 1) связь между динамическим программированием и вариационным исчислением; 2) связь принципа оптимальности с принципом максимума Понтрягина [4, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Arrow K. J., Blackwell D., Girshick M. A., Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems, *Econometrica*, **17**, 214--244 (1949).
2. Arrow K. J., Harris T. E., Marschak J., Optimal Inventory Policy, *Econometrica*, **19**, 250--272 (1951).
3. Bellman R. E., On the Theory of Dynamic Programming, *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, 38, 716—719 (1952).
4. Bellman R. E., Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton. New Jersey, 1957. [Имеется перевод: Беллман Р. Динамическое программирование.— М.: ИЛ, 1960.]
5. Bellman R. E., Dreyfus S., Applied Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962. [Имеется перевод: Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования.— М.: Наука, 1965.]
6. Blackwell D., Discrete Dynamic Programming, *Ann. Math. Stat.*, **33**, 719—726 (1962).
7. Blackwell D., Discounted Dynamic Programming, *Ann. Math. Stat.*, **36**, 226—235 (1965).
8. Blackwell D., Freedman D., Orkin M., The Optimal Reward Operator in Dynamic Programming, *Ann. Prob.*, **2**. 926—941 (1974).
9. Denardo E. V., Contraction Mappings in the Theory Underlying Dynamic Programming, *SIAM Rev.*, **9** (1967).
10. Denardo E. V., On Linear Programming in a Markov Decision Chain, *Management Sci.*, **16**, 281- 288 (1970).
11. Denardo E. V., Dynamic Programming, Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
12. Denardo E. V., Fox B. L., Multi-Chain Markov Renewal Programs, *SIAM J. Appl. Math.*, **16**, 468—487 (1968).
13. Dreyfus S. E., Dynamic Programming and the Calculus of Variations, Academic Press, New York, 1965.
14. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J., The Inventory Problem--I (and II), Case of Known (Unknown) Distributions of Demand, *Econometrica*, **20**, 187—222, 450--466 (1952).
15. Howard R. A., Dynamic Programming and Markov Processes, Technology Press of MIT, Cambridge, Massachusetts, 1960. [Имеется перевод: Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1965.]
16. Iscaas R., Games of Pursuit, The Rand Corporation, Santa Monica, California, 1951, p. 257.
17. Jewell W. S., Markov-Renewal Programming, I: Formulation, Finite Return Models; II: Infinite Return Models, Example, *Operations Res.*, **11**, 938—971 (1963).
18. MasséP., Les Réserves et la Régulation de L'Avenir Dans la Via Economique, 2 vols., Herman, Paris, 1946.
19. Veinott A. F., Jr., On Finding Optimal Policies in Discrete Dynamic Programming with No Discounting, *Ann. Math. Stat.*, **37**, 1284—1294 (1966).
20. Veinott A. F., Jr., Markov Decision Chains, in M. A. A. Studies in Mathematics, 10, Eds. J. B. Dantzig, B. C. Eaves, Washington, D. C., 1975.
21. Wagner H. M., Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970. [Имеется перевод: Вагнер Г. Основы исследования операций, т. 1--3.— М.: Мир, 1973.]
22. Wald A., Sequential Analysis, Wiley, New York, 1947. [Имеется перевод: Вальд А., Последовательный анализ.-- М.: Физматгиз, 1960.]

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автокорреляция 384
Аксиомы *Архимеда* 465
Алгоритм *Ньютона* 287
— обратной прогонки 682
— переменной метрики 279
— проекций градиента 286
— сечений 277
— сопряженных направлений 280
— *Фибоначчи* 276
— штрафных функций 282
— элиминирования дефекта 206
Альтернативное оптимальное решение 96
Анализ периодограмм 386

Базис 91
Базисная переменная 91
Барьер 533
Бесконечные игры 523
Биматричные игры 534
Бинарные отношения 452
Броуновское движение 353

Варьирование интенсивности обслуживания 421
Ветвящиеся процессы 379
Визуальный поиск 552
Виртуальная продолжительность ожидания 393
Временные ряды 383
Входной поток 391
Выбор стратегии принятия решения 492
Выборка по значимости 645
Выигрыш выживания 529
Выпуклый анализ 237

Гамильтониан 331
Гарантированный эквивалент 494
Графов основные определения 156

Двойственность 242, 274
Двойственный симплекс-метод 108
Дерево 157
Динамические процессы 651
Динамическое программирование 680
— — оптимальная стратегия 689
— — принцип 684
— — пространство состояний 692
— — уравнение 684, 695
Дисциплина очереди 392
Дифференциальные игры 530
Диффузионная аппроксимация 436
Длина очереди 393
Доминирование 519
Допустимое базисное решение 92

Задача *Рамсея* 183
— о бракосочетаниях 89
— — доставке 131
— — Кенигсбергских мостах 153
— — коммивояжере 89
— — кратчайшем пути 681
— — назначениях 89
— — паросочетаниях 126
— — покрытии 130
— — — наименьшей мощности 131
— — поставщике 88
— — потоке в сети 194
— — ранце 126
— — четырех красках 153
— оптимального управления 328
— с многократными альтернативами 132
— — постоянными затратами 127
— — решетчатой структурой 148
Замещенные ограничения 146
Зацикливание 102
Значение игры по *Шепли* 541
Золотое сечение 276

Игра *n* лиц 537
Игровое моделирование 546
Избыточные переменные 90
Изменение предпочтений во времени 507
Имитационное моделирование 640
— — алгоритм управления 666
— — модель 640

Имитационное моделирование, теория 630
— — языки 666
Индивидуально-рациональная конфигурация выигрыша 542
Информационное множество 513
Искусственные переменные 93
Итеративные оценки 699

Карта двойственная 174
Квадратичное программирование 85
Коалиция 538, 542
Коллективное принятие решений 508
Комбинаторика 122
Контур 157
Контуры равной полезности 458
Кооперативные игры 535
Коэффициент внутренней устойчивости 182
— нагрузки системы 395
Кривая сделок 540
Критерий *Вилкоксона* 416
— останова алгоритма 245
Кубическая карта 179
Кумулятивный процесс 376

Линейная функция полезности 461
Линейные ограничения вероятностного характера 85
Ложная тревога 554
Ложные обнаружения 614
Локальная функция дохода 693

Максимальный корневой лес 215
Марковская вложенная цепь 433
— модель 696
Марковский процесс 427
Мартингалы 371
Маршрут 157
Матрица инцидентности 209
Матричная игра 517
Матроиды 188
Метод *Бокса—Маллера* 636
— ветвей и границ 144
— генерации столбцов 309
— декомпозиции *Данцига—Вулфа* 312
— итеративных стратегий 698
— компенсаций 643
— *Монте-Карло* 657
— мультипликативный конгруэнтный 634
— *Ньютона—Рафсона* 698
— отбраковки 639
— отсекающих плоскостей 144
— *Поллачека* 435

Метод прямо двойственный 110
— прямой выборки 642
— ступенек 110
Механизм обслуживания 392
Многофакторная теория полезности 468
Многошаговые игры 527
Множество сделок 542
Модель Леонтьева 113
— скользящего среднего 388

Неавтономная задача 328
Небазисная переменная 91
Невязка двойственности 244
Некооперативные игры 534
Неподвижная точка 695
Неприводимая цепь 369
Неустановившийся режим 357
Нормализация 538
Нормальная форма игры 514
— задача 252

Область управления 327
Обобщенные ограничения сверху 297
Обобщенный метод Лагранжа 145
Обращенная дуга 197
Общая задача принятия решений 491
Объект 657
Ограниченная очередь 410
Ограниченные переменные 103
Операционный цикл 394
Оптимальная траектория 328
Оптимальное распределение поисковых усилий 576
— управление 325
Ортогональные приращения 385
Основное уравнение 532
Остаточные переменные 90
Оценочные суждения 497

Паросочетания 167
Переходная матрица 366
Период занятости 393
Петля 157
Плапарная толщина 178
Планарность 169
Плоская карта 158
Поверхность ориентируемая 158
— неориентируемая 158
Позином 228
Поиск 550
— активно ускользающей мишени 623
— дискретно локализованных объектов 611
— с запаздыванием 605

Поисковый потенциал 554
Показатели эффективности 52
Полезность по *Бернулли* 464
Поток максимальный 199
Потоки с выигрышами 220
— многополюсные 220
— многопродуктовые 220
Правило ограниченного ввода в базис 95
Предпочтение 452
Приведенная ширина полосы 563
Признак 657
Принцип максимума 330
Проблема *Беренса—Фишера* 651
Проверка независимости событий 416
Программирование геометрическое 225
— динамическое 680
— задач большой размерности 291
— кусочно-линейное 104
— линейное 81
— нелинейное 267
Производящая функция 429
— — *моментов* 360
Произвольная выборка 373
Простая лотерея 487
Пространство состояний 427
Процедура обработки списков 665
Процесс авторегрессионный 386
— *Винера* 353
— восстановления 373
— *Маркова* стандартный 367
— — нестандартный 367
— полумарковский 377
— принятия решений 680
— пуассоновский 351
— рождения — гибели 381
Путь 195

Равновесные стратегии 514
Разложение *LU* 295
Разрез 157
Раскраска 158
Распределение биномиальное 638
— *Вейбулла* 636
— логарифмически нормальное 636
— нормальное (гауссово) 636
— *Эрланга* 416, 637
Регрессия 646
Рекуррентные события 363
— процессы 364
Рекурсивные игры 529
Решение 692
— глобальное 268
— локальное 268
— *Неймана—Моргенштерна* 540

Сверхразреженность 296
Седловая точка 240, 516
Сепарабельность 86, 233, 319
Сердцевина ядра (*c*-ядро) 543
Сигнал 227
Симплекс-метод 92
— двойственный 215
— модифицированный 98
Симплекс-таблица 95
Симплексные множители 293
Синдром жадности 41
— китайского бейсбола 40
Системный анализ 68
Системы с приоритетами 424
Слабое упорядочение 456
Случайные блуждания 357
Смежные экстремальные точки 102
Смешанные стратегии 517
Событие 368
— невозвратное 368
— положительное 368
Совместная задача 252
Сопряженная функция 238
Сопряженное преобразование 237
Состояние 366
— достижимое 368
Спектральная плотность 384
Спектральное распределение 384
Статистический анализ данных 648
Стационарность 355
Стационарное распределение 356
Стационарность 355
— процессы 349
Стратегия 513
— угроз смешанная 537
Стратификация 644
Субградиент 238
Субъективная вероятность 473
Суммарный поисковый потенциал 569
Схема *Дейкина* 144

Темп роста 700
Теневые цены 314
Теорема *Байеса* 498
— *Блэкуэлла* 374
— *Винера—Хинчина* 384
— *Кенига* 183
— *Куратовского* 170
— *Менгера* 183
— о дополняющей нежесткости 110
— — магистрали 701
— — минимаксе 518
— *Фенхеля* 247
— *Эйлера* 183
Теоремы сходимости мартингалов 373
Теория игр 513
— ожидаемой полезности 460

Теория полезности 448
— принятия решений 481
Транспортная задача 88
— — обобщенная 89
— — с ограниченными пропускными способностями 110
Точка *Нэша* 536

Убывающая предельная полезность 449
Универсальная поверхность 533
Унимодулярность 93
Упорядочение 453
Управляемая система 328
Управляемые переменные 50
Уравнение *Вальда* 359
— *Колмогорова—Чэпмена* 401
— *Майера* 332
— *Такача* 432
— теории восстановления 353
Условие *Вейерштрасса* 332
— побочных платежей 537
— сопряжения 279
— трансверсальности 334
Условия *Куна—Таккера* 86, 269
— оптимальности 269
Устойчивое множество 540
Устойчивость 252

Фактор графа 158
Фиксация 552
Фиктивная игра 520
Формула *Литтла* 408
— *Хинчина—Поллачека* 404
— *Энгсета—О'Дейла* 411
— *Эрланга* 411
Фундаментальное тождество *Вальда* 360
Функция восстановления 352
— *Лагранжа* 105, 256
— отсрочки 353
— характеристическая 537

Цепь 157, 195
— аугментальная 197
— *Маркова* 350
— кратчайшая 195
— неприводимая апериодическая 370
— пуклонная 543
Цикл гамильтонов 161
— ориентированный 196

Числа псевдослучайные 634
— равномерно распределенные случайные 634

Эвристические методы 149
Эйлеров контур 159
Эквивокальная поверхность 533
Экспоненциальное распределение 635
Экстремальная точка 91

Ядро игры 540

Оглавление

Предисловие к русскому переводу 5
Предисловие 7

Часть I

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

I-1. История развития и использование методов исследования операций, *Х. Майзер* 13

1. Начальный период 13
2. Научная сущность исследования операций 16
3. Практические применения методов исследования операций 19
4. Развитие методов исследования операций в период с 1945 по 1975 г. 21
5. Дальнейшее развитие методов исследования операций 32
6. Перспективы развития методов исследования операций 33

Литература 33

I-2. Методика проведения исследований операций, *Н. Эйджин* . . . 37

1. Введение 37
2. Определение целей 38
3. Составление плана разработки проекта 40
4. Формулировка проблемы 44
5. Построение модели 52
6. Разработка вычислительного метода 55
7. Разработка технического задания на программирование; программирование и отладка 57
8. Сбор данных 59
9. Проверка модели 61
10. Реализация результатов исследования операций 64

Литература 65

I-3. Подготовка специалистов по исследованию операций, *Р. Тролл*

1. Введение 66
2. Структура системы подготовки специалистов по исследованию операций 67
3. Уровни научной квалификации специалистов по исследованию операций 72
4. Учебные программы 76
5. Привлечение кадров в сферу исследования операций 79

Литература 80

Часть II

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ (ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ)

II-1. Линейное программирование, *Х. Таха* 81

1. Введение 81
2. Применение моделей линейного программирования 82

3. Свойства решений задач линейного программирования . . . 89
4. Симплекс-метод 93
5. Теория двойственности 105
6. Анализ моделей на чувствительность 115
7. Линейные задачи, допускающие декомпозицию 117
8. Заключительные замечания 118
Литература 118

II-2. Целочисленное программирование и комбинаторика, *Ф. Гловер*

1. Введение 122
2. Примеры задач ЦП 126
3. Методы решения задач целочисленного программирования 136
4. Задачи целочисленного программирования, обладающие особыми свойствами 147
Литература 150

II-3. Теория графов: некоторые методы и приложения, *Т. Саати*

1. Введение 153
2. Основные определения 156
3. Связность 159
4. Экстремальные графы 168
5. Укладка 174
6. Некоторые из основных теорем 183
7. Матрицы 184
8. Два примера приложений 189
9. Заключительные замечания 191
Литература 191

II-4. Потоки в сетях, *Э. Джонсон* 194

1. Введение 194
2. Кратчайшие пути 194
3. Максимальные потоки 197
4. Прямо-двойственный алгоритм 201
5. Кратчайшие пути и отрицательные циклы 207
6. Линейное программирование 208
7. Приложения 218
8. Потоки с выигрышами 220
9. Многополюсные и многопродуктовые потоки 220
Литература 222

II-5. Геометрическое программирование, *Э. Питерсон* 225

1. Введение 225
2. Формулировка задачи и примеры 226
3. Основы теории 236
Литература 265

II-6. Нелинейное программирование, *О. Мангасариан* 267

1. Введение 267
2. Условия оптимальности 269
3. Двойственность 274
4. Алгоритмы минимизации в одномерном случае 275
5. Алгоритмы безусловной минимизации 278
6. Алгоритмы минимизации при наличии ограничений 281
Литература 288

II-7. Математическое программирование задач большой размерности, *Л. Лэсдон* 291

1. Введение 291
2. Решение задач линейного программирования большой размерности модифицированным симплекс-методом (МСМ) . . . 292
3. Метод обобщенных ограничений сверху 297
4. Метод генерации столбцов 304
5. Метод декомпозиции Данцига—Вулфа 311
6. Нелинейные задачи большой размерности 319
7. Перспективы развития 322

Литература 324

II-8. Оптимальное управление, *Г. Саган* 327

1. Постановка задачи 327
2. Необходимые условия 330
3. Синтез 337
4. Достаточные условия 341
5. Заключительные замечания 345

Литература 347

Часть III

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ (СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ)

III-1. Стохастические процессы, *В. Смит* 349

1. Введение 349
2. Случайные блуждания 357
3. Простое случайное блуждание 361
4. Рекуррентные события (процессы) 363
5. Цепи Маркова 366
6. Мартингалы 371
7. Процессы восстановления 373
8. Кумулятивные процессы 376
9. Ветвящиеся процессы 379
10. Обобщенные процессы рождения и гибели 380
11. Временные ряды и стационарные процессы 383

Литература 389

III-2. Теория массового обслуживания, *Ю. Бхат* 391

1. Введение 391
2. Задачи, терминология и обозначения 393
3. Области применения 396
4. Анализ поведения систем 399
5. Статистический анализ 414
6. Операционный анализ 419
7. Методы теоретического анализа . . . . .
8. Вычислительные проблемы 436
9. Основные направления современных исследований 439
10. Заключение 440

Литература 441

III-3. Теория полезности, *П. Фишберн* 448

1. Введение 448
2. Предпочтение и полезность 452

3. Теория ожидаемой полезности 460
4. Многофакторная теория полезности 468
5. Субъективная вероятность и ожидаемая полезность 473
6. Заключительные замечания 477
Литература 477

III-4. Теория принятия решений, *Р. Кини* 481

1. Введение 481
2. Аксиомы теории принятия решений 486
3. Методологические основы теории принятия решений 489
4. Числовая форма представления неопределенности суждений. 495
5. Оценка полезности 500
6. Успехи теории принятия решений 506
7. Будущее теории принятия решений 509
Литература 509

III-5. Теория игр и игровое моделирование, *Г. Оуэн* 513

Некоторые исторические сведения 513
1. Позиционные игры и нормальная форма игры 513
2. Игры двух лиц с нулевой суммой 516
3. Игры двух лиц с ненулевой суммой 534
4. Игры *n* лиц 537
5. Игровое моделирование 546
Литература 548

III-6. Теория поиска, *Ф. Морз* 549

Введение 549
1. Основные понятия 551
2. Движение наблюдателя 557
3. Выявление зоны поиска 567
4. Оптимальное распределение поисковых усилий 576
5. Поиск в случае движущейся мишени 594
6. Поиск дискретно локализованных объектов 611
7. Поиск активно ускользающей мишени 623
8. Вопросы практического применения 627
Литература 628

III-7. Имитационное моделирование, *Д. Гэйвер* 630

1. Введение 630
2. Этапы имитационного эксперимента 630
3. Формирование модели 632
4. Методы генерации случайных чисел 634
5. Построение имитационной модели и методы уменьшения дисперсии 640
6. Статистический анализ данных 648
Литература 653

III-8. Вычислительные аспекты имитационного моделирования, *Д. Гордон* 655

1. Имитационное моделирование системы 655
2. Модели систем 657
3. Модель механического цеха 660
4. Отображение системы 661
5. Процесс имитации (имитационный эксперимент) 663
6. Накопление статистических данных 664
7. Обработка списков 664

8. Языки имитационного моделирования 666
9. Алгоритмы управления имитационными моделями 666
10. Способ организации языка GPSS 667
11. Модели механического цеха на языке GPSS 670
12. Структура системы SIMSCRIPT 671
13. Модель механического цеха на языке SIMSCRIPT 672
14. Сравнительные характеристики языков имитационного моделирования 674
Литература 675

III-9. Динамическое программирование, *Э. Денардо* 680

1. Введение 680
2. Прототип многошагового процесса принятия решений . . . 681
3. Некоторые принципы динамического программирования . . 684
4. Пример 686
5. Состояния 688
6. Неопределенность 690
7. Язык для описания многошаговых процессов принятия решений 692
8. Марковская модель процесса принятия решений 696
9. Заключение 702
Литература 703

Предметный указатель 704

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
В 2-х ТОМАХ

1

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Старший научный редактор Л. П. Якименко
Младший научный редактор Н. И. Сивилева
Художник В. А. Медников. Художественный редактор Л. Е. Безрученков
Технический редактор Е. С. Потапенкова. Корректор В. И. Постнова

ИБ № 2219

Сдано в набор 25.11.80 г. Подписано к печати 15.05.81 г.
Формат 60 × 90¹/₁₆. Бумага типографская № 1
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Объем 22,25 бум. л.
Усл. печ. л. 44,50. Усл. кр. отт. 44,50. Уч.-изд. л. 46,78. Изд. № 20/0697
Тираж 20 000 экз. Зак. 01121. Цена 3 р. 60 к.
ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7
«Искра революции» Союзполиграфпрома Государственного Комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва 103001, Трехпрудный пер., 9